

Ajuste de modelos não lineares para descrição do fruto cajá-manga

Kelly P. Lima^{1†}, Elias S. Medeiros², Felipe A. Fernandes³, Victor F. Silva⁴, Augusto R. Morais⁵

¹ Universidade Federal de Lavras.

² Universidade Federal da Grande Dourados. E-mail: eliasestatistica@gmail.com.

³ Universidade Federal de Lavras. E-mail: fernandesfelipe@gmail.com.

⁴ Universidade Federal de Lavras. E-mail: victor.est.ufop@gmail.com.

⁵ Universidade Federal de Lavras. E-mail: armorais@des.ufla.br.

Resumo: A cajá-manga é muito apreciado no Brasil, consumindo in natura ou na forma de polpa congelada, bebidas, doces, sorvetes e picolés, além disso sabe-se que esse fruto é altamente perecível e com curto período de comercialização. Desta forma, estudar a curva de crescimento vegetal é útil para auxiliar a elaboração de métodos de manejo para detectar a época de colheita. Com relação a curva de crescimento destaca-se o uso de modelos não lineares. Este trabalho teve como objetivo comparar e ajustar modelos não lineares em dados da massa do fruto cajá-manga ao longo dos dias. Para isso, foram utilizados dozes períodos de coleta (40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240 e 260). Foram utilizados os modelos não lineares Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para descrever o fruto cajá-manga. Os parâmetros dos modelos foram estimados pelo método de mínimos quadrado usando algoritmo de Gauss-Newton. Os critérios de informação de Akaike corrigido e coeficiente de determinação ajustado foram usados como critérios de escolha dos modelos que melhor se ajustaram aos dados. Além disso, as análises foram realizadas no software R. Os resultados obtidos mostram que o peso assintótico foi de 97,843 a 109,801 g. Dentre os modelos ajustado, conclui-se que o modelo Gompertz é adequado para a descrição do fruto cajá-manga.

Palavras-chave: Anacardiaceae; *Spondia*; Curva de crescimento vegetal.

Abstract: The cajá-manga is appreciated in Brazil, consumed in natura or as frozen pulp, beverages, sweets, ice creams and popsicles, in addition it is known that this fruit is highly perishable and with short commercialization period. In this way, studying the plant growth curve is useful to help the elaboration of management methods to detect the harvesting season. Regarding the growth curve, the use of non-linear models is highlighted. The objective of this study was to compare and adjust non-linear models of cajá-manga fruit mass data over the course of days. For this, two collection periods (40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240 and 260) were used. The nonlinear models Logistic, Gompertz and von Bertalanffy were used to describe the cajá-manga fruit. The parameters of the models were estimated using the least squares method using Gauss-Newton algorithm. Corrected Akaike information criteria and adjusted coefficient of determination were used as criteria for choosing the models that best fit the data. In addition, the analyzes were performed in software R. The results obtained show that the asymptotic weight was 97.843 to 109.801 g. Among the adjusted models, it is concluded that the Gompertz model is suitable for the description of the cajá-mango fruit.

Keywords: Anacardiaceae; *Spondia*; Plant Growth Curve.

[†] Autora correspondente: kelly.lima.88@gmail.com.

Introdução

A cajazeira do gênero *Spondias* é uma espécie de planta frutíferas que pertence à família Anacardiaceae, no qual encontra-se nas áreas tropicais da América, Ásia, África e no Brasil. Esse tipo planta produz frutos que são considerados nutritivos, saborosos e de grande aceitação de mercado (MILLER; SCHAAL, 2005).

Conforme Souza (1998), as principais espécies de *Spondias* estão no Nordeste são *S. mombin* L. , *S. purpurea* L. , *S. tuberosa* Arr. Câm. , *S. cytherea* Sonn. e *Spondias* spp..

Segundo Saturnino e Gonçalves (2011), esses tipos de fruteiras tropicais estão em fase de domesticação e grande expansão na agroindústria, além disso pode-se tornar uma grande potencial agroindustrial.

No Brasil, principalmente no Nordeste, essas espécies tem uma grande relevância tanto social quanto econômica, fato comprovado pela crescente comercialização de seus frutos e produtos processados em mercados, supermercados e restaurantes da região (SATURNINO; GONÇALVES, 2011).

Além disso, esse fruto possui vários benefícios para a saúde humana, pois apresenta uma potencial antioxidante importante para neutralizar os radicais livres, portanto os radicais livres estão associados a prevenção de doenças crônicas degenerativas, como cardiovasculares, câncer, diabetes e cataratas (Barbosa et al. 2010).

De acordo com Soares et al.(2006), o cajá-manga é comercializada, principalmente, para consumo in natura pelo sabor exótico que o fruto tem como característica e processamento de polpa, pois apresenta grande aceitação de mercado pelo excelente valor comercial como matéria-prima.

Segundo Silva et al.(2018), esse fruto apresenta características como altamente perecível e curto período de comercialização. Com isso, sendo necessário o estudo de desenvolvimento de tecnologias que para que se possa ter um maior período de comercialização do fruto in natura, em que o cajá-manga preserve a boa qualidade sensorial, nutricional e biológica.

Portanto, é importante o conhecimento do desenvolvimento do fruto, assim como o ponto ideal de colheita para melhor conservação. Então é importante ter o conhecimento de como ocorre o crescimento vegetal, pois contribui para um manejo adequado da espécie e na detecção de possíveis problemas durante o desenvolvimento da cultura.

Um das metodologia que apresenta grande destaque nessa análise de curvas de crescimento vegetal é o ajuste de modelos não lineares. A principal vantagem é que seus parâmetros possuem interpretação prática, assim auxiliando o pesquisador na tomada de decisão (SORATO et al., 2014).

Desta forma, este trabalho teve como objetivo comparar e ajustar os modelos não lineares Logístico, Gompertz e von Bertalanffy na descrição do fruto cajá-manga.

Material e métodos

Os dados obtidos de Silva (2018), no qual os frutos cajá-manga foram colhidos entre os meses de setembro 2014 a junho de 2015, em que se localizavam em uma área de plantação de cajá-manga (*Spondias mombin* L.), localizada na Fazenda Jabuticabal, no município de Nova Fátima em estado de Goiás. A primeira colheita aconteceu após a formação do fruto com 40 dias após anteses (DAA) e demais medições foram em intervalos de vinte dias, até completar 260 DAA, quando ocorreu o amadurecimento, que é

caracterizado pela coloração amarelada da casca. O experimento foi conduzido em um delineamento inteiramente casualizado (DIC) constituído por doze períodos de coleta (40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240 e 260 DAA), com três repetições. A variável que foi avaliada foi a massa expressa em gramas (g).

Os modelos usados para descrever a massa do fruto cajá-manga pelo dias após a antese (DAA) foram Logísticos (1), Gompertz (2) e von Bertalanffy (3) que são dados por:

$$Y_i = \frac{\alpha}{1 + e^{k(\gamma - t_i)}} + \varepsilon_i \quad (1)$$

$$Y_i = \alpha e^{(-e^{k(\gamma - t_i)})} + \varepsilon_i \quad (2)$$

$$Y_i = \alpha \left(1 - \frac{e^{(k(\gamma - t_i))}}{3} \right)^3 + \varepsilon_i \quad (3)$$

em que Y_i é o valor observado da massa (g); α é valor assintótico ou máximo para o cajá-manga, ou seja, o valor máximo que esse fruto atinge; γ corresponde ao ponto de inflexão da curva do modelo, em que o crescimento do fruto desacelera para um crescimento estabilizado em seu valor máximo de α ; k é taxa de maturidade; t_i é o i -ésimo dia após antese e $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ é o erro aleatório associado a i -ésima observação, sendo que é uma distribuição normal com média zero e variância constante.

O modelo apresenta forma sigmoidal e sendo simétrico em relação ao ponto de inflexão, o qual é dado por $t_i = \hat{\gamma}$, e é nesse ponto que ocorre a mudança de concavidade da curva. Neste caso, $Y_i = \frac{\hat{\alpha}}{2}$ é o valor que Y atinge a metade do valor máximo assintótico, ou seja, a taxa é máxima quando a fruta atinge metade do seu desenvolvimento, em que a taxa de crescimento diminui até se estabilizar e medidas para atingir o valor assintótico de α . Esse resultado faz como que o modelo Logístico seja simétrico com relação ao ponto de inflexão.

Já para o modelo Gompertz isso ocorre quando $t_i = \hat{\gamma}$ e $Y_i = \frac{\hat{\alpha}}{e}$ neste ponto indicando que o fruta atinge a taxa máxima de crescimento antes da metade do seu valor assintótico até a maturidade, ou seja, o modelo Gompertz não é simétrico em relação ao ponto de inflexão.

Com relação ao modelo von Bertalanffy apresenta forma sigmoidal, porém não é simétrico em relação ao ponto de inflexão, o qual é dado por $t_i = \hat{\gamma}$, e é nesse ponto que ocorre a mudança de concavidade da curva. Desta forma, é nesse ponto que a taxa de crescimento da cultura atinge seu valor máximo é dada por $Y_i = \frac{8}{27} \hat{\alpha}$.

O método de mínimos quadrado foi usado para estimação dos parâmetros, porém esse método resulta uma solução não explícita sistemas de equações normais não lineares sendo necessário a utilização de algum processo iterativo SOUZA(2007). Um dos processos iterativos frequentemente usado é o de Gauss-Newton que foi adotado nesse estudo (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002).

Para analisar os resíduos foram usados alguns teste estatísticos para verificar a normalidade dos resíduos (Shapiro-Wilk), homogeneidade de variância (Breuch-Pagan) e independência residual (Durbin-Watson).

A comparação e qualidade de ajuste foram realizada por meio do critério de Akaike corrigido (AICc) e coeficiente de determinação (R^2), O coeficiente de determinação ajustado (R_α^2) é dado por : $R_\alpha^2 = 1 - \left[\frac{(n-1)(1-R^2)}{n-p} \right]$ em que R^2 é o coeficiente de determinação,

n é o tamanho da amostra e p é número de parâmetros do modelo. Já o critério de akaike corrigido (AICc) é obtido por: $AICc = n \ln \left(\frac{SQR}{n} \right) + 2(p + 1) + \frac{2(p+1)(p+2)}{n-(p+2)}$ em que SQR é soma de quadrado de resíduos. Considerou-se o modelo mais adequado os que apresentaram menor estimativa de AICc e maiores valor de R^2 próximo a 1.

As análises foram usando o *software* R (R Core Team (2018)) entre essas tem-se o ajuste dos modelos, estimação dos parâmetros e análise de resíduos.

Resultados e discussões

Pela Figura 1 pode-se observar um comportamento um comportamento sigmoidal do crescimento da massa do fruto em relação aos dias após a antese (daa) dando indicativo para o uso de um modelo não linear, como o Logístico, Gompertz ou von Bertalanffy, com a finalidade de estimar, por exemplo, o acúmulo máximo.

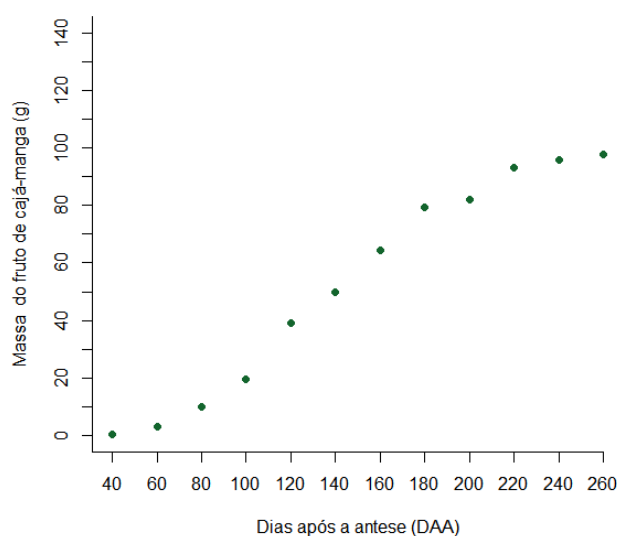


Figura 1: Representação gráfica dos valores médios da massa do fruto de cajá-manga (g) em relação ao dias após a antese.

A verificação dos pressupostos dos modelos relativos à normalidade, homogeneidade de variância e independência dos erros para a massa do fruto cajá-manga pode ser visto na Tabela 1 que estão apresentados os resultados da análise de resíduos, com base na significância para os teste de Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW). Conforme os resultados dos testes verificou-se que os pressupostos de normalidade, homogeneidade e independência foram válidos para todos os modelos (valor- $p > 0,05$).

Tabela 1: Valores p dos testes Shapiro-Wilk (SW), Breusch-Pagan (BP) e Durbin-Watson (DW) utilizados para análise de resíduos para os modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para a massa (g) da cajá-manga.

Modelo	SW	BP	DW
Logístico	0,8549	0,8131	0,1197
Gompertz	0,7897	0,1424	0,9804
von Bertalanffy	0,2395	0,3999	0,8205

A Tabela 2 apresenta as estimativas dos parâmetros (α , γ , k) considerando a média dos dados, para cada modelo ajustado da massa do fruto cajá-manga. Além disso, a tabela também apresenta os critérios de qualidade de ajuste para selecionar o modelo mais adequado.

Tabela 2: Estimativas e critérios de qualidade de ajuste para os parâmetros dos modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy para massa (g) da fruta cajá-manga.

Modelo	Parâmetros			AICc	R_α^2
	α	γ	k		
Logístico	97,843	138,735	0,034	70,891	0,994
Gompertz	104,790	122,843	0,020	60,863	0,997
von Bertalanffy	109,801	113,741	0,016	63,522	0,996

A partir da Tabela 2 observa-se o peso assintótico representado pelo parâmetro α foi de 97,843 g (Logístico); 104,790 (Gompertz) e 109,801 (von Bertalanffy) pode-se verificar que são valores bem próximos. Além disso, pode-se observar que o modelo Logístico estimou o menor valor. De acordo com Saturnino e Gonçalves (2011), esses valores não foram superestimado, pois a cajá-manga pode atingir até 380 g.

Com relação ao parâmetro k representa a taxa de maturidade e indica a velocidade no sentido de atingir o peso assintótico. Sabe-se que quanto maior o valor de k , menor será o tempo para atingir o peso assintótico, ou seja, maior a velocidade de crescimento do vegetal. Quando compara-se as estimativas das taxa de maturidade (k) verificou-se estimativas distintas para os modelos como 0,034 g/dia (Logístico foi superior ao demais), 0,02 g/dia (Gompertz) e 0,016 g/dias (von Bertalanffy)

Os pontos de inflexão (γ) representa o ponto em que a função muda o sentido crescente para decrescente (Malhado et al., 2009). Os pontos de inflexão apresentaram pouca variações entre os modelos Logístico (138,735 dias) e Gompertz (122,843 dias), sendo o menor deles estimado pelo von Bertalanffy (113,741 dias). Este resultado corrobora com Silva (2018) que analisou que o crescimento da massa do fruto tem um peso máximo (massa) entre 120 a 200 daa.

Baseado nos critérios de seleção pode-se observa que os modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy apresentaram valores semelhantes considerando o coeficiente de determinação ajustados (R_α^2). Porém o modelo Gompertz apresenta o maior R_α^2 e o menor valor de AICc.

Os valores obtido pelos modelos são próximos aos encontrados nessa pesquisa e na literatura para o fruto do cajá-manga. Desta forma, validando a modelagem não linear usando o modelo Gompertz para essa aplicação.

Considerações finais

O modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy são adequados para ajustar a massa do fruto cajá-manga. Vale ressaltar a importância dos modelos, pois por meio deste modelos pode-se conhecer o comportamento da cultura, assim, possivelmente usá-los nas tomadas de decisões referentes os manejo das plantas. Além disso, facilitando futuramente nos manejo da cultura ao longo de seu desenvolvimento. Contudo, o modelo que apresentou melhores resultados com base no critério de seleção foi o modelo Gompertz.

Agradecimentos

Agradecimento a CNPq pela concessão da bolsa de doutorado, a CAPES e FAPMIG pelo apoio financeiro.

Referências bibliográficas

- SOARES, E.B.; GOMES, R.L.F.; CARNEIRO, J.G.M.; NASCIMENTO, F.N.; SILVA, I.C.V.; COSTA, J.C.L. Caracterização física e química de frutos de cajazeira. *Revista Brasileira de Fruticultura*, v.28, n.3, p.518-519, 2006.
- SOUZA, G. de S. *Introdução aos modelos de regressão linear e não-linear*. Brasília: EMBRAPA-SPI, 1998.
- MALHADO, C. H. M.; CARNEIRO, P.L.S.; AFFONSO, P.R.A.M; SOUZA JR., A.A.O; SARMENTO, J.L.R. Growth curves in Dorper sheep crossed with the local Brazilian breeds, Morada Nova, Rabo Largo, and Santa Inês. *Small Ruminant Research*, v.84, n.1-3, p.16-21, 2009.
- MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. Algumas considerações em regressão não linear. *Acta Scientiarum*, v.24, n.6, p.1761-1770, 2002.
- MILLER, A.; SCHAAL, B. Domestication of a mesoamerican cultivated fruit tree, *Spondias purpurea*. *Proceeding of the National Academy of Science of the United States of America*, v.102, n.1, p.12801-12806, 2005.
- SATURNINO, H.M.; GONÇALVES, N. P., *Spondias*: umbu, cajá-manga, cajá e seriguela. *Informe Agropecuário*, Belo Horizonte, v.32, n.264, p.101-113, 2011.
- SILVA, T.L.L.; SILVA, E.P.; ASQUIERI, E.R.; VIEIRA, E.C.S.; SILVA, J.S.; SILVA, F.A.; DAMIANI, C. Physicochemical characterization and behavior of biocompounds of caja-manga fruit (*Spondias mombin* L.). *Food Sci. Technol.*, vol.38, n.3, p.399-406, 2018.
- SORATO, A.M.C.; PRADO, T.K.L; MORAIS, A.R. Análise do crescimento vegetal por meio de modelo não linear via regressão isotônica . *Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto*, v.3, n.3, p.139-143, 2014.
- SOUZA, F.X. *Spondias* agroindustriais e os seus métodos de propagação. Fortaleza: EMBRAPA-CNPAT: SEBRAE-CE. *EMBRAPA-CNPAT. Documentos*, v.27, 26p., 1998.
- R CORE TEAM. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2019. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

Sigmae, Alfenas, v.8, n,2, p. 221-226, 2019.

64^a Reunião da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria (RBRAS).
18^o Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica (SEAGRO).