Fractais: Conjuntos de Julia e Conjuntos de Mandelbrot

Aldicio J. Miranda

Universidade Federal de Alfenas. E-mail: aldicio@unifal-mg.edu.br.[†]

Resumo: *Os fractais foram nomeados no início dos anos* 80 *por B. Mandelbrot, para classificar certos objetos que não possuem dimensão inteira* $(1, 2, ...)$ *mas sim fracionária, ou seja, figuras fractais são muito irregulares para serem descritas na tradicional linguagem da geometria Euclidiana. Diferentes definições de fractais surgiram com o aprimoramento de sua teoria. Sem rigor matemático pode-se definir fractais como objetos que apresentam auto-semelhança, ou seja, um fractal é um objeto cuja geometria se repete infinitamente em porções menores, semelhantes ao próprio objeto. Existem diversos tipos de fractais, mas apresentaremos as figuras geradas a partir de iterações de funções. Porém para chegar às figuras fractais, precisaremos falar em iterações de funções complexas, que associam a um ponto complexo* $a + bi$ *uma imagem complexa* $f(a + bi) = c + di$*. O conjunto de Julia é conhecido como o conjunto que separa o plano complexo em dois conjuntos, o primeiro formado pelos pontos cujas órbitas tendem a origem e o segundo formado pelos pontos cujas órbitas tendem ao ponto no infinito. Os pontos do conjunto de Mandelbrot nos fornecem conjuntos de Julia conexos e os pontos que não estão no conjunto de Mandelbrot correspondem a conjuntos de Julia desconexos. Conjuntos de Julia e de Mandelbrot são de geometria fractal e neste artigo são discutidos a dinâmica da função quadrática complexa* $f(z) = z^2 + c$*.*

Palavras-chave: Fractais, Conjuntos de Julia, Conjuntos de Madelbrot, Iteração.

Abstract: *The fractals were named in the early 1980's by B. Mandelbrot, to classify certain objects that have no integer dimension* $(1, 2, ...)$*, but fractional. Fractals are figures too irregular to be described in the language of traditional Euclidean geometry. Different definitions of fractals emerged with the improvement of his theory. Without mathematical rigor fractals can be defined as objects that exhibit self-similarity, that is, a fractal is an object whose geometry repeats itself endlessly into smaller portions, similar to the object itself. There are several types of fractals, but we present the figures generated from iterations of functions. But to generate the fractals figures, we need to use iterations of complex functions, that associate a complex point* $a + bi$ *to a complex image* $f(a + bi) = c + di$*. The Julia set is known as the set that separates the complex plane into two sets, the first is formed by the points whose orbits tend to the origin and the second by the points whose orbits tend to point at infinity. The points of the Mandelbrot set provide us connected Julia sets and those points that are not in the Mandelbrot set correspond to unconnected Julia sets. Julia and Mandelbrot sets are of fractal geometry and in this article are discussed the dynamics of complex quadratic function* $f(z) = z^2 + c$*.*

Keywords: Fractals, Julia set, Mandelbrot set, Iteration.

[†]Este trabalho trata-se de uma oficina oferecida na I Semana da Matemática da Unfal-MG.

Introdução

Fractais (do latim *fractus*, fração, quebrado) são figuras da geometria não-Euclidiana.

A geometria fractal é o ramo da matemática que estuda as propriedades e o comportamento dos fractais. Descreve muitas situações que não podem ser explicadas facilmente pela geometria clássica, e é aplicada em ciência, tecnologia e arte gerada por computador.

Sem rigor matemático pode-se definir fractais como objetos geométricos que apresentam auto-semelhança, ou seja, um fractal é um objeto cuja geometria se repete infinitamente em porções menores, semelhantes ao próprio objeto e independem de escala. O termo foi criado em 1975 pelo matemático francês Benoît Mandelbrot (1924-2010).

A ideia dos fractais teve a sua origem no trabalho de alguns cientistas entre 1857 e 1913. Em 1872, Karl Weierstrass (WEIERSTRASS, 1993) encontrou o exemplo de uma função com a propriedade de ser contínua em todo seu domínio, mas em nenhuma parte diferenciável. O gráfico desta função é chamado atualmente de fractal.

Também houve muitos outros trabalhos relacionados a estas figuras, mas esta ciência só conseguiu se desenvolver plenamente a partir da década de 1960, com o auxílio da computação.

Um dos pioneiros a usar esta técnica foi Mandelbrot, o responsável pela descoberta de um dos fractais mais conhecidos, o Conjunto de Mandelbrot.

Os Fractais são normalmente gerados através de computadores com softwares específicos.

Através de seu estudo podemos descrever muitos objetos extremamente irregulares do mundo real. Os meteorologistas utilizam o cálculo fractal para verificar as turbulências da atmosfera incluindo dados como nuvens, montanhas, a própria turbulência, os litorais, e árvores. As técnicas fractais também estão sendo empregadas para a compactação de imagens através da compressão fractal, animação digital. Os fractais encontram aplicações artísticas variadas, como gerar texturas, simulação de vegetação e confecção de paisagens. Na música, sons baseados em fractais são surpreendentemente realistas e parecem mais capazes de produzir sons parecidos com os naturais que outros processos artificiais. Além das mais diversas disciplinas científicas que utilizam o processo.

Um livro base para o estudo da geometria fractal foi escrito pelo próprio Mandelbrot, chamado: The Fractal Geometry of Nature (MANDELBROT, 1977).

As categorias relevantes de fractais é baseada no tipo de matemática envolvida no processo. Por exemplo:

1. Experimento com fractal de Mandelbrot: aquela onde cada ponto do gráfico pode ser determinado pela aplicação iterativa de uma função simples. (Exemplos são os conjuntos de Mandelbrot);

2. Aquela onde existe uma regra de substituição geométrica. (Exemplos incluem a poeira de Cantor, o triângulo de Sierpinski, a esponja de Menger e o floco de neve de Koch);

3. Aquela criada com sistemas fractais iterativos. (Exemplo, as chamas fractais);

4. Aquela gerada por processos com razão aleatória, em vez de processos deterministas. (Como as paisagens fractais.)

Vamos falar sobre os fractais gerados a partir de iterações de funções complexas, em especial a função quadrática complexa e também apresentaremos um algoritmo para gerar figuras fractais.

Preliminares

Veja Devaney (1990) como principal referência para este texto.

Iterações

Para iterar uma função, calculamos $f(x)$ e depois aplicamos f novamente para encontrar um novo valor $f(f(x))$. Então simplificaremos estas notações por $f^j(x)$ que significa a j-ésima aplicação de f. Logo:

$$\begin{array}{rcl} f^1(x) & = & f(x) \\ f^2(x) & = & f(f(x)) \\ f^3(x) & = & f(f(f(x))) \end{array}$$

e assim por diante.

Órbitas

A lista de sucessivas iterações de um ponto ou um número é chamada de órbita daquele ponto. Por exemplo, a órbita de 2 da função $f(x) = x^2$ é dada pela lista:

$$2, 4, 16, 256, 65536, \ldots$$

Órbitas finitas: São órbitas formadas por um número finito de elementos.

Órbitas infinitas: São órbitas formadas por um número infinito de elementos.

Ponto fixo: Um ponto é chamado ponto fixo de uma função f se

$$f^n(x_0) = x_0.$$

Órbita periódica: Uma órbita é periódica se eventualmente ela retorna ao lugar de onde começou. Isto é, existem inteiros m e m_0, tal que

$$f^{(n+m)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

para todo $m \geq m_0$.

Plano Complexo

O número imaginário i satisfaz $i^2 = -1$, isto é, $i = \sqrt{-1}$. Claramente i não é um número real, é um exemplo de um número complexo. Um número complexo é um número da forma

$$z = x + yi,$$

onde x e y são números reais.

Por exemplo, $2 + 3i$, $7 = 7 + 0i$, $3i = 0 + 3i$, são todos números complexos.

O número x é chamada a parte real de $z = x + yi$ e y a parte imaginária.

Os números complexos estão em correspondência com o plano, podemos representar $x + yi$ no ponto de coordenadas (x, y). Assim, podemos nomear pontos no plano usando números complexos.

Por exemplo: i é representado em $(0, 1)$, o número real $7 = 7 + 0i$ é representado no eixo x por $(7, 0)$.

O módulo $|x + yi|$ é definido como sendo a distância de $x + yi$ até a origem $(0, 0)$. Que é dada por:

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ dois números complexos. A soma e o produto de z por w é definida por:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Pela definição de soma temos a desigualdade triangular, ou seja, se z e w são dois números complexos então,

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Conjuntos de Julia

Iteração da função $T(z) = z^2$

Considere a função $T(z) = z^2$, onde $z = x + yi$ é um número complexo. Então, T é dada por:

$$T(x + yi) = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Quando aplicamos T em um número complexo, obtemos outro número complexo, nomeado, z^2 .

A órbita de algum número complexo sob esta função é uma coleção de pontos no plano complexo.

No experimento computacional, plotamos apenas pontos que permanecem no interior do quadrado $|x| \leq 2$ e $|y| \leq 2$.

Com auxílio de um programa de computador descrevemos o destino da órbita de um ponto inicial $x_0 + iy_0$ da função $T(z) = z^2$. Temos que,

$$\begin{array}{rcl}
|T(x_0 + y_0 i)| & = & |(x_0^2 - y_0^2) + 2x_0 y_0 i| \\
|T(x_0 + y_0 i)| & = & \sqrt{(x_0^2 - y_0^2)^2 + (2x_0 y_0)^2} \\
|T(x_0 + y_0 i)| & = & \sqrt{x_0^4 + y_0^4 - 2x_0^2 y_0^2 + 4x_0^2 y_0^2} \\
|T(x_0 + y_0 i)| & = & \sqrt{x_0^4 + 2x_0^2 y_0^2 + y_0^4} \\
|T(x_0 + y_0 i)| & = & \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\
|T(x_0 + y_0 i)| & = & x_0^2 + y_0^2 \\
|T(x_0 + y_0 i)| & = & |x_0 + y_0 i|^2
\end{array}$$

De $|T(x_0 + y_0 i)| = |x_0 + y_0 i|^2$, resulta que,

1. se $|x_0 + y_0 i| < 1$, as órbitas convergem para zero;
2. se $|x_0 + y_0 i| > 1$, as órbitas tendem para o infinito.

Entre estes pontos existem pontos com módulo 1. As órbitas destes pontos permanecem num círculo de raio 1 no plano complexo. Esta última coleção de pontos é conhecida como **Conjunto de Julia** de T. É fácil ver que se $|x_0 + y_0 i| = 1$, então $|T(x_0 + y_0 i)| = 1$. Isto é, se um ponto inicial está no conjunto de Julia, então necessariamente a órbita inteira permanecerá nela para sempre. Assim, dizemos que o conjunto de Julia é invariante sob T.

Observação: Seja $z_0 = 0.6 + 0.8i$, este ponto tem módudo 1. Entretanto, eventualmente sua órbita sairá do círculo e tenderá para 0 ou para o infinito. O que causa isto é o "round-off-error". (pequenos erros de arredondamento gerado pelo computador.)

O conjunto de Julia é precisamente a coleção de órbitas instáveis do sistema dinâmico complexo.

O Conjunto de Julia

O conjunto de Julia de uma função complexa, foi nomeado pelo matemático Francês Gaston Julia, quem descobriu, no século XX, muitas das propriedades básicas deste conjunto. Uma precisa definição de conjunto de Julia de um polinômio é: **a fronteira da coleção de pontos cujas órbitas escapam para o infinito.** Isto significa que pontos em um conjunto de Julia têm órbitas que não escapam para o infinito, mas arbitrariamente muito perto existem pontos cujas órbitas escapam.

Para a função $T(z) = z^2$, foi fácil encontrar o conjunto de Julia, que é o círculo de raio 1 centrado na origem.

Nesta seção apresentaremos um algoritmo para computar o conjunto de Julia de Q_c (definida abaixo) que trabalha bem quando Q_c tem uma órbita periódica (ou ciclo) de atração. Porém, nem sempre é verdade que Q_c tem um ciclo de atração, além do mais é difícil predizer quais valores de c admitem um sistema dinâmico que tem um ciclo de atração. Mais adiante descreveremos Conjuntos de Mandelbrot, um eficiente caminho para acoplar este problema.

Faremos o estudo da seguinte função quadrática:

$$Q_c(z) = z^2 + c,$$

onde $c = c_1 + ic_2$ é uma constante complexa.

Aqui é considerado somente valores c, com $|c| \leq 2$, ou seja, estamos tomando aqueles valores de c que permanecem no interior do círculo de raio 2 no plano complexo. O motivo por essa escolha, está no teorema abaixo.

No caso em que Q_c tem uma órbita periódica de atração, há uma coleção de pontos que são atraídos para o círculo. O conjunto de pontos que são atraídos para o círculo é chamado de bacia de atração do círculo. A fronteira entre a bacia de atração e os pontos que tendem para o infinito é chamada de conjunto de Julia.

O primeiro método para plotar conjuntos de Julia, é colorir os pontos de cor A se suas órbitas tendem para o infinito e colorí-los de cor B se eles não tendem para o infinito. O limite entre essas duas regiões é então o conjunto de Julia.

Como decidir se uma órbita tende para o infinito?

Teste de Convergência para $Q_c(z)$

Teorema. Se para algum $n \in \mathbb{N}$, for satisfeita a expressão

$$|Q_c^n(z)| > 2$$

então a órbita de z tende para o infinito.

Demonstração:

Vamos fixar valores pequenos para c. Seja $Q_c(z) = z^2 + c$, com $|c| \leq 2$. Se $|z| > 2$ então $|z| > |c|$. Logo,

$$|Q_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| > |z^2| - |z|.$$

Assim,

$$|Q_c(z)| > (|z| - 1)|z|.$$

Mas,

$$|z| - 1 = 1 + k, k \in \mathbb{R}_+.$$

Então

$$|Q_c(z)| > (1+k)|z| > |z| > 2.$$

Na segunda iteração temos,

$$|Q_c^2(z)| = |Q_c(Q_c(z))| > (1+k)|Q_c(z)| > (1+k)^2|z|.$$

E assim,

$$|Q_c^n(z)| > (1+k)^n|z|.$$

Como,

$$\lim_{n\to\infty}(1+k)^n = \infty$$

temos que,

$$\lim_{n\to\infty}|Q_c^n(z)| = \infty.$$

Portanto, a órbita de z tende ao infinito se $|z| > 2$.

Algoritmo: Conjunto de Julia

Abaixo o pseudo-código para gerar conjuntos de Julia.

1. Ler as constantes c_1 e c_2;
2. Selecionar um reticulado de pontos na tela (pixels) de tal forma que este reticulado corresponda ao quadrado ([-2,2] x [-2,2]);
3. Para cada z calcular as 20 primeiras iterações. Conferir a cada iteração se $|Q_c(z)| > 2$;
4. Se $|Q_c(z)| \geq 2$ deve-se parar a iteração e atribuir uma cor A ao ponto z;
5. Se todos os 20 primeiros pontos da órbita satisfazem $|Q_c(z)| < 2$, então atribuir uma cor B ao ponto z.

Ler c_1 e c_2;
Para i De 1 a 800 Faça $\quad x_0 := -2 + \frac{i}{200}$;
Para j De 1 a 800 Faça $\quad y_0 := 2 - \frac{j}{200}$;
  $x := x_0$; $y := y_0$;
   Para k De 1 a 20 Faça
     $x_1 := x^2 - y^2 + c_1$;
     $y_1 := 2xy + c_2$;
     $x := x_1$; $y := y_1$;
      Se $x^2 + y^2 > 2$, Pare a iteração e pinte o pixel
         (i, j) na cor A e Próximo j, Senão;
    Próximo k;
    Pinte o pixel (i, j) na cor B;
   Próximo j;
   Próximo i;
Fim.

Observação: Neste algoritmo se algum ponto da órbita estiver fora do círculo de raio 2, então a iteração para e o computador pinta o ponto na cor A. Se todos os 20 primeiros pontos da órbita de z_0 permanecerem no interior do círculo de raio 2, então o ponto é pintado na cor B. Usar somente 20 iterações para decidir se uma órbita tende para o infinito ou não é realmente uma aproximação. Para ser rigoroso, temos que verificar todos os pontos da órbita, claramente uma tarefa impossível. O fato é que, para muitos conjuntos de Julia da função quadrática, 20 iterações é suficiente para obter uma aproximação bastante precisa da figura real. Com a velocidade de processamento, mesmos dos micro-computadores, se pode executar muito rapidamente o código acima com uma quantidade muito maior do que 20 iterações. Deve-se, aumentar a quantidade de iterações quando se realiza ampliações de pequenas partes do fractal, senão a figura poderá não se assemelhar à figura real.

Quando Q_c, não tem uma órbita periódica de atração, isto é, as órbitas de todos os pontos no no interior do reticulado ([-2,2] x [-2,2]) tendem para o infinito, neste caso teremos um conjunto de Julia desconexo. O problema então é: para quais valores complexos de c, Q_c tem uma órbita periódica de atração?

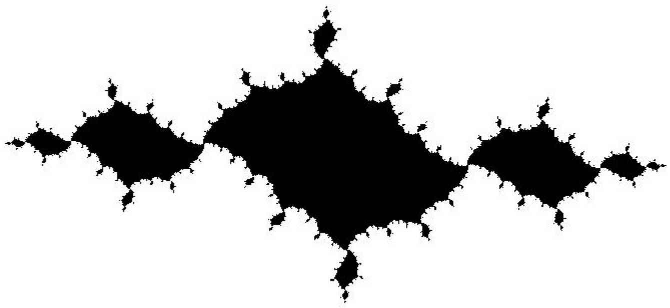

Figura 1: Conjunto de Julia de $Q_c(z)$, $c = -1.1 + 0.125i$.

Conjuntos de Mandelbrot

Conjunto de Mandelbrot é o conjunto de valores c para o qual a órbita crítica (órbita de $z_0 = 0$) de Q_c não tende para o infinito. Vamos chamar este conjunto de $\mathcal{M}$.

Assim como veremos $\mathcal{M}$ é o dicionário que contém a descrição de todas as diferentes dinâmicas que ocorrem para a família quadrática.

Observação: Conjuntos de Mandelbrot é uma figura no plano dos valores de c, e não no plano dos números complexos z, onde estão os conjuntos de Julia.

Mas o que $\mathcal{M}$ aparenta?

Para responder esta pergunta precisamos conhecer quais valores de c tem órbita crítica que tende para o infinito.

É verdade que se $|c| > 2$, então a órbita crítica de 0 escapa imediatamente. De fato, se escrevermos $|c| = 2 + k$, com $k > 0$, reivindicamos que algum ponto z com $|z| \geq |c|$, escapa sob iterações de Q_c. Pois,

$$\begin{aligned} |Q_c(z)| &= |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| \\ &\geq |z^2| - |z| \\ &= |z|(|z| - 1) \\ &= |z|(1 + k). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|Q_c(z)| > |z|.$$

Ou seja, se $|z| > 2$ então $|Q_c(z)|$ cai fora do círculo de raio 2 no plano complexo.
Se continuarmos iterando e calculando o módulo, teremos que:

$$|Q_c^n(z)| \geq (1+k)^n|z|.$$

Portanto,

$$|Q_c^n(z)| \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Consequência: Conjuntos de Mandelbrot pertencem ao interior do círculo de raio 2 no plano complexo. Equivalentemente, se $|c| > 2$, então a órbita crítica de Q_c deve escapar, e conjuntos de Julia de Q_c é desconexo.

E como encontrar os conjuntos de Mandelbrot? Os passos são:

1. Verificar apenas valores de c no interior do círculo de raio 2;
2. Se a órbita de c sempre deixa o círculo de raio 2, então necessariamente ela escapa para o infinito.

Isto nos dá um algoritmo para computar conjuntos de Mandelbrot. Simplesmente para cada c computamos a órbita de 0 e verificamos se algum ponto desta órbita tem módulo maior do que 2. Uma vez que isto ocorre, estamos garantindo que a órbita crítica escapa e c não pertence a conjuntos de Mandelbrot.

Mostre que se a órbita crítica para um determinado c tende para o infinito, então a órbita de qualquer outro ponto z_0 inicial também tende para o infinito.

Algoritmo: Mandelbrot

Veremos agora como desenhar conjuntos de Mandelbrot:

1. Dividir um quadrado com dimensões 800×800 pixels;
2. Consideramos cada ponto deste quadrado como um valor c;
3. Para cada c, verificamos se a órbita de 0 sob Q_c, escapa do interior do círculo de raio 2, antes de n iterações (abaixo usamos 40 iterações);
4. Se escapar, colorimos o ponto c na cor A;
5. Se não escapar, colorimos o ponto c na cor B.

Para i De 1 a 800 Faça
Para j De 1 a 800 Faça
  $c_1 := -2 + \frac{i}{200}$;
  $c_2 := 2 - \frac{j}{200}$;
  $x := c_1$; $y := c_2$;
   Para k De 1 a 40 Faça
    $x_1 := x^2 - y^2 + c_1$;
    $y_1 := 2xy + c_2$;
    $x := x_1$; $y := y_1$;
     Se $x^2 + y^2 > 4$, Pare a iteração e pinte o pixel

(i, j) na cor A e Próximo j, Senão;
$x := x_1$; $y := y_1$;
Próximo k;
Pinte o pixel (i, j) na cor B;
Próximo j;
Próximo i;
Fim.

Observação: Em toda iteração em i ou j estamos renovando ou atualizando o valor $c = c1 + ic2$. Essa é a diferença do conjunto de Julia, onde c é fixo e percorremos todos os z_0 no reticulado dado.

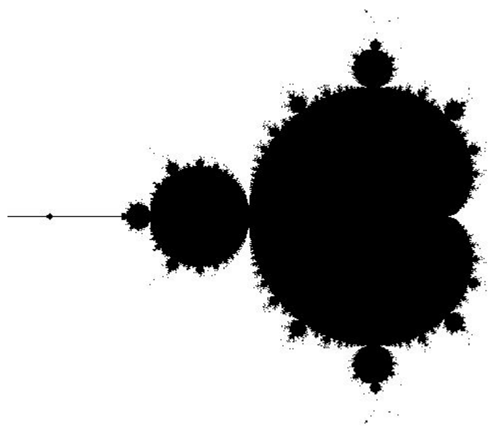

Figura 2: Conjunto de Mandelbrot de $Q_c(z)$.

Referências

DEVANEY, R. L., *Chaos, Fractaos, and Dynamics* - Computer Experiments in Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1990. 181 p.

MANDELBROT, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York, 1977.

WEIERSTRASS, K. *Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzeren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen*, Königlich Preussichen Akademie der Wissenschaften, Mathematische Werke von Karl Weierstrass, Berlin, Germany: Mayer & Mueller, 1895, vol. 2, pages 7174. English translation: *On continuous functions of a real argument that do not possess a well-defined derivative for any value of their argument*, G.A. Edgar, Classics on Fractals, Addison-Wesley Publishing Company, 1993, 39p.