

---

# Comparação dos modelos contínuo e discreto de Malthus e Verhulst

Tamara A. N. Anjos<sup>1†</sup>, Maria do Carmo P. Toledo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Graduada em Matemática Licenciatura, Universidade Federal de Lavras - UFLA.

<sup>2</sup>Professora do Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras - UFLA.

**Resumo:** Neste trabalho consideramos dois importantes modelos de dinâmica populacional, modelo de Malthus e modelo de Verhulst, em suas versões contínua e discreta. Iniciamos encontrando a solução geral e em seguida determinamos os pontos de equilíbrio desses modelos e sua estabilidade. Além disso, mostramos que não há diferença entre os pontos de equilíbrio do modelo de Malthus contínuo e discreto e no modelo de Verhulst discreto acontecem dois tipos de bifurcações que não ocorrem no contínuo.

**Palavras-chave:** Equações de diferenças, modelo de Malthus, modelo de Verhulst, bifurcação.

**Abstract:** We consider two main models of population dynamics, model Verhulst and Malthus, in his continuous and discrete versions. We begin by finding the general solution and then determine the equilibrium points of these models and their stability. Furthermore, we show that there is no difference between the equilibrium points of the model of continuous and discrete Malthus and Verhulst model discrete two types of bifurcations occur that do not occur in the continuum.

**Keywords:** Difference equations, model of Malthus, Verhulst model, bifurcation.

## Introdução

Em nosso dia-a-dia é comum fenômenos que evoluem no tempo. Alguns exemplos que podem comprovar esse fato são: a reprodução das bactérias, juros simples, juros compostos, a taxa com que um determinado remédio é extraído do corpo de uma pessoa, o crescimento da população, etc. Notamos que o tempo  $t$  pode ser contínuo ou discreto, por exemplo, no caso dos juros, simples ou compostos, a variável  $t$  pode ser dias, meses ou anos, logo  $t$  é um inteiro positivo, já no crescimento da população o tempo é uma variável pertencente aos reais positivos. Desse modo, esta evolução pode ser descrita por equações diferenciais, se o tempo é contínuo, ou equações de diferenças, se o tempo é medido em intervalos discretos.

Muitas espécies não tem um aumento contínuo de gerações e o crescimento da população se dá em passos discretos, por exemplo, elas se propagam em épocas determinadas do ano. Nesses casos o crescimento populacional pode ser descrito de uma maneira mais precisa por um modelo discreto, em vez de contínuo.

Neste trabalho, o objetivo é reunir resultados, encontrados dispersos na literatura, que mostram diferenças que podem ocorrer entre modelos populacionais contínuos e discretos. Dois desses modelos são comparados, modelo populacional de Malthus e modelo populacional de Verhulst, em suas versões contínua e discreta, por meio de suas soluções. No modelo de Verhulst discreto acontecem dois tipos de bifurcações que não ocorrem na sua versão contínua. Por outro lado, não há diferença entre a solução do modelo de Malthus nas suas versões contínua e discreta.

---

<sup>†</sup>Autor correspondente: [ta\\_mara15@hotmail.com](mailto:ta_mara15@hotmail.com).

## Estabilidade

Vamos considerar equações de diferenças do tipo

$$y_{t+1} = f(y_t), \quad (1)$$

sendo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função linear ou não.

Nas aplicações de equações de diferenças uma solução representa alguma quantidade medida em intervalos de tempos iguais. Uma solução na qual os valores medidos não mudam com o tempo, isto é,  $y_{t+1} = y_t$ , para todo  $t \in \mathbb{N}$ , é chamada solução constante.

Assim, podemos interpretar soluções constantes de equações de diferenças como pontos fixos de funções, também chamados de pontos de equilíbrio.

**Definição.** (Ponto de equilíbrio) Um ponto  $y^*$ , pertencente ao domínio de  $f$ , é ponto de equilíbrio da equação (1) se  $f(y^*) = y^*$ .

Observemos que a definição de ponto de equilíbrio para a equação de diferença corresponde a fazer  $\frac{dy}{dt} = 0$ , no caso contínuo, em que  $\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t))$ .

Para determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio apresentamos o teorema seguinte.

**Definição.** Dizemos que o ponto de equilíbrio  $y^*$  de (1) é

1. Estável se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|y_0 - y^*| < \delta \implies |f^n(y_0) - y^*| < \varepsilon$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  
Caso contrário dizemos que  $x^*$  é instável.
2. Repulsor se existem  $\varepsilon > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < |y_0 - y^*| < \varepsilon \implies |f^{n+1}(y_0) - y^*| > |f^n(y_0) - y^*|$ , para todo  $n > n_0$ .
3. Assintoticamente estável se for estável e se existe  $\delta > 0$  tal que  $|y_0 - y^*| < \delta \implies \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$ .

**Teorema.** (Estabilidade do ponto de equilíbrio) Sejam  $y^*$  um ponto de equilíbrio da equação (1) e  $f \in C^3$ . As seguintes afirmações são verdadeiras.

1. Se  $|f'(y^*)| < 1$ , então  $y^*$  é um ponto assintoticamente estável.
2. Se  $|f'(y^*)| > 1$ , então  $y^*$  é instável (repulsor).
3. Se  $f'(y^*) = 1$ , então
  - (a)  $y^*$  é instável se  $f''(y^*) \neq 0$ .
  - (b)  $y^*$  é instável se  $f''(y^*) = 0$  e  $f'''(y^*) > 0$ .
  - (c)  $y^*$  é assintoticamente estável se  $f''(y^*) = 0$  e  $f'''(y^*) < 0$ .
4. Se  $f'(y^*) = -1$ , então
  - (a)  $y^*$  é assintoticamente estável se  $-2f'''(y^*) - 3[f''(y^*)]^2 < 0$ .
  - (b)  $y^*$  é instável se  $-2f'''(y^*) - 3[f''(y^*)]^2 > 0$ .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Luís (2006).

Uma outra definição importante no estudo da estabilidade são os pontos periódicos.

**Definição.** (Pontos periódicos) Sejam a equação (1) e  $b$  um ponto do domínio de  $f$ . Então

1.  $b$  é um ponto periódico de  $f$ , ou da equação (1), se existe um inteiro positivo  $k$  tal que  $f^k(b) = b$ . Portanto, um ponto é  $k$ -periódico, ou periódico de período  $k$ , se é um ponto fixo de  $f^k$ , ou seja, se é um ponto de equilíbrio da equação de diferenças

$$y_{t+1} = g(y_t),$$

sendo  $g = f^k$ .

A órbita periódica de  $b$ ,  $O(b) = \{b, f(b), f^2(b), \dots, f^{k-1}(b)\}$  é chamada um  $k$ -ciclo, ou órbita periódica de período  $k$ .

2.  $b$  é um ponto eventualmente  $k$ -periódico se para algum inteiro positivo  $m$ ,  $f^m(b)$  é um ponto  $k$ -periódico, ou seja,  $b$  é eventualmente  $k$ -periódico se  $f^{m+k}(b) = f^m(b)$ .

Para determinar a estabilidade dos pontos periódicos apresentamos o teorema seguinte.

**Definição.** Seja  $b$  um ponto  $k$ -periódico de  $f$ . Então  $b$  é

1. estável se é ponto fixo estável de  $f^k$ ;
2. assintoticamente estável se é um ponto fixo assintoticamente estável de  $f^k$ ;
3. instável se é um ponto fixo instável de  $f^k$ .

**Teorema.** (Estabilidade dos pontos periódicos) Sejam  $f$  uma função continuamente diferenciável e

$$O(b) = \{b = y_0, y_1 = f(y_0), y_2 = f^2(y_0), \dots, y_{k-1} = f^{k-1}(y_0)\}$$

um  $k$ -ciclo de  $f$ . Então o  $k$ -ciclo  $O(b)$  é

1. assintoticamente estável se  $|f'(y_0)f'(y_1) \dots f'(y_{k-1})| < 1$ ;
2. instável se  $|f'(y_0)f'(y_1) \dots f'(y_{k-1})| > 1$ .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Luís (2006).

## Bifurcação

Segundo Monteiro (2006) a ideia de bifurcação está intimamente ligada ao conceito de estabilidade estrutural. Apresentamos aqui dois tipos de bifurcação de codimensão um (depende de um parâmetro), a bifurcação transcítica e bifurcação flip ou de duplicação de período, pois elas aparecem no modelo de Verhulst discreto.

Consideremos a equação de diferenças

$$y_{t+1} = f_\mu(y_t), \tag{2}$$

sendo  $\mu \in \mathbb{R}$  um parâmetro e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Conforme o parâmetro  $\mu$  varia, a estabilidade dos pontos de equilíbrio ou órbitas periódicas podem ser alteradas e a aparição de uma nova solução em um determinado valor do parâmetro, e consequentemente a troca de estabilidade, é chamada de bifurcação.

A bifurcação transcítica ocorre quando dois pontos de equilíbrio existem para todos os valores de um parâmetro, porém suas estabilidades são trocadas quando o parâmetro passa por um determinado valor, chamado valor crítico.

A bifurcação de duplicação de período acontece quando uma órbita de período  $n$  estável torna-se instável no ponto de bifurcação  $\mu = \mu_c$ , e surge uma nova órbita estável de período  $2n$  para valores de  $\mu$  superiores a  $\mu_c$ .

## Modelo de Malthus contínuo

Segundo Bassanezzi (2002) a proposta de utilização da matemática para estabelecer um modelo para o crescimento de uma população humana começou com o economista inglês T. R. Malthus (An Essay on the Principle of Population, 1798). Malthus pensou em um modelo que não prevê fatores inibidores para o crescimento da população, dessa maneira, a população cresce seguindo uma progressão geométrica.

O modelo de Malthus supõe que a variação da população  $y$  é proporcional ao valor atual da população, ou seja,

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t), \quad (3)$$

sendo  $r$  a taxa de crescimento ou declínio, dependendo se  $r > 0$  ou  $r < 0$ .

A equação (3) pode ser facilmente resolvida utilizando o método das equações separáveis,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ry \\ \frac{1}{y} dy &= r dt \\ \ln |y| &= rt + c_1 \\ y &= c e^{rt} \end{aligned}$$

e dada uma condição inicial  $y(0) = y_0 > 0$ , temos  $y_0 = c e^{r \cdot 0}$ , ou seja,  $c = y_0$ . Portanto, a solução particular do modelo de Malthus é dada por,

$$y(t) = y_0 e^{rt}.$$

Vamos, a seguir, encontrar os pontos de equilíbrio, ou seja, soluções constantes; elas podem ser encontradas fazendo  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ . Dessa maneira,

$$y^* = 0.$$

Vamos observar o que acontece com o comportamento assintótico desse sistema. Notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} y_0 e^{rt} &= +\infty, \text{ se } r > 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y_0 e^{rt} &= 0, \text{ se } r < 0. \end{aligned}$$

Dessa maneira, independentemente da condição inicial  $y_0$ , o sistema explode quando  $r > 0$ , ou tende a  $y^* = 0$  se  $r < 0$ . Então concluímos que, a solução de equilíbrio do modelo de Malthus contínuo é estável para  $r < 0$  e instável para  $r > 0$ . Quando variamos  $r$  podemos mudar a estabilidade da solução de equilíbrio se  $r$  passar pelo valor crítico  $r = 0$ .

O gráfico 1 apresenta a solução geral para  $r > 0$  e  $r < 0$ , respectivamente. Notemos que os gráficos confirmaram a estabilidade da solução de equilíbrio, a qual determinamos instável quando  $r > 0$  e estável quando  $r < 0$ .

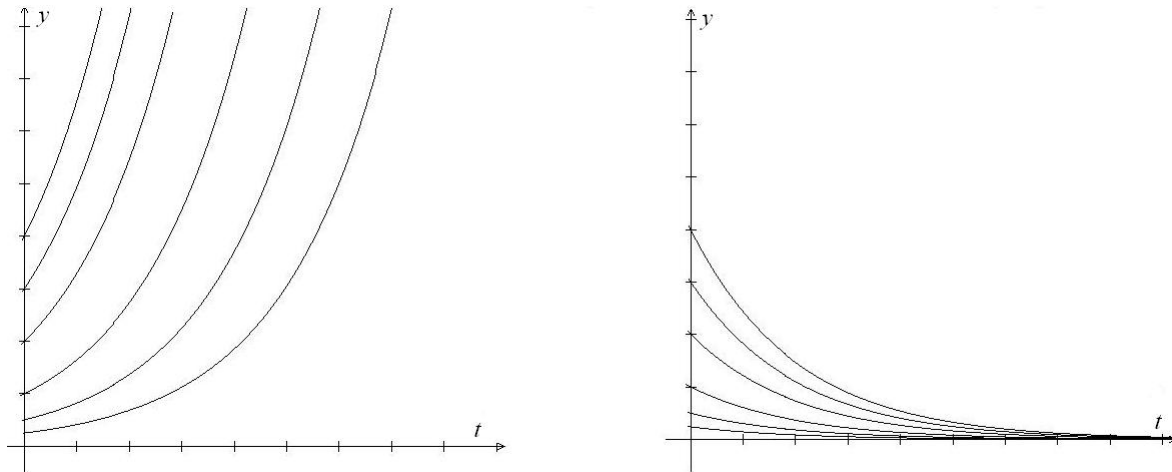


Figura 1: Soluções Modelo de Malthus para  $r > 0$  e  $r < 0$ , respectivamente

## Modelo de Malthus discreto

Vamos agora obter a versão discreta do modelo de Malthus e usamos  $\Delta y$  para indicar a variação no valor de  $y$  e analogamente,  $\Delta t$  representa a variação no valor de  $t$ .

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = ry(t)$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + ry(t)\Delta t.$$

Vamos simplificar a equação acima fazendo  $\Delta t = 1$ , então

$$y(t + 1) = y(t) + ry(t)$$

e fazendo  $\mu = 1 + r$  e  $y(t) = y_t$  temos

$$y_{t+1} = \mu y_t. \quad (4)$$

A equação (4) é o modelo populacional de Malthus em sua versão discreta. Faremos um estudo análogo ao que fizemos com o modelo em sua versão contínua.

A solução da equação de diferenças (4) pode ser facilmente encontrada por iteração. Obtemos

$$y_1 = \mu y_0$$

$$y_2 = \mu y_1 = \mu^2 y_0,$$

e, em geral,

$$y_t = \mu^t y_0 \quad (5)$$

Começemos por encontrar o ponto de equilíbrio,

$$\mu y^* = y^*$$

e portanto

$$y^* = 0, \quad (6)$$

estamos considerando  $\mu \neq 1$ , pois caso contrário  $r = 0$ .

Como  $f(y) = \mu y$ , observemos que  $f'(y^*) = \mu$  e pelo teorema estabilidade do ponto de equilíbrio, a solução de equilíbrio (6) é estável se  $|\mu| < 1$ , ou seja,  $-1 < \mu < 1$  e instável para  $|\mu| > 1$ , ou seja, para  $\mu > 1$  e  $\mu < -1$ .

Seguem abaixo os gráficos das soluções para  $\mu = 1.5$  e  $\mu = 0.8$ .

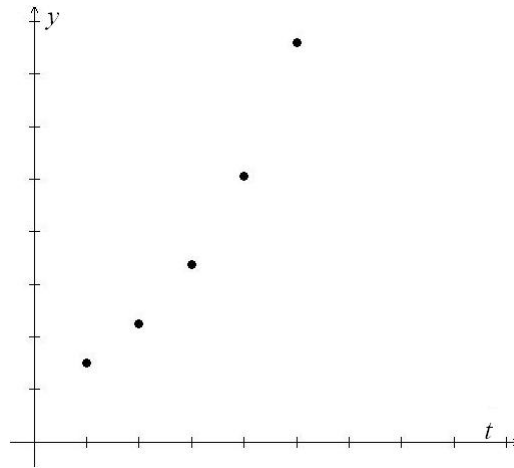


Figura 2: Solução do modelo de Malthus discreto para  $\mu = 1.5$

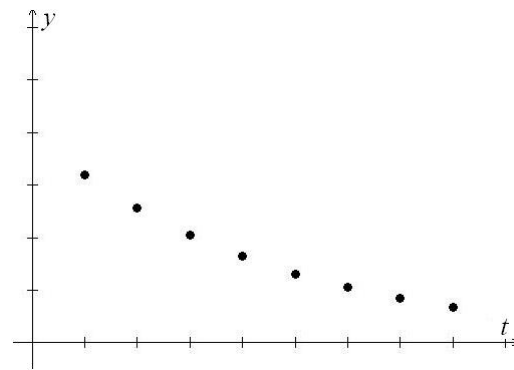


Figura 3: Solução do modelo de Malthus discreto para  $\mu = 0.8$

## Modelo de Verhulst contínuo

O modelo de Verhulst, proposto pelo sociólogo belga P.F. Verhulst, ao contrário do modelo de Malthus, prevê fatores inibidores no crescimento da população, dessa maneira, quando o tempo cresce a população tende a um valor limite.

Segundo Boyce (2002) para levar em consideração o fato de que a taxa de crescimento depende, realmente, da população, vamos substituir a constante  $r$  do modelo de Malthus por uma função  $h(y)$  tal que

- $h(y) \approx r > 0$  quando  $y$  for pequeno;
- $h(y)$  decresça quando  $y$  crescer;
- $h(y) < 0$  quando  $y$  for suficientemente grande.

A função mais simples que satisfaz essas propriedades é  $h(y) = r - ay$ , sendo  $a$  uma constante

positiva, então

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= h(y)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= (r - ay(t))y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= r \left(1 - \frac{y(t)}{a}\right) y(t),\end{aligned}$$

fazendo  $k = \frac{r}{a}$ , temos

$$\frac{dy(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{y(t)}{k}\right) y(t) \quad (7)$$

essa equação é conhecida como a equação de Verhulst.

Com o intuito de facilitar nossa análise dos pontos de equilíbrio vamos fazer a seguinte transformação,  $x = \frac{y}{k}$ ,

$$\frac{d(kx(t))}{dt} = r(1 - x(t))kx(t)$$

e, portanto

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(1 - x(t))x(t). \quad (8)$$

A equação (8) pode ser facilmente resolvida dada uma condição inicial  $x(0) = x_0 > 0$ . Segue a solução,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= r(1 - x)x \\ \frac{1}{(1 - x)x} dx &= r dt,\end{aligned}$$

para solucionar  $\int \frac{1}{(1-x)x} dx$ , vamos utilizar frações parciais,

$$\frac{1}{(1 - x)x} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{x} = \frac{Ax + B(1 - x)}{(1 - x)x},$$

e portanto  $B = 1$  e  $A = 1$ . Então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1 - x)x} dx &= \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{x}\right) dx = r dt \\ -\ln|1 - x| + \ln|x| &= rt + c_1 \\ \frac{x}{1 - x} &= c e^{rt},\end{aligned}$$

sendo  $c = \frac{x_0}{1 - x_0}$  e assim,

$$\begin{aligned}\frac{x}{1 - x} &= \frac{x_0}{1 - x_0} e^{rt} \\ x + \frac{x_0}{1 - x_0} e^{rt} x &= \frac{x_0}{1 - x_0} e^{rt} \\ x &= \frac{x_0 e^{rt}}{1 - x_0 + x_0 e^{rt}},\end{aligned}$$

portanto a solução particular do modelo de Verhulst contínuo é,

$$x(t) = \frac{x_0}{(1 - x_0)e^{-rt} + x_0}. \quad (9)$$

A seguir encontramos as soluções de equilíbrio fazendo  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ ,

$$\begin{aligned} rx - rx^2 &= 0 \\ x_1 = 0 \text{ e } x_2 &= 1, \end{aligned}$$

pois estamos considerando  $r \neq 0$ .

Agora, vamos observar o que acontece com o comportamento assintótico dessa solução. Notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_0}{(1-x_0)e^{-rt} + x_0} &= 1, \text{ se } r > 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_0}{(1-x_0)e^{-rt} + x_0} &= 0, \text{ se } r < 0 \end{aligned}$$

Dessa maneira, independentemente da condição inicial  $x_0$ , quando  $r > 0$  o sistema tende para a solução de equilíbrio  $x_2 = 1$  e se  $r < 0$  o sistema tende para a solução de equilíbrio  $x_1 = 0$ . Então para  $r > 0$ ,  $x_1 = 0$  é instável e  $x_2 = 1$  é estável e para  $r < 0$ ,  $x_1 = 0$  é estável e  $x_2 = 1$  é instável.

O gráfico 4 mostra as soluções para  $r > 0$  e  $r < 0$ , respectivamente.

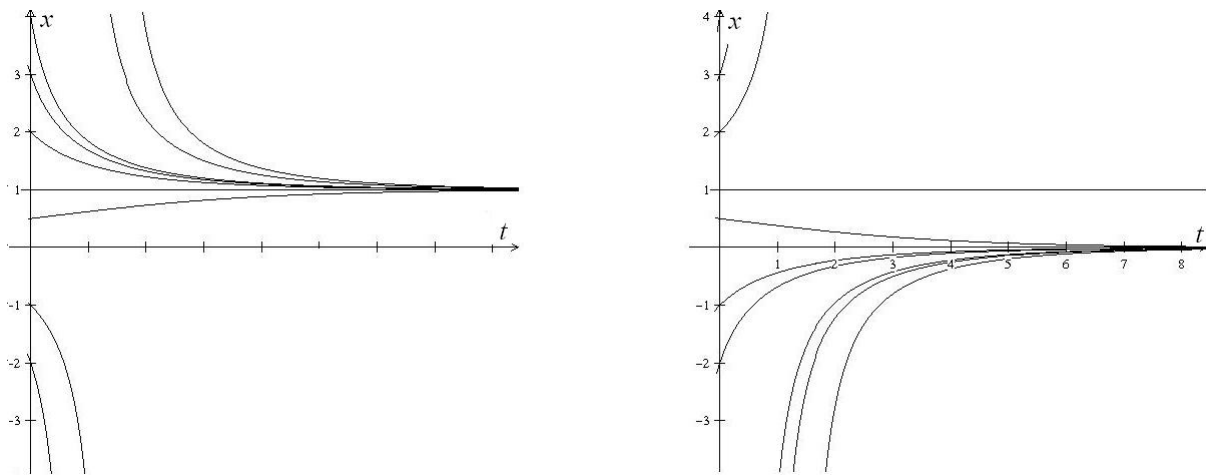


Figura 4: Soluções Modelo de Verhulst para  $r > 0$  e  $r < 0$ , respectivamente

## Modelo de Verhulst discreto

Abaixo segue a obtenção da versão discreta do modelo de Verhulst, segundo Rizzo Jr.(2006)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = r \left( 1 - \frac{y(t)}{k} \right) y(t) \\ \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} &= ry(t) - \frac{ry^2(t)}{k} \\ y(t + \Delta t) &= y(t) + ry(t)\Delta t - r\frac{y^2(t)}{k}\Delta t \end{aligned}$$

Vamos simplificar essa igualdade para isso, tomaremos  $\Delta t = 1$  e  $y(t) = \beta x(t)$ . A constante  $\beta$  será determinada de modo a simplificar a igualdade. Dessa maneira obtemos



$$y(t+1) = y(t) + ry(t) - r \frac{y^2(t)}{k}$$

$$\beta x(t+1) = (r+1)\beta x(t) - r \frac{\beta^2 x^2(t)}{k}.$$

Como  $\beta$  é uma constante arbitrária podemos defini-la de modo a simplificar ainda mais a igualdade, para isto igualaremos os coeficientes, ou seja,  $(r+1)\beta = \frac{r}{k}\beta^2$ . Então obtemos  $\beta = \frac{k(r+1)}{r}$  e assim

$$\frac{k(r+1)}{r}x(t+1) = (r+1)\frac{k(r+1)}{r}x(t) - r \frac{(\frac{k(r+1)}{r})^2 x^2(t)}{k}$$

$$x(t+1) = (r+1)(x(t) - x^2(t)).$$

Para finalizar a simplificação faremos  $r+1 = \mu$  e voltaremos com a notação de índice para uma equação de diferenças

$$x_{t+1} = \mu(x_t - x_t^2) \quad (10)$$

A equação (10) é o modelo populacional de Verhulst em sua versão discreta. De maneira análoga ao que fizemos no caso contínuo, vamos encontrar os pontos de equilíbrio

$$\mu x^* - \mu(x^*)^2 = x^*$$

$$(\mu - 1 - \mu x^*)x^* = 0$$

$$x_1^* = 0 \text{ e } x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

Agora pelo teorema estabilidade do ponto de equilíbrio, vamos determinar quando os pontos de equilíbrio são estáveis. Como  $f(x) = \mu x(1-x)$  temos que

$$f'(x) = \mu - 2\mu x.$$

$$(i) x_1^* = 0$$

Temos que  $f'(x_1^*) = f'(0) = \mu$ , então  $x_1^*$  é assintoticamente estável se  $|\mu| < 1$ , ou seja,  $-1 < \mu < 1$ .

E instável se  $|\mu| > 1$ , ou seja  $\mu > 1$  e  $\mu < -1$ .

$$(ii) x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$$

Temos que

$$f'(x_2^*) = \mu - 2\mu \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$$

$$= -\mu + 2,$$

e  $x_2^*$  é assintoticamente estável se

$$|-\mu + 2| < 1 \Leftrightarrow 1 < \mu < 3.$$

E instável se

$$|-\mu + 2| > 1 \Leftrightarrow \mu < 1 \text{ ou } \mu > 3.$$

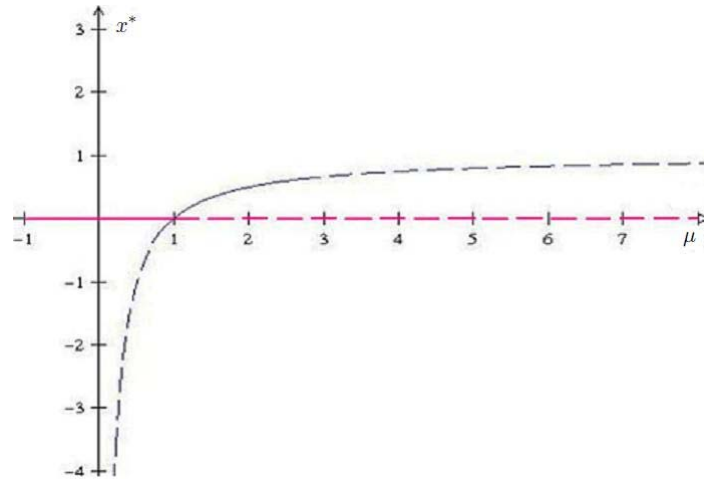


Figura 5: Digrama de bifurcação

Portanto, no ponto  $\mu_c = 1$  ocorre uma bifurcação transcritical. A Figura 5 mostra o diagrama de bifurcação.

Para  $\mu > 3$  os dois pontos de equilíbrio são instáveis e surge uma órbita periódica de período 2. Para encontrarmos essa órbita precisamos determinar os pontos fixos de  $f^2$ , ou seja, fazer  $f^2(x) = x$ ,

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \mu(\mu x(1-x))(1-\mu x(1-x)) = x \\ \mu^2 x - \mu^3 x^2 + \mu^3 x^3 - \mu^2 x^2 + \mu^3 x^3 - \mu^3 x^4 &= x \\ -\mu^3 x^4 + 2\mu^3 x^3 - (\mu^3 + \mu^2)x^2 + (\mu^2 - 1)x &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

A equação (11) possui quatro raízes, sendo que duas são os pontos fixos de  $f$ , pois se  $f(x) = x$  então  $f^2(x) = f(x) = x$ , e as outras duas raízes formam a órbita periódica.

Como 0 e  $\frac{\mu-1}{\mu}$  são raízes de (11) vamos dividi-la por  $x$  e  $x - \frac{\mu-1}{\mu} = \frac{\mu x - \mu + 1}{\mu}$ , então

$$\begin{aligned} &\frac{-\mu^3 x^4 + 2\mu^3 x^3 - (\mu^3 + \mu^2)x^2 + (\mu^2 - 1)x}{x} \\ &= -\mu^3 x^3 + 2\mu^3 x^2 - (\mu^3 + \mu^2)x + (\mu^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Dividindo por  $\frac{\mu x - \mu + 1}{\mu}$  obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{-\mu^3 x^3 + 2\mu^3 x^2 - (\mu^3 + \mu^2)x + (\mu^2 - 1)}{\frac{\mu x - \mu + 1}{\mu}} \\ &= \frac{-\mu^3 x^3 + 2\mu^3 x^2 - (\mu^3 + \mu^2)x + (\mu^2 - 1)}{\mu x - \mu + 1} = 0. \end{aligned}$$

e portanto,

$$-\mu^2 x^2 + (\mu^2 + \mu)x - (\mu + 1) = 0.$$

Encontrando as raízes,

$$\begin{aligned} \Delta &= (\mu^2 + \mu)^2 - 4(-\mu^2)(-\mu - 1) \\ &= \mu^4 - 2\mu^3 - 3\mu^2 \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(\mu^2 + \mu) \pm \sqrt{\mu^4 - 2\mu^3 - 3\mu^2}}{-2\mu^2} \\ &= \frac{(\mu + 1) \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}, \end{aligned}$$

portanto o ciclo de período 2 é formado pelos pontos

$$x_0 = \frac{(\mu + 1) - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$$

e

$$x_1 = \frac{(\mu + 1) + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}.$$

Esse 2-ciclo  $\{x_0, x_1\}$  existe para  $\mu > 3$ , já que  $\sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)} \in \mathbb{R}$  se  $\mu \geq 3$ , porém, para  $\mu = 3$  temos  $x_0 = x_1$ .

Agora, vamos estudar a estabilidade dessa órbita de período 2 e pelo teorema estabilidade dos pontos periódicos devemos calcular  $|f'(x_0)f'(x_1)|$ .

Como  $f(x) = \mu x(1 - x) = \mu x - \mu x^2$ , temos que

$$f'(x) = \mu - 2\mu x$$

e portanto,

$$f'(x_0) = \mu - 2\mu \left( \frac{(\mu + 1) - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu} \right) = -1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}$$

e

$$f'(x_1) = \mu - 2\mu \left( \frac{(\mu + 1) + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu} \right) = -1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}.$$

Então,

$$\begin{aligned} |f'(x_0)f'(x_1)| &= |[-1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}][ -1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}]| \\ &= |1 - (\mu + 1)(\mu - 3)| \\ &= |-\mu^2 + 2\mu + 4|. \end{aligned}$$

(i) assintoticamente estável

$$\begin{aligned} |f'(x_0)f'(x_1)| < 1 &\iff |-\mu^2 + 2\mu + 4| < 1 \\ &\iff -1 < -\mu^2 + 2\mu + 4 < 1. \end{aligned}$$

Vamos resolver  $-\mu^2 + 2\mu + 4 > -1$ , ou seja,  $-\mu^2 + 2\mu + 5 > 0$ ,

$$\mu = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{-2}$$

então

$$\mu_1 = 1 + \sqrt{6} \text{ e } \mu_2 = 1 - \sqrt{6}.$$

temos que  $-\mu^2 + 2\mu + 4 > -1$  em  $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$ , pois o gráfico de  $-\mu^2 + 2\mu + 5$  é uma parábola com concavidade para baixo ( $a < 0$ ).

Agora vamos resolver  $-\mu^2 + 2\mu + 4 < 1$ , ou seja,  $-\mu^2 + 2\mu + 3 < 0$ ,

$$\mu = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

então

$$\mu_1 = 3 \text{ e } \mu_2 = -1.$$

Então  $-\mu^2 + 2\mu + 4 < 1$  em  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} |f'(x_0)f'(x_1)| < 1 &\iff |-\mu^2 + 2\mu + 4| < 1 \\ &\iff \mu \in ((-\infty, -1) \cup (3, +\infty)) \cap ((1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})) \\ &\iff \mu \in (3, 1 + \sqrt{6}), \end{aligned}$$

pois estamos considerando  $\mu > 3$ .

Assim o 2-ciclo é assintoticamente estável se  $\mu \in (3, 1 + \sqrt{6})$ .

(ii) instável

$$\begin{aligned} |f'(x_0)f'(x_1)| > 1 &\iff |-\mu^2 + 2\mu + 4| > 1 \\ &\iff -\mu^2 + 2\mu + 5 < 0 \text{ ou } -\mu^2 + 2\mu + 3 > 0. \end{aligned}$$

Pelo que já fizemos acima temos que  $-\mu^2 + 2\mu + 3 > 0$  quando  $\mu \in (-1, 3)$  e  $-\mu^2 + 2\mu + 5 < 0$  quando  $\mu \in (-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$ .

Como já vimos que o 2-ciclo só existe para  $\mu > 3$  temos que ele é instável para  $\mu \in (1 + \sqrt{6}, +\infty)$ .

Portanto para  $\mu > 3$  ocorre uma bifurcação de duplicação de período. Na Figura 6 temos o diagrama de bifurcação de duplicação de período.

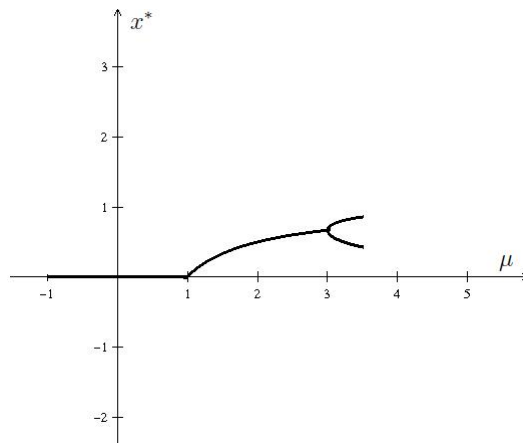


Figura 6: Diagrama de bifurcação

## Conclusão

Com este trabalho ficou claro que as soluções do Modelo de Malthus contínuo e discreto não se diferenciam muito, já no modelo de Verhulst discreto acontece bifurcações o que não ocorre no contínuo. Uma sugestão para um trabalho futuro seria estudar os tipos de bifurcação que podem acontecer em equações de diferenças como bifurcação sela-nó, bifurcação de forquilha e bifurcação de Neimark-Sacker.

## Referências

- BASSANEZZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- LUÍS, R. D. G. *Equações de diferenças e aplicações*. Funchal, 2006. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática e Engenharias, Universidade da Madeira.
- MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- RIZZO Jr., G. *Segmentação e detecção de simetria em imagens via redes de mapas acoplados*. São Paulo, 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, Universidade de São Paulo.