Descobrindo o número π com geometria dinâmica

José Carlos de Souza Júnior[1†], *Andréa Cardoso*[1], *Marcelo M. A. Dias*[2]

[1] *Professor do Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas.*
[2] *Graduando em Matemática Licenciatura, Universidade Federal de Alfenas.*

Resumo: *Estudantes do ensino médio tem uma visão bastante restrita do número π. Este trabalho tem como objetivo apresentar os resultados de uma sequência didática aplicada a estudantes do primeiro ano do ensino médio de uma escola estadual, cujo foco central foi desenvolver atividades potencialmente motivadoras para a compreensão do número π, através da razão entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro, visando o reconhecimento de sua importância histórica, sua aplicabilidade e a classificação deste número como um irracional, através da experimentação e visualização do método de Arquimedes para aproximação do comprimento da circunferência por perímetros de polígonos utilizando programas de geometria dinâmica.*

Palavras-chave: Tecnologia no ensino, ensino de matemática, objetos de aprendizagem.

Abstract: *High school students have a limited idea about the number π. This paper aims to present the results of a didactic sequence applied to students in the first year of high school from a public school, whose central focus was to develop activities potentially motivating for understanding the number π through the ratio of the perimeter of the circumference and its diameter, seeking recognition of its historical importance, its applicability and classification of this as an irrational number, through experimentation and visualization of the Archimedes method for approximating the length of the circumference perimeters of polygons by using dynamic geometry software.*

Keywords: Technology in teaching, math teaching, learning objects.

Introdução

A circunferência é uma das curvas mais simples que se conhece, inúmeros povos da antiguidade reconheceram a constância da razão entre o comprimento e o diâmetro desta curva. De acordo com Palis (1989) "no espaço euclidiano, a razão entre a medida de comprimento do perímetro de uma circunferência e a medida de comprimento do respectivo diâmetro é constante e esta constante é denominada π". Apesar de antiga, esta constante matemática ainda sucinta interesse e pesquisas em diversas áreas, tais como: Engenharia, Topografia, Eletricidade, Mecânica, Estatística, Música, entre outras.

É frequente o aparecimento do número π tanto na resolução de problemas matemáticos, como áreas e volumes de figuras geométricas que envolvem algum tipo de circularidade e esfericidade, como também na modelagem de diversos tipos de situações, como os movimentos periódicos e o funcionamento de máquinas e engrenagens.

A pesquisa sobre o número π está alicerçada no espírito explorador do ser humano e desvendar seus mistérios é ir além do estudo da matemática e sua história, é também viajar pela história da civilização em busca dos problemas que envolviam o π, as limitações e descobertas relativas às suas características. O conceito deste número foi discutido por muitos povos, durante muitos séculos e definido de várias maneiras.

[†] *Autor correspondente:* jose.souza@unifal-mg.edu.br.

O estudo do número π é uma questão relevante para o ensino de matemática, uma vez que pode suscitar a discussão de erros, crises e controvérsias no processo de criação e descoberta em matemática. O estudo deste tema específico é capaz de gerar repercussões didáticas que podem levar a outra maneira de ver e fazer matemática. Neste contexto,

> A aprendizagem pode ser vista como um processo de construção e reconstrução do conhecimento, tal processo não pode ser concluído com sucesso assimilando-se simplesmente ideias já constituídas e acabadas, mas sim pela constante criação de novas organizações estruturais que permitam novas maneiras de se compreender e atuar sobre a realidade. Neste ponto de vista o certo e o errado cedem lugar a uma enorme diversidade de soluções, umas sensivelmente provisórias e outras mais elaboradas; e a ferramenta computacional funciona como um meio didático pela facilidade de manuseio, e por isto mesmo, permite que o aluno encontre seu próprio caminho na construção do conhecimento, cabendo ao professor a tarefa de acompanhar e orientar o aprendiz, interferindo no momento mais adequado. (CARDOSO; SOUZA JÚNIOR, 2011.)

No quarto ciclo do ensino fundamental, são estudadas as fórmulas $C = 2\pi r$, para o cálculo do perímetro de uma circunferência de raio r, e $A = \pi r^2$, para o cálculo da área de um círculo. Neste momento, os estudantes experimentam seu primeiro contato com o número π. Entretanto, já no ensino médio, o conhecimento que eles têm sobre o número π restringe-se a atribuir-lhe o valor de 3,14, muitas vezes sem sequer relacioná-lo ao comprimento da circunferência.

Bortoletto (2008) analisou cinquenta e seis coleções didáticas destinadas ao ensino fundamental para investigar como o número π tem sido apresentado formalmente nos livros didáticos. Concluiu que dos 56 livros analisados 23 % dedicam algum espaço para contar a sua história do número π e que apenas 3,6% destacam a maneira como Arquimedes desenvolveu suas idéias e como chegou a um valor aproximado do número. Anteriormente à implantação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), em 1985, apenas três livros utilizam a história para o ensino do número π e o fazem como observação, curiosidade ou lembrete. Após 1995, com a recomendação explícita do PNLD para inserção da história no ensino de matemática, há um aumento significativo da abordagem histórica em relação a esta constante, entretanto em sua maioria, são apenas informações factuais e cronológicas, insuficientes para o entendimento e para a reconstrução dos conceitos matemáticos envolvidos.

A partir da análise do material didático utilizado, é possível inferir como os professores de matemática definem e ensinam o número π, muitas vezes ignorando o fascínio deste número para a motivação dos aprendizes e, a possibilidade de introduzir atividades de investigação que levem a compreensão, identificação e reconhecimento deste como um número irracional especial.

Em geral, o professor de matemática, quer por tradição ou formação, até mesmo segundo as concepções e metodologias veiculadas no material didático disponível, tem preferências assumidas com aulas expositivas essencialmente discursivas. Assim, é salutar uma mudança na postura didática do professor de matemática, apontando a presença da matemática como um recurso assumido, explícita ou implicitamente, pela sociedade, pois conforme concluiu Skovsmose (2001), a matemática está formatando essa sociedade.

Entretanto, há evidente carência de material complementar ao livro didático de matemática básica que priorizem o processo de aprendizagem. Neste processo, importante papel é reservado aos recursos computacionais que, se bem utilizados, podem oferecer novas oportunidades para conexões, abrindo novas possibilidades de reflexão por parte dos alunos.

De acordo com a demanda da escola pública parceira do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), foi planejada e aplicada uma oficina abordando o tema número π com foco central no desenvolvimento histórico, reconstrução dos conceitos envolvidos mediado pelo computador. Programas de geometria dinâmica foram utilizados para a elaboração de objetos de aprendizagem (OA)[1] objetivando a experimentação e exploração como parte das atividades da intervenção pedagógica.

O objetivo deste trabalho é apresentar os resultados de uma sequência didática que busca proporcionar aos estudantes do ensino médio compreensão mais significativa do número π, como a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Introduzir atividades de investigação com material concreto e aplicativos computacionais, de forma a levar o aluno ao reconhecimento da importância histórica e a aplicabilidade do número π, bem como classificá-lo como um número irracional.

Contextualização histórica

Atualmente a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência é representada internacionalmente pela letra π, letra inicial da palavra grega *peripheria* que significa perímetro ou circunferência. Essa definição utilizada desde o século XVIII baseia-se no fato de ser constante o quociente entre o comprimento C de uma circunferência e o seu diâmetro D, o que permite escrever $\pi = \frac{C}{D}$. Hoje, sabe-se que o número π é irracional, isto é, nenhuma fração ordinária pode exprimir exatamente o seu valor, e que 3,1416 é um valor aproximado utilizado em muitas aplicações práticas, já que quatro casas decimais aproximadas são suficientes para se projetar o motor mais potente.

Não se sabe ao certo como geômetras da antiguidade chegaram a essa conclusão, mas certamente o interesse pelo número π originou-se na busca de soluções de problemas de determinação de áreas. Também na constatação empírica de que duplicando, por exemplo, o diâmetro de uma circunferência, o seu perímetro também duplica. Dessa forma, concluíram que a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência é constante, qualquer que seja o seu raio. Muito mais pertencente ao cotidiano das pessoas, são problemas requerendo encontrar a área de uma figura circular em termos do seu diâmetro e, a partir disso, ao estudarem esses problemas perceberam a existência desse número. Segundo Eves (2008), a questão estava intimamente ligada, desde a antiguidade, ao célebre problema da quadratura do círculo, isto é, se seria possível construir um quadrado com área igual à de um círculo dado. Assim explica-se a grande preocupação de calcular π com cada vez mais decimais, procurando uma lei da qual resultasse numa dízima que teimosamente não se conseguia encontrar. De acordo com Lima (1985), uma maneira mais rápida de explicar o número π é dizer que ele é a área de um círculo de raio 1, assim a área do círculo de raio 1 cm é π cm^2. A procura do valor exato do número π ocupou matemáticos por séculos.

Os mais antigos documentos concretos que tratam explicitamente do número π são as tabuletas da Mesopotâmia datadas de cerca de 2000 a.C. A bíblia faz referência ao número π no Primeiro Livro dos Reis, capítulo 7, versículo 23: "Fez mais o mar de fundição, de dez côvados, de uma borda até à outra borda, redondo ao redor, e de cinco côvados ao alto; e um cordão de trinta côvados o cingia, em redor." O côvado era uma unidade de medida de comprimento utilizada por vários povos antigos, representava o comprimento do antebraço, da ponta do dedo médio até o cotovelo. Neste trecho do velho testamento, relata-se no tempo do rei Salomão, a construção de um mar de fundição de formato circular com 30 côvados de comprimento e 10 côvados de diâmetro. Portanto, de acordo este texto escrito com base na tradição judaica antiga, para este povo o valor utilizado do número π era 3.

Os egípcios também estudaram o valor da divisão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro. Para chegarem ao valor de π expresso por $3\frac{1}{6}$, que é aproximadamente $3,16$, os egípcios há 3.500 anos partiram de um quadrado inscrito em uma circunferência, cujo lado media 9 unidades. Dobraram os lados do quadrado para obter um polígono de 8 lados e calcularam a razão entre os perímetros dos octógonos inscrito e circunscrito e o diâmetro da

[1]Entende-se por OA todo e qualquer recurso digital dinâmico e interativo que contribua para o aprendizado.

circunferência. Os egípcios conseguiram uma aproximação melhor do que "o comprimento de qualquer circunferência era o triplo de seu diâmetro".

Já os gregos, na pessoa do grande inventor e matemático da antiguidade Arquimedes, conseguiram concluir que o número π estava em um intervalo entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$. Foi Arquimedes, no século II a.C., que encontrou um método efetivo para obter a constante de proporcionalidade utilizando polígonos inscritos e circunscritos à circunferência.

O método de Arquimedes consistia em inscrever um polígono regular no círculo de raio 1 e ir dobrando o número de lados. Ele sabia calcular o lado do polígono de $2n$ lados a partir do polígono de n lados. Assim, começando com o triângulo equilátero, de duplicação em duplicação, conseguiu calcular o lado l de um polígono de 96 lados. O perímetro $96l$ era uma boa aproximação inferior para o comprimento 2π da circunferência em questão, logo $48l$ era uma boa aproximação por falta para o valor de π. De modo semelhante, trabalhando com polígonos circunscritos, obteve uma boa aproximação por excesso de π. Conforme ressalta Frid (2007) o método proposto por Arquimedes deixa evidente que sempre é possível fazer aproximações melhores.

Mesmo havendo suspeitas de que o número π fosse irracional, foi somente em meados do século XVIII que este fato se confirmou. Mais cem anos foram necessários para que o último segredo a respeito do número π fosse revelado, a transcendência do π, esclarecendo definitivamente o problema da quadratura do círculo.

O desenvolvimento tecnológico, cujo elemento central é o computador, tem proporcionado o aumento significativo do número de casas decimais aproximadas para π. Em agosto de 2010, por exemplo, um engenheiro de informática calculou π com 5 trilhões de casas decimais superando o recorde anterior de 2,7 trilhões de dígitos. Segundo Eves (2008) não há objetivo prático em se conhecer muitas casas decimais para a constante, já que não há valor científico além das primeiras casas decimais. Entretanto, o conhecimento de trilhões de casas decimais é utilizado em algoritmos de aproximação para testarem a velocidade de processamento e a capacidade de armazenamento de computadores.

Números irracionais e Ensino de Matemática

Costa (1980) relata que os números racionais são da forma $x = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e b é não nulo. Isto significa que o número racional x é solução da equação do primeiro grau $bx = a$, cujos coeficientes b e a são inteiros. No entanto, existem muitos números reais que não são racionais e por isso são chamados de irracionais. Dentre estes, alguns são relativamente simples, como por exemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$[2], $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, dentre outros. Estes números são soluções das equações $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 6 = 0$, $x^3 - 4 = 0$, $3x^2 - 2 = 0$, respectivamente.

Por essa razão eles são chamados de *irracionais algébricos*. Um número é dito algébrico se é um número real que satisfaz alguma equação da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

com coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ inteiros.

Mesmo havendo suspeitas de que o número π fosse irracional, apenas em 1766 Lambert demonstra que π não pode ser escrito na forma de fração entre números inteiros, ou seja, possui uma expansão decimal infinita não periódica. Segundo Frid (2007), a primeira demonstração de que π é irracional obtida por Lambert, não é completamente rigorosa, tendo sido (re)obtida de modo rigoroso por Legendre e publicada em 1855.

Nem todos os números irracionais são algébricos. Os números reais que não são raízes de equações do tipo (1) como acima, são chamados de irracionais transcendentes. Lindemann em 1882 demonstra que π é um número transcendente, esclarecendo definitivamente o problema da quadratura do círculo.

[2] $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ foram descobertos, segundo Eves (2008), pelos pitagóricos no século III a.C.

Figueiredo (2002) apresenta uma exposição sobre a irracionalidade de certos números reais, a construção de alguns números transcendentes e a transcendência dos números e e π, dentre outros. O autor afirma que este é um campo em que os problemas têm enunciados, quase sempre, de fácil compreensão, mas alguns deles, surpreendentemente, exigem técnicas mais elaboradas em suas soluções.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), é inadequado um tratamento formal do conceito de número irracional no quarto ciclo, devido a inexistência de modelos materiais que exemplifiquem os irracionais, o que contribui para as dificuldades na aprendizagem deste tipo de número. Já os PCN+ para o ensino médio (BRASIL, 2002) orientam, em linhas gerais, que o ensino do bloco números e operações deve ser aprofundado em conexão com outros conceitos.

A verificação da irracionalidade de π é complicada para o ensino básico, visto que no trabalho com medição de grandezas estão envolvidos somente números racionais, o que pode constituir-se num obstáculo à aprendizagem. Por outro lado, a apresentação de situações de aprendizagem apropriadas, onde seja possível a experimentação e visualização de aproximações sucessivas do valor de π utilizando calculadoras e computadores, podem suscitar nos estudantes compreensão da existência e da necessidade dos números irracionais.

Recursos computacionais para visualização e experimentação

Cada vez mais o computador e a internet estão sendo incorporados ao cotidiano das pessoas. Eles são utilizados por jovens e crianças de forma natural para interagir, formando redes sociais, pesquisar, obter informações e para entretenimento. Contudo ainda é tímida a utilização do computador pelo professor como um recurso de ensino.

De acordo com Cardoso (2012) muitos docentes ainda revelam dificuldades, não em utilizar o computador, mas em reconhecer nele um novo e poderoso recurso para ensinar. Entende-se que a concepção do professor que faz bom uso dos recursos didáticos disponíveis é o que determina o direcionamento da aula para a construção de conhecimentos, estabelecendo relações entre o saber a ser ensinado e a construção desses saberes pelo aluno.

Atualmente, os professores têm gratuitamente a disposição OAs em repositórios específicos, Rocha et al. (2011) faz a análise e classificação dos principais repositórios. Os OAs são desenvolvidos com finalidade educacional podendo ser reutilizados em diferentes ambientes de aprendizagem e diversas modalidades de ensino. Os OAs podem ser disponibilizados como *applets*, que são programas interativos que podem ser executados em qualquer browser.

A utilização da tecnologia como apoio ao trabalho docente contribui significativamente no processo de construção do conhecimento, considerando que o aprender segundo Versuti (2004) é um processo ativo e dinâmico, no qual os atores organizam novas informações, utilizando o pensamento crítico e criativo, sendo estimulados por tarefas desafiadoras e relevantes, a partir de um contexto que envolva o conhecimento de conceitos do cotidiano e que precede uma situação de aprendizagem.

Há a disposição na web grande quantidade de textos, hipertextos, animações, vídeos, softwares educacionais e tutoriais. Se, por um lado, a utilização dos recursos digitais pressupõe do professor a capacidade de saber o que está disponível, manter-se atualizado e fazer escolhas. Por outro, ainda há poucos OA especialmente desenvolvido para para a aprendizagem de conteúdos específicos, segundo a metodologia da visualização e experimentação. Assim é preciso que o docente em exercício ou em formação, seja capacitado para a produção e compartilhamento de seu próprio material. Particularmente, a utilização de programas de Geometria Dinâmica (GD) permite realizar investigações sobre propriedades geométricas que dificilmente poderiam ser realizadas sem esse recurso, de forma a compreender mais facilmente resultados matemáticos e fazer conjecturas. Alguns desses aplicativos permitem a exportação do resultado das construções no formato de *applets*, sem necessidade de execução do programa, apenas conexão com a internet.

Assim, as atividades propostas podem ser desenvolvidas em laboratórios de informática das escolas sem necessidade de instalação, bem como pode ser disponibilizado aos estudantes para executarem estudos e atividades extraclasse.

O termo geometria dinâmica foi cunhado para designar programas interativos de criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades, que possibilitam fazer construções geométricas rápidas e precisas além de permitir a manipulação dos objetos construídos preservando as características inerentes definidas em sua construção. A característica fundamental deste tipo de programa é a atualização automática de valores, possibilitando a percepção de padrões e invariâncias. Os caminhos que podem ser trilhados no uso do computador e de programas de GD para o ensino de matemática podem ser resumidos nas seguintes etapas:

visualizar $\hookrightarrow$ experimentar $\rightarrow$ induzir $\hookrightarrow$ conjecturar $\rightarrow$ generalizar $\rightarrow$ demonstrar

Sendo que a última etapa deve ser almejada quando possível e adequada ao nível e necessidades específicas dos alunos.

A escolha do software utilizado como apoio ao aprendizado deve ser criteriosa e atender a alguns requisitos primordiais: fácil de aprender, fácil de usar, flexível, tenha funções matemáticas e gráficas, com comandos e documentação em português e baixo custo, de preferência um software livre para que o aprendiz possa utilizá-lo livremente onde desejar.

Neste trabalho, utilizamos o programa de GD GeoGebra[3]. O GeoGebra é um software livre que reúne geometria, álgebra e cálculo. Por um lado, o GeoGebra é um sistema de geometria dinâmica que permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas e funções que podem ser modificados dinamicamente. Por outro lado, pode-se inserir equações e coordenadas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a potência de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos; permite determinar derivadas e integrais de funções, além de oferecer um conjunto de comandos próprios da análise matemática, para identificar pontos singulares de uma função, como raízes e extremos.

Frente a necessidade de criação, compartilhamento e utilização de OAs, e reconhecendo que o processo é mais importante que o produto, esta secção apresenta um roteiro detalhado para construção de um OA para a estimar o valor do número π utilizando o método desenvolvido por Arquimedes. Espera-se possibilitar a reprodução do mesmo e capacitar para o uso do GeoGebra na criação de novos applets e animações para o ensino de matemática.

A versão utilizada nesta atividade é a 4.0.37.0. Além da barra de ferramentas e menu, a tela inicial do aplicativo é composta por três campos: a janela gráfica, o campo para entrada de comandos e a janela de álgebra, conforme apresentado na Figura 1. A janela gráfica do GeoGebra é como uma folha de caderno de desenho, na qual é possível construir objetos geométricos e interagir com eles, através da manipulação dinâmica. A janela de álgebra exibe todos os objetos construídos e suas equações ou coordenadas. A entrada de comandos permite a realização de cálculos e construções de objetos diretamente a partir de equações ou coordenadas.

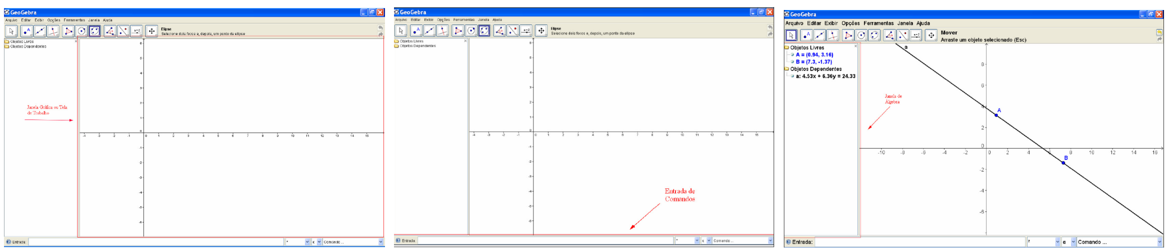


Figura 1: Tela inicial do GeoGebra, destaque para janela gráfica , entrada de comandos e janela de álgebra, da esquerda para direita.

[3]Encontrado em http://www.geogebra.org/cms/.

Durante a construção serão utilizados diversos pontos auxiliares que serão ocultos para que a visualização da atividade não fique carregada como na Figura 2.

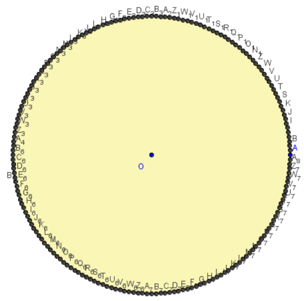


Figura 2: Resultado da não ocultação de alguns pontos.

Um dos vértices do polígono inscrito será construído usando-se parametrização. Uma maneira útil de representar uma curva é por meio de parâmetros. No caso de curvas planas, alternativamente à representação de uma das coordenadas retangulares (x ou y) em função da outra, considera-se ambas como função de uma terceira variável independente, chamada de parâmetro.

Segue roteiro para a reconstrução do método de Arquimedes no programa GeoGebra.

1. Oculte os Eixos. No menu principal, selecione a opção de arredondamento com 4 (quatro) casas decimais.

2. Na décima primeira janela da barra de ferramentas do GeoGebra, da esquerda para a direita, selecione a opção "controle deslizante", Figura 3, em seguida clique na janela gráfica para criar o controle deslizante, chame-o de u, com valor mínimo de 1, máximo de 6 e incremento de 1.

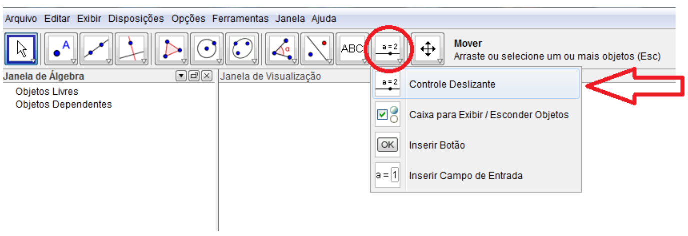


Figura 3: Barra de ferramentas do GeoGebra.

3. Utilizando o campo de entrada, crie o objeto dependente: $n = 3 * 2^{u-1}$. Este objeto irá fornecer o número de lados dos polígonos utilizados nesta atividade.

4. Defina o ponto B como sendo: $B = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$. Esta é a parametrização de um dos vértices do polígono inscrito.

5. Crie os pontos $T = (1, 0)$, $O = (0, 0)$ e $J_1 = \left(\text{Distância}[O, T] \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \text{Distância}[O, T] \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$. Oculte o ponto J_1.

6. Defina o ponto B_1 como sendo a reflexão do ponto J_1 em relação ao ponto O. Oculte o ponto B_1.

7. Defina o círculo c que passa pelo ponto T e com centro em O. Oculte o ponto T.

8. Para criar a reta a tangente à c passando pelo ponto T, digite no campo de entrada: $a = Tangente[T, c]$. Do mesmo modo, crie a reta b tangente à c passando por J_1.

9. Defina o ponto G como sendo o ponto de interseção entre as retas a e b do passo anterior. Este ponto será um dos vértices do polígono circunscrito da atividade. Oculte as retas a e b.

10. Crie o ponto H como sendo a reflexão do ponto G em relação ao ponto T, através do seguinte comando: $H = \text{Reflexão}[G, T]$. Oculte os pontos H e G.

11. Defina o polígono regular p_1 com o seguinte comando: $p_1 = \text{Polígono}[H, G, n]$. Altere as propriedades deste polígono, pintando-o de laranja, por exemplo, com uma transparência de 50%. Agora, manipule o controle deslizante u e veja o que acontece.

12. Crie o ponto C com o seguinte comando: $C = \text{Interseção}[c, h]$. Note que h é um dos segmentos que compõem o polígono definido anteriormente. Oculte o ponto C.

13. Defina o polígono regular p_2 com o seguinte comando: $p_2 = \text{Polígono}[T, C, n]$. Altere as propriedades deste polígono, pintando-o de azul, por exemplo, com uma transparência de 75%. Agora, manipule o controle deslizante u e veja o que acontece. Para melhorar a visualização do ponto O, altere a sua cor para branco, conforme Figura 4.

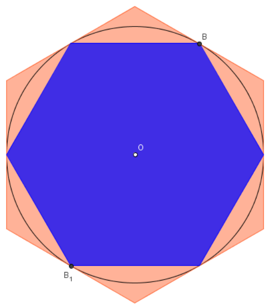


Figura 4: Polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência

14. No campo de entrada, digite: $c_1 = \text{Perímetro}[p_1]$ e $c_2 = \text{Perímetro}[p_2]$, para criar objetos que fornecerão os valores dos perímetros dos polígonos.

15. Crie um novo ponto, fora da figura e chame-o de A. Em seguida, arraste este ponto até que suas coordenadas sejam $A = (1, 0)$.

16. Reexiba o ponto B_1, defina o segmento $q = \text{Segmento}[B, B_1]$. Depois, nas propriedades avançadas, Figura 5, do segmento q, coloque a condição $u > 1$ no campo "Condição para Exibir Objeto(s)". Faça o mesmo para o ponto B_1.

17. Crie a variável "aprox" que irá fornecer a aproximação de π através do comando: aprox $= c_2/q$. Da mesma forma, defina a variável "erro" através do comando: erro $= c_1 - c_2$.

18. Com as informações criadas nos passos anteriores, é possível inserir textos dinâmicos para um melhor entendimento da atividade, como sugerido na Figura 6.

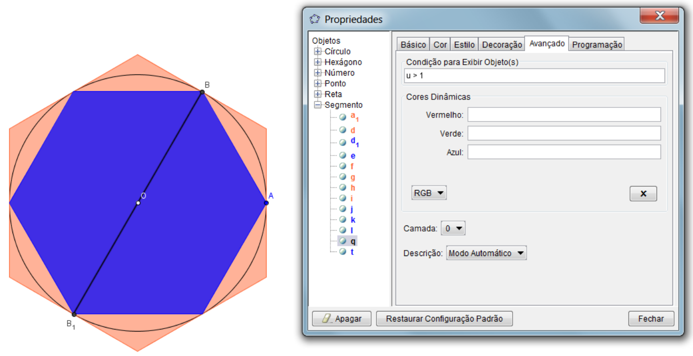
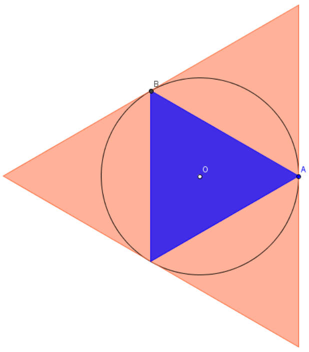


Figura 5: Propriedade avançada.

Circunferência de centro em O e raio R = 1.



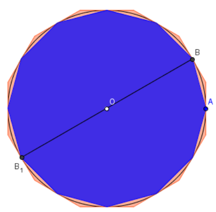
Número de lados dos polígonos regulares = 3

c_1 = Perímetro do polígono circunscrito = 10.3923

c_2 = Perímetro do polígono inscrito = 5.1962

5.1962 ≤ Perímetro da Circunferência ≤ 10.3923

Circunferência de centro em O e raio R = 1.



Número de lados dos polígonos regulares = 12

c_1 = Perímetro do polígono circunscrito = 6.4308

c_2 = Perímetro do polígono inscrito = 6.2117

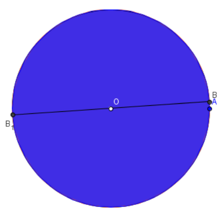
6.2117 ≤ Perímetro da Circunferência ≤ 6.4308

Aproximação de π

$$\pi \cong 3.1058 = \frac{c_1}{BB_1}$$

$c_2 - c_1 = 0.2191$

Circunferência de centro em O e raio R = 1.



Número de lados dos polígonos regulares = 96

c_1 = Perímetro do polígono circunscrito = 6.2854

c_2 = Perímetro do polígono inscrito = 6.2821

6.2821 ≤ Perímetro da Circunferência ≤ 6.2854

Aproximação de π

$$\pi \cong 3.141 = \frac{c_1}{BB_1}$$

$c_2 - c_1 = 0.0034$

Figura 6: Sugestão de textos dinâmicos

Metodologia adotada na intervenção pedagógica

A atividade de intervenção foi proposta a três turmas de primeiro ano do ensino médio de uma escola da rede estadual de ensino, totalizando 71 estudantes, como parte das atividades desenvolvidas no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), tendo como característica marcante a docência compartilhada.

O desenvolvimento da atividade ocorreu em três momentos. Na primeira etapa, os aprendizes foram divididos em grupos e realizaram medições do comprimento C da circunferência e o diâmetro D utilizando objetos circulares, régua, barbante, tesoura e esquadro. Em seguida os grupos socializaram e organizaram os dados obtidos em uma tabela contendo os valores de C, D e o quociente $\frac{C}{D}$. A preocupação primeira foi levar os estudantes a compreenderem o conceito do número π como uma constante que surge naturalmente na divisão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. Na segunda etapa, foi apresentado um breve histórico relatando o aparecimento do valor dessa divisão em diferentes épocas e povos, desde o seu aparecimento na bíblia, os estudos dos egípcios, o método de Arquimedes até os estudos atuais com grande número de casas decimais aproximadas. Já na terceira etapa, o programa de geometria dinâmica *GeoGebra* foi utilizado para reproduzir o método de Arquimedes e obter o comprimento de uma circunferência a partir de aproximações sucessivas obtidas pelo cálculo do perímetro de polígonos inscritos e circunscritos à circunferência.

Durante a atividade computacional de experimentação e visualização, notou-se que pelo método desenvolvido por Arquimedes é possível obter aproximações do valor de π tão precisas quanto se deseje, bastando aumentar continuamente o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos. Neste etapa os estudantes observaram e anotaram o perímetro do polígono inscrito e do polígono circunscrito para polígonos de 3, 6, 12, 24, 48 e 96 lados, também calcularam o erro e fizeram hipóteses quanto ao comprimento estimado da circunferência. A partir destas observações, foram capazes de encontrar uma aproximação para o número π, fazendo a conexão das descobertas desta com aquelas da primeira etapa.

A avaliação da sequência didática foi realizada através da observação da receptividade, do envolvimento dos alunos na atividade e pela análise do questionário de avaliação diagnóstica aplicado no início e no final da intervenção, versando sobre as seguintes questões: 1) Você conhece o número π?; 2) Quem inventou o π?; 3) Qual o valor de π?; 4) Você considera importante conhecer este número?; 5) Quais os profissionais que utilizam o número? No questionário final somente a primeira questão foi alterada por: Qual a importância do número π?

Resultados

Os estudantes mostraram-se bastante entusiasmados com a atividade, também ficaram surpresos ao socializarem com outros grupos o resultado encontrado das medições dos objetos circulares. Momento em que constataram a dependência do comprimento e do diâmetro da circunferência, e perceberam a constância da razão entre comprimento e diâmetro. Sendo levados assim, pelo processo experimental, a obter aproximadamente o valor de número π, a menos de erros de medição. E pela manipulação do OA, os estudantes entenderam com o método de Arquimedes que é sempre possível encontrar uma melhor aproximação para o número π.

Na avaliação diagnóstica inicial, 91,5% dos estudantes declararam conhecer o número π, no entanto apenas 2,82% reconheceram este número como irracional. 81,7% consideraram importante o conhecimento deste número e a maioria dos estudantes não reconheceu a utilização do π fora da própria Matemática. Boa parte dos alunos que responderam a pergunta sobre a importância do número π relacionou-o com a circunferência como pode ser visto na Figura 7. Entretanto, 84,4% responderam que o valor do número π é $3,14$.

Após a intervenção alguns alunos entenderam que o valor de $3,14$ é uma aproximação do π. Inicialmente mais da metade das respostas dos estudantes concentrou-se entre gregos e

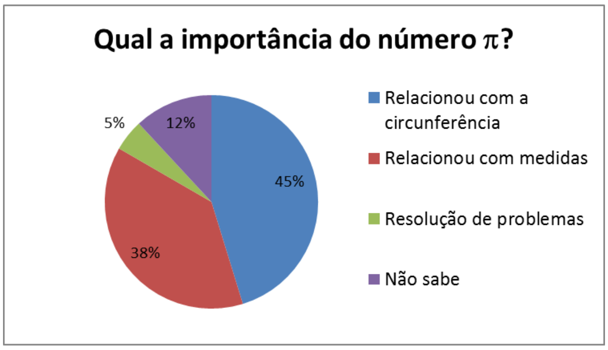


Figura 7: Gráfico das respostas da questão 2.

Pitágoras como inventores do número π. Já no questionário final houve crescimento na citação de Arquimedes e Willian Jones, o primeiro pelo método de aproximação utilizado e o segundo por ser o primeiro a simbolizar a constante pela letra grega π.

Na análise do questionário final pode-se notar que uma parcela dos estudantes compreendeu que o π não foi "inventado", mas foi o resultado de vários séculos de estudo e descobertas. Após a intervenção, de acordo com o gráfico apresentado na Figura 8, grande parte dos alunos foi capaz de listar outros profissionais, distintos dos professores de matemática e matemáticos, que fazem uso do π em suas atividades, ou seja, foi capaz de reconhecer a utilização do π fora da matemática.

Figura 8: Gráfico das respostas da questão 5.

Conclusões

Ao se olhar para o desenvolvimento histórico do problema da natureza de π, verifica-se que os matemáticos de várias culturas tiveram um trabalho árduo em definir a sua irracionalidade. Dessa forma é fácil entender as dificuldades tanto de ensino como de aprendizagem do número π, como um número irracional. Assim, a sequência didática apresentada pode auxiliar tanto o professor na explicação dos conteúdos a respeito do número π quanto estudantes na compreensão de que o π é um número irracional e o valor 3,14 é apenas uma aproximação.

A utilização da história levou os alunos a perceberem que muitos homens, de diferentes nações e épocas, tentaram encontrar um valor racional para π e não conseguiram. Nem se eles tivessem acesso aos computadores, que calculam milhões de casas decimais, eles não conseguiriam provar sua racionalidade. Os estudantes também perceberam a semelhança entre as suas indagações e a desses homens a respeito da constância do valor da divisão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência bem como da exatidão desse valor. Desse modo a atividade favoreceu o pensar matemático propiciando o desenvolvimento de habilidades para formular hipóteses, testá-las e elaborar argumentações, de maneira paulatina a partir do concreto com atividades que despertem o interesse do educando.

Este trabalho propôs uma sequência didática fortemente apoiada na experimentação, gerando maior participação dos estudantes na consolidação e operacionalização dos conceitos matemáticos envolvidos na aprendizagem e aplicação de problemas envolvendo o número π. O aplicativo GeoGebra foi utilizado para construção de objetos de aprendizagem que permitem a visualização e a experimentação de forma a tornar as aulas mais dinâmicas e interativas, de forma a amenizar as possíveis dificuldades e capacitar para a generalização a partir da experiência.

A sequência didática possibilitou a introdução de atividades de investigação que podem levar a compreensão, identificação e reconhecimento do número π como um número irracional especial. Em particular, OA como ferramenta auxiliar na visualização e experimentação do conceito de aproximação do comprimento da circunferência por perímetros de polígonos, contribuiu decisivamente para a compreensão do número π como um número irracional cujo valor pode ser apenas aproximado e que a aproximação pode ser obtida com erro tão pequeno quanto se queira.

Por fim, acredita-se que somente a combinação adequada do conhecimento específico, das metodologias de ensino, da habilidade na utilização dos recursos didáticos e da familiaridade com os anseios da turma pode tornar a disciplina de matemática verdadeiramente compreensível para o aluno.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio financeiro do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Brasil. Os autores agradecem à comissão organizadora da I Semana da Matemática da UNIFAL-MG pela oportunidade de socializar os resultados desse trabalho.

Referências

BORTOLETTO, A. R. S. *Reflexões relativas às definições do número π (pi) e à presença da sua história em livros didáticos de matemática.* 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Metodista de Piracicaba, 2008.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. *PCN+: Ensino Médio orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC, 2002.

CARDOSO, A. Formação do professor de matemática na prática investigativa. In: Felício, H. M. S.; Gomes, C. (orgs) *Caminhos da docência.* Porto Alegre: Otkos, 2012.

CARDOSO, A.; SOUZA JUNIOR, J. C. Conteúdos didáticos digitais para aprendizagem de funções. In: 22^o Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 17^o Workshop de Informática na Escola, 2011, Aracajú. *Anais ....* Aracajú, SE: UFS, 2011. p.371-379.

COSTA, R. C. F. O que é um número transcendente. *Revista do Professor de Matemática*, n.1, p.14-15, 1980.

EVES, H. *História da Matemática*. Campinas: Unicamp, 2008.

FIGUEIREDO, D. G. *Números irracionais e transcendentes*, 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

FRID, H. Os números irracionais. *Revista Eureka*, p.38-48, 2007.

LIMA, E. L. O que é o número π? *Revista do Professor de Matemática*, n.6, p. 21-24, 1985.

PALIS, G. R. Comprimento da circunferência no ensino fundamental. *Revista do Professor de Matemática*, n. 14, p.29-36, 1989.

ROCHA, F. L. et al. Repositórios de objetos de aprendizagem: um estudo exploratório. In: 22^o Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 17^o Workshop de Informática na Escola, 2011, Aracajú. *Anais ...*. Aracajú, SE: UFS, 2011. p.304-312.

SKOVSMOSE, O. *Educação matemática crítica: A questão da democracia*. Campinas: Papirus, 2001.

VERSUTI, A. C. *Educação a distância: problematizando critérios de avaliação e qualidade em cursos on-line*. Diferentes abordagens de EAD, 2004.