Equações Diferenciais Parciais e o Teorema de Existência e Unicidade para o Problema de Cauchy, caso linear

Cristiane C. F. Cintra[1†], *Luciana B. Goecking*[2]

[1]*Discente do curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alfenas.*
[2]*Docente do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas.*

Resumo: *Seja Ω de $\mathbb{R}^2$ uma região aberta, I um intervalo aberto e a equação linear de primeira ordem não homogênea em sua forma mais geral $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)$ e a condição inicial $u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t)$ em que a, b e c são de classe C^1 em Ω que contém a curva suave $\gamma = (\sigma(t), \rho(t)), t \in I$, chamada curva inicial do problema. Este tipo de problema é chamado um Problema de Cauchy. Para resolvermos este problema de Cauchy será de importância fundamental o conceito das curvas característica da equação, pois estas representam o ponto de partida na busca da solução para o problema.Também, veremos que a forma como as curvas características intersectam a curva inicial $(\sigma(t), \rho(t))$ dada determina se o problema terá solução única, infinitas soluções ou se a solução não existe. Veremos o Teorema de Existência e Unicidade que nos dá as condições necessárias para a existência e unicidade da solução do Problema de Cauchy mencionado. É importante observar que o Teorema de Existência e Unicidade nos garante apenas resultados locais, já que o comportamento das curvas características longe da curva inicial pode tornar-se demasiado complexo.*

Palavras-chave: Problema de valor inicial, mudança de variáveis, curva característica.

Abstract: *It Ω of $\mathbb{R}^2$ is a open region, I an open interval and the linear equation of first order non homogeneous in its most general form $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)$ and the initial condition $u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t)$ that a, b and c are C^1 class in Ω that contains the smoth curve $\gamma = (\sigma(t), \rho(t)), t \in I$, initial curve of problem. This type of problem is called a Cauchy Problem. To solve this Cauchy problem is fundamental the concept of characteristic curves of the equation, since these represent the starting point in the search for solution to the problem. Also, we will see that the way in which the characteristic curves intersect the initial curve $(\sigma(t), \rho(t))$ given determines whether the problem will have unique solution, endless solutions or if the solution does not exist. We will see the Existence and Uniqueness Theorem that gives us the necessary conditions for the existence and uniqueness of solution of Cauchy Problem cited. It is important to note that the Existence and Uniqueness Theorem guarantees us just local results, since the behavior of the characteristic curves away from the initial curve can become to complex.*

Keywords: Initial value problem, variable changes, curve feature.

[†] *Corresponding author:* cristiane.uai@oi.com.br.

Introdução

As Equações Diferenciais Parciais (EDP's) são utilizadas para descrever acontecimentos físicos, biológicos, entre outros. Daí a grande relevância de seu estudo.

De acordo com Bassanezi e Júnior (1988, p. 2) "...as Equações Diferenciais talvez sejam o ramo da matemática que tenha maior proximidade e interações com outras ciências."

Muitos fenômenos que ocorrem na ótica, mecânica, biologia, entre outros, podem ser modelados por Equações Diferenciais Parciais. "A Elasticidade e a Dinâmica dos Fluidos, [...] tiveram seu desenvolvimento em comum com uma grande e boa parte da teoria matemática destas equações." (BASSANEZI; JÚNIOR, 1988, p. 469). A solução de inúmeros problemas de importância prática e científica em Mecânica do Meio Contínuo depende do desenvolvimento da teoria das EDP's.

Considere a equação linear de primeira ordem não homogênea

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \quad (x,y) \in \Omega$$

$$u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t), t \in I$$

em que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é um aberto, $a, b, c \in C^1(\Omega)$, I representa um intervalo aberto e $\gamma = (\sigma(t), \rho(t))$ é uma parametrização de uma curva qualquer em Ω, denominada Curva Inicial do problema. Este tipo de problema é chamado um Problema de Cauchy.

O Problema de Cauchy é um problema clássico dentro da teoria das Equações Diferenciais.

> A. L. Cauchy (1789-1857) demonstrou rigorosamente pela primeira vez, e por três métodos diferentes, a existência de soluções para uma vasta classe de Equações Diferenciais que inclui essencialmente todos os modelos conhecidos. (BASSANEZI; JÚNIOR, 1988, p. 9).

Vamos ver como resolver problemas de Cauchy para equações lineares de primeira ordem com duas variáveis independentes. Para isto, estudaremos o Teorema de Existência e Unicidade para o caso linear para o Problema de Cauchy. Este teorema nos fornecerá as condições necessárias para que este problema tenha solução e para que esta seja única.

Conceitos Fundamentais

Notações

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $u = u(x_1, ..., x_n)$ é uma função de várias variáveis, usaremos diferentes notações para as derivadas parciais de u. Por exemplo,

(i) $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, u_{x_1}, $\partial_{x_1} u$ ou $D_1 u$ denota a derivada parcial de u em relação a primeira variável x_1.

(ii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$, $u_{x_1 x_2}$, $\partial_{x_2}\partial_{x_1} u$ ou $D_2 D_1 u$ denota a derivada de u primeiro em relação a x_1 e depois a x_2.

(iii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $u_{x_i x_i}$, $\partial^2_{x_i} u$ ou $D_i^2 u$ denota a derivada de segunda ordem de u com relação a mesma variável x_i.

Equação Diferencial Parcial

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação que envolve variáveis independentes $x_1, x_2, ..., x_n$ e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Uma EDP em n variáveis independentes $x_1, ..., x_n$ é uma equação da forma

$$F\left(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_{i1}...\partial x_{im}}\right) = 0 \quad (1)$$

em que $x = (x_1, .., x_n) \in \Omega$, que representa um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função com derivadas parciais de ordem m.

Obs.: Um subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ é aberto se, dado qualquer $x_0 \in \Omega$, existe uma bola aberta de raio $r > 0$ centrada em x_0 inteiramente contida em Ω.

Exemplos de EDP's:

1) $u_t = u_{xxx} + uu_x$

2) $xu_x - yu_y = sen(xy)$

3) $(u_x)^2 - x^2 + u_t = 0$

Classificação de uma EDP

Uma EDP pode ser classificada segundo sua ordem e linearidade.

A ordem de uma EDP é dada pela sua derivada parcial de maior ordem. Dizemos que a EDP (1) é *linear* se F é linear em relação a u e a todas as suas derivadas parciais; caso contrário a EDP é dita *não linear*.

O exemplo 1) é uma EDP linear de terceira ordem, no exemplo 2), temos uma EDP linear de primeira ordem e no exemplo 3), a EDP é não linear de primeira ordem.

Uma EDP linear de primeira ordem possui a forma geral

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_j u + b(x)u + c(x) = 0, \quad (2)$$

em que algum dos coeficientes a_j não é identicamente nulo.

Já no caso de equações de segunda ordem, a forma mais geral de uma EDP linear é

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x)u + d(x) = 0, \quad (3)$$

em que algum dos coeficientes a_{ij} não é identicamente nulo.

Caso a EDP possua duas variáveis independentes x, y, as equações (2) e (3) podem ser reescritas, respectivamente,

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u + D(x,y) = 0, \quad (4)$$

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u + G(x,y) = 0. \quad (5)$$

Obs.: A equação (5) não contém o termo com u_{yx}, pois procuramos soluções u que são duas vezes continuamente diferenciáveis na região de interesse e, para tais funções, $u_{xy} = u_{yx}$.

Uma EDP linear é dita *homogênea* se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo. O exemplo 1) é de uma EDP linear homogênea e no exemplo 2) temos uma EDP linear não homogênea.

As equações (4) e (5) se tornam homogêneas quando as funções $D(x, y)$ e $G(x, y)$ são respectivamente iguais a zero.

Três EDP's importantes

1) A equação de *Laplace*,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

é uma equação linear de segunda ordem homogênea.

2) Uma outra equação importante é a *equação unidimensional de calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e α^2 é uma constante. É uma equação de segunda ordem, linear e homogênea.

3) A *equação unidimensional de onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

é também linear, homogênea e de segunda ordem.

Obs.: O termo "unidimensional" faz referência ao fato de x ter dimensão espacial 1, enquanto t representa o tempo.

O Operador Diferencial Parcial L

Consideremos uma EDP de primeira ou segunda ordem com n variáveis independentes $x_1, ..., x_n$. Considerando uma equação do tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x)u + d(x) = 0. \tag{6}$$

Denotaremos por k a ordem da equação, $k = 1$ ou $k = 2$. Note que se $k = 1$, então $a_{ij} \equiv 0$ quaisquer que sejam $i, j \in \{1, ..., n\}$ e existe $j, 1 \leq j \leq n$, tal que $b_j \not\equiv 0$.

Podemos colocar a equação (6) na forma

$$Lu = f, \tag{7}$$

em que $f(x) = -d(x)$ e

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x). \tag{8}$$

A cada função u corresponde uma única função Lu. Assim, definimos o *operador* ou *transformação* L. Considere Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, onde as funções a_{ij}, b_j e c, $1 \leq i, j \leq n$, são contínuas em Ω e tomam valores reais. Definimos, então

$$L : C^k(\Omega) \to C(\Omega) \tag{9}$$

$$u \mapsto Lu$$

onde Lu é dado pela fórmula (8) e $C^k(\Omega)$ é o conjunto das funções $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ que são k vezes continuamente diferenciáveis.

O operador L representa um exemplo de um *operador diferencial parcial.* Como a equação (6) é linear, temos que o operador L definido por (8) é um operador *linear*, isto é, L leva a função identicamente nula nela mesmo e

$$L(u + \alpha v) = Lu + \alpha Lv \tag{10}$$

para quaisquer u, v no domínio de L e qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Curvas Características

A seguir, vamos definir o conceito de Curvas Características, já que estas desempenham importante papel na obtenção da solução para o Problema de Cauchy. Para isso, introduzimos o conceito do Método das Características cuja ideia principal para resolver equações de primeira ordem consiste em obter curvas ao longo das quais a EDP se reduz a um sistema de EDO's que são as curvas características da equação. Em seguida, a EDO obtida é integrada ao longo das curvas características para se obter a solução. Podemos dizer que ao longo das curvas características, a EDP se comporta como uma derivada total que, provavelmente, pode ser integrada.

Vamos a um exemplo simples para entendimento do conceito e de como obter as curvas características.

Considere a equação:

$$u_t + c(x,t)u_x = 0 \quad em \ \mathbb{R}^2 \quad (*)$$

Se $(x(t),t)$ é uma curva arbitrária do plano xt, a derivada de u ao longo desta curva é dada por

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_t(x(t),t) + x'(t)u_x(x(t),t)$$

Por $(*)$ temos que $\frac{du}{dt} = 0$ ao longo das curvas em que $x'(t) = c(x,t)$.

Donde podemos concluir que u é constante ao longo das curvas $x'(t) = c(x,t)$, ou seja, a EDP $(*)$ foi reduzida a EDO $u' = 0$ ao longo de curvas características da equação que são as curvas $(x(t),t)$ que satisfazem a EDO $x'(t) = c(x,t)$.

Para obter a solução para o problema, basta integrar a EDO ao longo dessas curvas características. Daí segue a definição.

Definição: As curvas características da equação $u_t + c(x,t)u_x = 0$ são as curvas soluções da EDO $x'(t) = c(x,t)$.

Considerando agora o problema

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0, \quad (x,y) \in \Omega$$

$$u(\sigma(t),\rho(t)) = f(t), t \in I,$$

temos a definição a seguir.

Definição: Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$. As curvas características da equação linear homogênea de primeira ordem

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$$

com $a, b \in C^1(\Omega)$ são as curvas $C(s) = (\alpha(s), \beta(s))$, soluções do sistema de EDO's

$$\alpha'(s) = a(\alpha(s),\beta(s))$$
$$\beta'(s) = b(\alpha(s),\beta(s))$$

Exemplo: Usando o método das características encontre a solução para o problema não homogêneo

$$3u_x - 4u_y = x^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$u\left(t, \frac{3}{4}t\right) = \frac{t^3}{9}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Primeiramente, vamos encontrar as curvas características da equação homogênea correspondente $3u_x - 4u_y = 0$.

Temos que

$$\alpha'(s) = 3$$

$$\beta'(s) = -4$$

Deste sistema de EDO's, vemos que as curvas características são as retas

$$\alpha(s) = 3s + x_0$$

$$\beta(s) = -4s + y_0$$

Denotando por $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t)) = (t, \frac{3}{4}t)$ a curva inicial dada, vemos que os vetores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ e $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ são Linearmente Independentes, para todo $t \in \mathbb{R}$, o que significa que uma única curva característica passa pelo ponto $(\sigma(t), \rho(t))$.

Então, podemos cobrir uma vizinhança da curva γ com essas curvas características e fazer as mudanças de variáveis de (x, y) para (s, t), $t \in I$, de modo que tenhamos

$$\alpha(s) = x(s, t)$$

$$\beta(s) = y(s, t)$$

tomando como pontos iniciais para estas retas características os pontos ao longo da reta inicial $y = \frac{3}{4}t$ dada no problema, temos

$$x(s) = 3s + t$$

$$y(s) = -4s + \frac{3}{4}t$$

Integrando

$$\frac{d}{ds}u(x(s), y(s)) = u_x x'(s) + u_y y'(s) = x^2 = (3s + t)^2$$

de 0 até s, obtemos

$$u(x(s), y(s)) - u(x(0), y(0)) = \frac{(3s + t)^3}{9} - \frac{t^3}{9}$$

$$u(x(s), y(s)) = \frac{(3s + t)^3}{9} - \frac{t^3}{9} + u(x(0), y(0)) = \frac{x^3(s)}{9} - \frac{t^3}{9} + \frac{t^3}{9} = \frac{x^3(s)}{9}$$

Portanto, a solução para o problema é $\frac{x^3}{9}$.

O Problema de Cauchy

Nesta seção, estudaremos equações lineares de primeira ordem. Primeiramente será mostrado o estudo de problemas de Cauchy para equações lineares sem dependência explícita na variável dependente. Depois, discutiremos o caso geral de soluções de equações lineares.

O Problema de Cauchy

Estamos estudando o problema de Cauchy para a EDP linear da forma

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y), \tag{11}$$

em que a incógnita u aparece apenas na parte principal de (11).

Existe uma relação entre a curva inicial γ e a região aberta $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, onde queremos que exista solução e que ela seja única: Ω deve ser coberta por características planas que intersectam γ em apenas um ponto.

Parametrizando γ por $(\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, nosso problema fica:

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), t \in I, \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{12}$$

em que Ω é um aberto que contém γ.

Hipóteses sobre este Problema de Cauchy:

(i) γ é uma curva suave.

(ii) $f \in C^1(I)$

(iii) $a, b, c \in C^1(\Omega)$ e a e b não se anulam simultaneamente em Ω.

Para garantir a existência e unicidade do problema (12) precisamos:

- Achar as curvas características planas de (12).
- Garantir que as curvas características intersectam a curva inicial γ em um único ponto.
- Fazer algumas mudanças de variáveis que transformem o problema (12) em um problema de valor inicial para uma EDO de primeira ordem que, pode então, ser resolvida com as técnicas de resolução para EDO's.

Para resolver o problema (12) devemos, primeiramente, achar as curvas características planas da equação (11).

Se C é uma curva característica plana parametrizada por $(\alpha(s), \beta(s))$, então a derivada total de u ao longo se C é

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \alpha'(s)u_x(\alpha(s), \beta(s)) + \beta'(s)u_y(\alpha(s), \beta(s)); \tag{13}$$

e a EDP (11) ao longo de C fica

$$a(\alpha(s), \beta(s))u_x(\alpha(s), \beta(s)) + b(\alpha(s), \beta(s))u_y(\alpha(s), \beta(s)) = c(\alpha(s), \beta(s)). \tag{14}$$

Logo, para que o lado esquerdo da equação (14) seja igual a qualquer uma das expressões em (13), é preciso que, exista um número real $\lambda(s) \neq 0$, para cada s, tal que

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s); \end{aligned} \tag{15}$$

Assim, a equação fica

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \lambda(s)c(\alpha(s), \beta(s)). \tag{16}$$

As condições (15) significam que o vetor tangente í curva C no ponto $(\alpha(s), \beta(s))$ é paralelo ao vetor $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$. E com uma reparametrização conveniente as curvas características planas de (11) satisfazem

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)). \end{aligned} \tag{17}$$

que é um sistema de EDO's de infinitas soluções.

Dado $(x_0, y_0) \in \Omega$ e dado um par de condições iniciais, o sistema (17) se torna

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)). \\ \alpha(s_0) &= x_0, \beta(s_0) = y_0. \end{aligned} \tag{18}$$

O Teorema de Picard para EDO's garante solução única para (18). A solução é obtida integrando-se ao longo das curvas características planas encontradas em (17).

A existência e unicidade do problema (12) depende de como as características encontradas acima intersectam a curva inicial γ.

Se γ nunca é tangente às curvas características planas, ou seja, se os vetores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ e $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ nunca são paralelos, isso garante uma única curva característica passando pelo ponto $(\sigma(t), \rho(t))$, que é a solução de (18).

Se uma única característica intersecta γ no ponto $(\sigma(t), \rho(t))$, podemos cobrir uma vizinhança da curva γ em exatamente um ponto.

Isso nos permite fazer uma mudança de variável de (x, y) para (s, t).

Denotando a curva característica $(\alpha(s), \beta(s))$ por $(x(s, t), y(s, t))$, reescrevemos (18):

$$\begin{aligned} x_s(s,t) &= a(x(s,t), y(s,t)), \\ y_s(s,t) &= b(x(s,t), y(s,t)), \\ x(0,t) &= \sigma(t), \\ y(0,t) &= \rho(t) \end{aligned} \tag{19}$$

além disso, como os vetores

$$(\sigma'(t), \rho'(t)) \quad e \quad (a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$$

são linearmente independentes, a mudança de variável será

$$v(s,t) = u(x,y), \tag{20}$$

obtemos, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial y}{\partial s} =$$

$$= a(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial u}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) + b(x(s,t), y(s,t))\frac{\partial u}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)). \tag{21}$$

Substituindo a EDP (11) em (21), obtemos

$$v_s = c(x(s,t), y(s,t)).$$

Além disso, a condição inicial do problema (12) fica

$$v(0,t) = f(t), t \in I,$$

Então, o problema que v satisfaz é

$$\begin{aligned} v_s &= c(x(s,t), y(s,t)), \\ v(0,t) &= f(t), t \in I. \end{aligned} \tag{22}$$

Para cada $t \in I$ fixo, o problema (22) é um problema de valor inicial para uma EDO de primeira ordem, cuja solução é obtida integrando diretamente de 0 a s. Assim, obtemos

$$v(s,t) = \int_0^s v_s(\nu, t)d\nu + v(0,t) = \int_0^s c(x(\nu,t), y(\nu,t))d\nu + f(t) \tag{23}$$

Logo, a solução no ponto $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))$ é obtida integrando a EDP ao longo da característica plana que passa por (x_0, y_0) de $s = 0$ até $s = s_0$.

Como fizemos uma mudança de variável, para voltar para u, dado (x_0, y_0), seja $t_0 = t(x_0, y_0)$ e $s_0 = s(x_0, y_0)$, ou seja, $x_0 = x(s_0, t_0)$ e $y_0 = y(s_0, t_0)$; substituindo (20) em (23), obtemos

$$u(x_0, y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0))ds. \tag{24}$$

Se u é solução de (12), então u satisfaz (24), que por sua vez, é solução de (12), logo a solução é única.

Assim, acabamos de provar o teorema a seguir.

Teorema de Existência e Unicidade

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto, γ uma curva suave em Ω parametrizada por $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, $f \in C^1(I)$ e $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Suponha que $a(x,y)^2 + b(x,y)^2 \neq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$, e

$$\begin{vmatrix} a((\sigma(t),\rho(t)) & b(\sigma(t),\rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \forall t \in I.$$

Então o problema (12) tem uma única solução de classe C^1 em uma vizinhança da curva γ em Ω dada por (24).

Obs.: Normalmente é mais fácil achar as curvas características planas diretamente e integrar ao longo dessas curvas do que utilizar a fórmula (24).

Exemplo:

$$u_x - 3u_y = sen(x) + cos(y) \tag{25}$$
$$u(t,t) = p(t),$$

com $t \in \mathbb{R}$ e p uma função dada.

Primeiramente, vamos encontrar as curvas características planas para a EDP em (25). Procuramos, então, curvas $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s))$ satisfazendo

$$\alpha'(s) = 1$$

$$\beta'(s) = -3$$

Assim, obtemos

$$\alpha(s) = s + c \Rightarrow x = s + c$$
$$\beta(s) = -3s + c \Rightarrow y = -3s + c$$

Portanto, as curvas características planas para a EDP em (25) são as retas $y = -3x + c$. Como a curva inicial é a reta $y = x$, ela intersecta cada característica plana em exatamente um ponto. Estamos, portanto, nas condições do Teorema de Existência e Unicidade.

Dado qualquer ponto $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, ele está na reta $y = -3x + c$ onde $c = y_1 + 3x_1$, e esta reta intersecta a curva inicial no ponto (x_0, y_0) onde

$$x_0 = \frac{y_1 + 3x_1}{4}$$

Parametrizando então a reta por $s \mapsto (s, -3s + c)$, obtemos:

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \int_{\frac{y_1+3x_1}{4}}^{x} (sen(s) + cos(-3s + c))\, ds \Rightarrow$$

$$u(x,y) = \int_{\frac{y_1+3x_1}{4}}^{x} (sen(s) + cos(-3s + c))ds + p(x_0)$$

Com as técnicas de resolução de integrais, chegamos a seguinte solução:

$$u(x,y) = -cos(x) + cos\left(\frac{y+3x}{4}\right) - \frac{1}{3}\left[sen(y) - sen\left(\frac{y+3x}{4}\right)\right] + p\left(\frac{y+3x}{4}\right).$$

Solução Geral

Agora, a função incógnita u não aparece apenas na parte principal da equação

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)$$

Considere o operador diferencial linear de primeira ordem

$$L = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x,y)$$

isto é,

$$Lu = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u$$

e vamos estudar a equação

$$Lu = d(x,y) \tag{26}$$

com a, b, c, d constantes e pertencentes a $C(\Omega)$.

Para resolver a equação (26), vamos procurar uma mudança de variável (s,t) que transforme esta EDP em uma equação onde só apareça a derivada em relação a uma das variáveis (no caso, s). Assim, poderemos resolver a equação como se fosse uma EDO, fixando a outra variável.

Vamos procurar a solução geral da equação:

$$av_x + bv_y + cv = d \tag{27}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$. Vamos fazer a mudança de variável $s = s(x,y)$, $t = t(x,y)$, com t constante ao longo das características planas, de modo que a equação (27) fique em uma forma mais simples.

Assim, as características planas para a equação acima satisfazem

$$x'(s) = a \Rightarrow x(s) = as + c_1$$

$$y'(s) = b \Rightarrow y(s) = bs + c_2$$

Portanto, as curvas características planas para a EDP em (27) são as retas $ay - bx = k_1$, k_1 constante e as retas ortogonais a estas são as retas $by + ax = k_2$, k_2 constante. Tomando $t = k_1$ e $s = k_2$, obtemos:

$$s = ax + by \tag{28}$$

$$t = -bx + ay$$

Isolando x e y em (28), obtemos:

$$x = \frac{as - bt}{a^2 + b^2} \qquad y = \frac{bs + at}{a^2 + b^2}$$

e

$$x_s = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad y_s = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Com a mudança de variável $w(s,t) = v(x,y)$, temos:

$$\frac{\partial w}{\partial s}(s,t) = v_x x_s + v_y y_s \tag{29}$$

Substituindo os valores de x_s e y_s em (29), a equação (27) fica

$$(a^2 + b^2)w_s + cw = d. \tag{30}$$

Para cada t fixo, a equação (30) é uma EDO de primeria ordem com fator integrante

$$\frac{1}{a^2+b^2}\exp\left(\frac{cs}{a^2+b^2}\right); \tag{31}$$

multiplicando (30) por (31), obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[w \quad \exp\left(\frac{cs}{a^2+b^2}\right)\right] = \frac{d}{a^2+b^2}\exp\left(\frac{cs}{a^2+b^2}\right).$$

Se $c \neq 0$, a solução geral de (30) é

$$w(s,t) = \frac{d}{c} + f(t)\exp\left(\frac{-cs}{a^2+b^2}\right)$$

e a solução geral de (27) é

$$\upsilon(x,y) = \frac{d}{c} + f(-bx+ay)\exp\left(\frac{-c}{a^2+b^2}(ax+by)\right).$$

Agora, se $c = 0$, a solução geral de (30) é

$$w(s,t) = \frac{d}{a^2+b^2}s + f(t)$$

e a solução geral de (27) é

$$\upsilon(x,y) = \frac{d}{a^2+b^2}(ax+by) + f(-bx+ay)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R})$ é arbitrária.

Discussão dos Resultados

Nesta seção, serão discutidas situações nas quais o Teorema de Existência e Unicidade não é válido para Problemas de Cauchy.

Voltando ao problema (12)

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y),$$

$$u(\sigma(t),\rho(t)) = f(t), t \in I,$$

(i) Veremos o que acontece se a curva inicial γ é uma curva característica plana.

Para tanto, primeiramente definiremos o que é uma curva característica espacial e o que é a superfície solução. Uma curva característica para o problema (12) é uma curva suave $s \mapsto (\alpha(s),\beta(s),\xi(s)) \in \mathbb{R}^3$ que tem tangente no ponto $(\alpha(s),\beta(s),\xi(s))$ paralela ao vetor $(a(\alpha(s),\beta(s)), b(\alpha(s),\beta(s)), c((\alpha(s),\beta(s)))$; ou seja, α,β,ξ satisfazem

$$\alpha'(s) = a(\alpha(s),\beta(s)),$$

$$\beta'(s) = b(\alpha(s),\beta(s)),$$

$$\xi'(s) = c(\alpha(s),\beta(s)).$$

Quando a curva inicial γ não é tangente às curvas características planas, a superfície solução é gerada pela curva $\Gamma : t \in I \mapsto (\sigma(t),\rho(t),f(t))$ e pelas curvas características em $\mathbb{R}^3$ que intersectam Γ.

Suponha que γ é uma característica plana. Discutiremos o caso em que Γ é uma característica e o caso em que Γ não é característica.

Discutiremos primeiro o caso em que Γ é uma curva característica para a EDP (12). Seja δ uma curva plana qualquer que nunca é tangente às características planas e que intersecta γ no ponto $(\sigma(s_0), \rho(s_0))$, seja $t \mapsto (p(t), q(t))$ uma parametrização de δ com

$$(p(0), q(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0)) \tag{32}$$

e seja r uma função arbitrária de classe C^1 satisfazendo

$$r(0) = f(s_0). \tag{33}$$

Como já vimos, o problema

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y) \tag{34}$$

$$u(p(t), q(t)) = r(t)$$

tem uma única solução u em uma vizinhança de δ; além disso, a superfície solução contém a curva $\Delta : t \mapsto (p(t), q(t), r(t))$ e contém todas as características da EDP que intersectam Δ. Em particular, a superfície solução contém Γ pois

$$(p(o), q(0), r(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0), f(s_0)) \in \Delta \cap \Gamma$$

por (32) e (33).

Portanto u é solução de (12). O problema tem infinitas soluções, pois existem uma infinidade de escolhas possíveis para a curva δ e para a função r.

Veremos, agora, o caso em que Γ não é uma característica para (12).

Suponha, por absurdo, que o problema (12) tem solução nesse caso: se u é solução, qualquer que seja $t \in I$, derivando a condição inicial obtemos

$$\sigma'(t)u_x(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_y(\sigma(t), \rho(t)) = f'(t); \tag{35}$$

por outro lado, a EDP (12) no ponto $(\sigma(t), \rho(t))$ fica

$$a(\sigma(t), \rho(t))u_x(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_y(\sigma(t), \rho(t)) = c(\sigma(t), \rho(t)); \tag{36}$$

comparando (35) e (36) e usando o fato que os vetores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ e $a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t))$ são paralelos (pois γ é característica plana), obtemos que os vetores em $\mathbb{R}^3$

$$(\sigma'(t), \rho'(t)) \qquad e \qquad (a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)), c(\sigma(t), \rho(t)))$$

também são paralelos, isto é, Γ é uma característica, o que contradiz a hipótese.

Portanto, o problema (12) não tem solução neste caso.

(ii)Veremos agora o que acontece quando γ é tangente í curva característica plana.

Vamos resolver o problema:

$$u_x(x,y) = x^2 \tag{37}$$

$$u(x, x^3) = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, as características planas são as retas $y = c, c \in \mathbb{R}$, e, embora a curva inicial $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t^3)$ seja tangente í reta $y = 0$ em $t = 0$, cada característica plana intercepta γ em apenas um ponto. Então, para obter a solução, podemos integrar ao longo das curvas características planas:

$$u(x,y) = \int_{\sqrt[3]{y}}^{x} t^2 dt + f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{y}{3} + f(x).$$

Mesmo no caso em que cada característica plana intersecta γ em exatamente um ponto, pode ocorrer que a mudança de variável $(s,t) \mapsto (x,y)$ não seja mais diferenciável e, portanto, a solução encontrada integrando ao longo das características não é de classe C^1. Modificando o problema (37):

$$u_x = 1$$
$$u(x, x^3) = f(x), x \in \mathbb{R};$$

A solução é

$$u(x,y) = \int_{\sqrt[3]{y}}^{x} dt + f(x) = x - \sqrt[3]{y} + f(x).$$

Note que as características planas são as mesmas, mas essa solução não é diferenciável em $y = 0$.

Referências

BASSANEZI, R. C.; JÚNIOR, W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações.* São Paulo: Ed. Harbra Ltda., 1988.

BIEZUNER, R. J. *Introdução às Equações Diferenciais Parciais.* Notas de aula. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/iedp.pdf. Acesso em: 05 out 2012.

CULLEN, M. R.; ZILL, D.G. *Equações Diferenciais.* Vol. 2, 3. ed., São Paulo: Ed. Pearson, 2001.

FERREIRA, A.P. Problema de Cauchy para Equações Diferenciais Ordinárias. *In: XI Encontro Anual de Iniciação Científica*, Maringá, PR: Universidade Estadual de Maringá, 2002.

IÓRIO, V. *EDP - Um curso de Graduação.* Coleção Matemática Universitária, 2.ed.,Rio de Janeiro: IMPA, 2007.