

Desempenho dos gráficos de controle de medidas individuais na presença de assimetria

Daniel V. Lima^{1†}, Anderson C. S. Oliveira², José N. Cruz³

¹*Departamento de Estatística. Universidade Federal de Mato Grosso*

²*Departamento de Estatística. Universidade Federal de Mato Grosso.*

E-mail: andersoncso@gmail.com.

³*Departamento de Estatística. Universidade Federal de Mato Grosso.*

E-mail: niltonn.cruz@gmail.com.

Resumo: *O Controle Estatístico de Qualidade é ferramenta imprescindível tanto no âmbito empresarial quanto no de pesquisa acadêmica, sendo implementado em diversas empresas e também sendo objeto de estudo em inúmeras pesquisas acadêmicas. O presente artigo tem como objetivo analisar propostas recentes para correção de assimetria em gráficos de controle para medidas individuais, visto que esse modelo parte do pressuposto de que há normalidade nos dados, o que muitas vezes não é o caso, fazendo com que o modelo não seja apropriado para dados que não seguem normalidade. Logo, fez-se necessário métodos alternativos para manter processos industriais sob controle mesmo não havendo normalidade nos dados. A metodologia utilizada apresentou resultados satisfatórios ao ser comparada com o método tradicional de Shewhart, havendo uma diminuição de falsos alarmes e um melhoramento no índice de dados sob controle no processo.*

Palavras-chave: Controle de qualidade; Shewhart; Correção de Assimetria; Não-Normalidade.

Abstract: *Statistical Quality Control is an essential tool both in business and in academic research, being implemented in several companies and also being object of study in numerous academic researches. The present article aims to analyze recent proposals for correction of asymmetry in control charts for individual measures (I-MR Chart), since this model assumes that there is normality in the data, which is often not the case, making the model not suitable for data that does not follow normality. Therefore, alternative methods were necessary to keep industrial processes under control even if data were not normal. The methodology used presented satisfactory results when compared to the traditional Shewhart method, with a decrease in false alarms and an improvement in the data index under control in the process.*

Keywords: Quality control; Skewness correction; Shewhart; Non-normality.

[†]Autor correspondente: dvalentins@outlook.com.

Introdução

Os gráficos de controle são ferramentas amplamente utilizadas para monitorar e detectar qualquer mudança em um processo, que possa resultar em uma mudança na qualidade de um produto ou serviço. Estes gráficos baseiam-se em estabelecer limites de controles a partir de subgrupos racionais ou pequenas amostras $n > 1$ retiradas em intervalos regulares de tempo. No entanto, em casos que se tem poucos dados disponíveis ou não faz sentido medições de subgrupos utiliza-se $n = 1$. Nestes casos utiliza-se os gráficos de controle de medidas individuais de Shewhart (BURR, 2004; MONTGOMERY, 2016).

Supondo que a característica de qualidade é normalmente distribuída, com um processo em que a média μ e o desvio padrão σ são desconhecidos, e considerando X_1, X_2, \dots, X_m amostras individuais ($n = 1$), então um gráfico de controle medidas individuais de Shewhart consiste em estabelecer os limites de controle inferior (LCI) e superior (LCS) dados por:

$$LCS = \bar{X} + \frac{3\bar{R}}{d_2} \quad LCI = \bar{X} - \frac{3\bar{R}}{d_2}, \quad (1)$$

sendo \bar{X} a média amostral, \bar{R} a média das amplitudes móveis dada por $R_i = |X_i - X_{i-1}|$ e $d_2 = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - (1 - \Phi(z))^2] - (\Phi(z))^2 dz$ em que $\Phi(z)$ é a distribuição acumulada da normal padrão (BARBOSA et al. 2013; MONTGOMERY, 2016)

A utilização deste gráfico auxilia na identificação de mudanças e desvios de processo ao longo do tempo, em que é verificado se existem pontos fora dos limites de controle. Quando a estatística do processo é normal e o processo está sob controle, 99,73% dos pontos estarão entre os limites de controle. Nestes casos, pontos fora dos limites são denominados falsos alarmes. Assim, cerca de 0,27% de todos os pontos de controle serão alarmes falsos e não terão causa de variação atribuível, devido aos limites de controle. Desta forma, a probabilidade um falso alarme, denominada risco tipo I, é de 0,27% (PADGETT et al., 1992; MAST e ROES, 2004; KARAGÖZ e HAMURKAROGLU, 2012).

Para muitas situações que a suposição de normalidade não é válida, a probabilidade do risco Tipo I aumenta afetando o desempenho do gráfico de controle (PADGETT et al., 1992; KAN e YAZICI, 2006; KARAGÖZ e HAMURKAROGLU, 2012).

Se a distribuição não for normal, pode-se utilizar três abordagens diferentes. Uma abordagem é aumentar o tamanho da amostra até que a distribuição da média da amostra seja bem modelada pela distribuição normal, independentemente da quantidade de desvio da normalidade das unidades individuais. Outra abordagem é transformar os dados originais para que os dados transformados sejam modelados mais de perto pela distribuição normal e, em seguida, continuar com os gráficos de controle usando os dados transformados. A terceira abordagem é a obtenção de gráficos de controle por baseados em métodos heurísticos, tais como gráfico de controle de variância ponderado, gráfico de controle de desvios padrão ponderados e gráfico de controle de correção de assimetria (KAN e YAZICI, 2006; TSAI, 2007; YAZICI e KAN, 2009; KARAGÖZ e HAMURKAROGLU, 2012).

Tendo em vista essa problemática, este trabalho tem por objetivo avaliar o desempenho de gráficos de controle para medidas individuais de Shewhart e com correção de assimetria por meio de simulação.

Material e métodos

Distribuição normal assimétrica

Uma variável aleatória X tem distribuição normal assimétrica ($X \sim SN(\xi, \omega, \alpha)$) com parâmetro de assimetria α , parâmetro de locação ξ e parâmetro de escala ω , se sua densidade é dada por

$$f(x) = 2 \frac{1}{\omega} \phi \left(\frac{x - \xi}{\omega} \right) \Phi \left(\alpha \left(\frac{x - \xi}{\omega} \right) \right)$$

em que $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ denotam respectivamente, as funções de densidade de probabilidade e de distribuição da normal padrão (AZZALINI, 2013).

A média e variância de X é dada por:

$$E[X] = \xi + \omega \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad V(X) = \omega^2 \left(1 - \frac{2\delta^2}{\pi} \right) \quad \text{sendo } \delta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

O Coeficiente de assimetria é dado por:

$$\gamma_1 = \frac{4 - \pi}{2} \frac{\left(\delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^3}{\left(1 - \frac{2\delta^2}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

em que γ_1 assume valores no intervalo $(-0,99527; 0,99527)$.

Gráfico de controle de medidas individuais com correção de assimetria

Considerando X_1, X_2, \dots, X_m amostras individuais ($n = 1$) de um processo com média μ , desvio padrão σ e assimetria α_3 desconhecidos. Então os limites de controle com correção de assimetria são dados por (KAN e YAZICI, 2006):

$$LCS_{sc} = \bar{X} + \frac{(3 + A_{sc})\bar{R}}{d_2^*}, \quad LCI_{sc} = \bar{X} + \frac{(-3 + A_{sc})\bar{R}}{d_2^*}, \quad (2)$$

em que:

- A_{sc} é uma constante de correção dada por

$$A_{sc} = \frac{4\hat{\alpha}_3\sqrt{2}}{3(2 + 0.2\hat{\alpha}_3^2)},$$

sendo $\hat{\alpha}_3$ o coeficiente de assimetria amostral

- d_2^* é o parâmetro gráfico dado por:

$$d_2^* = \frac{E(R)}{Var(X)}.$$

Simulação

Foram realizadas simulações considerando o gráfico de controle de medidas individuais de Shewhart e com correção de assimetria utilizando o *software* R (R CORE TEAM, 2018).

As simulações foram realizadas considerando dois segmentos. As etapas de cada segmento são descritas abaixo.

- Segmento 1:

1.a, Gerar amostras de tamanho n de uma distribuição $SN(\mu, \sigma, \alpha)$.

1.b, Calcular os limites de controle usando as equações 1 e 2.

- Segmento 2:

2.a, Gerar 100 amostras de uma distribuição $SN(\mu, \sigma, \alpha)$;

2.b, Verificar se os valores gerados e amplitude móvel estão dentro dos limites de controle obtidos na etapa 1.c.

2.c, Obter o risco tipo I dado por:

$$\frac{n_0}{100},$$

em que n_0 é o número de valores fora dos limites de controle.

Foram realizadas 10000 simulações e obtido o risco de Tipo I médio para cada gráfico. Para as simulações foram considerados $E[X] = 0$, $V(X) = 1$ e assimetria γ_1 variando entre 0 e 0,99, assim foram obtidos os parâmetros da distribuição normal assimétrica apresentados na Tabela 1.

Considerando os parâmetros da Tabela 1 foram realizadas simulações com diferentes tamanhos de amostras $m = 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$ e 100.

Tabela 1: Valores dos parâmetros da distribuição normal assimétrica utilizados nas simulações.

γ_1	ξ	ω	α	γ_1	ξ	ω	α
0,00	0,0000	1,0000	0,0000	0,55	-1,0862	1,4764	2,3821
0,05	-0,4884	1,1129	0,6586	0,60	-1,1181	1,5001	2,6187
0,10	-0,6153	1,1742	0,8711	0,65	-1,1484	1,5227	2,8945
0,15	-0,7044	1,2232	1,0427	0,70	-1,1771	1,5445	3,2260
0,20	-0,7753	1,2653	1,1988	0,75	-1,2045	1,5655	3,6409
0,25	-0,8351	1,3029	1,3491	0,80	-1,2307	1,5857	4,1902
0,30	-0,8875	1,3370	1,4992	0,85	-1,2558	1,6053	4,9810
0,35	-0,9343	1,3685	1,6530	0,90	-1,2800	1,6243	6,2979
0,40	-0,9768	1,3979	1,8141	0,95	-1,3032	1,6427	9,3435
0,45	-1,0159	1,4255	1,9863	0,99	-1,3213	1,6570	27,8534
0,50	-1,0522	1,4516	2,1738				

Resultados e Discussão

Na Figura 1 é apresentado a taxa média de risco tipo I do gráfico de controle de medidas individuais de Shewhart em função do número de amostras e coeficiente de assimetria γ_1 . Observa-se que para amostras de tamanho 20 e 30, para todos os valores de γ_1 a taxa de risco tipo I excede o valor de 0,0027. Já para amostras entre 40 e 100, quando a distribuição é simétrica tem-se um risco tipo I inferior a 0,0027, e que considerando $\gamma_1 > 0,55$ para todos os tamanhos de amostra simulados a taxa de risco é superior ao recomendado. Também é possível observar que quando a assimetria aumenta, tem-se um aumento de risco.

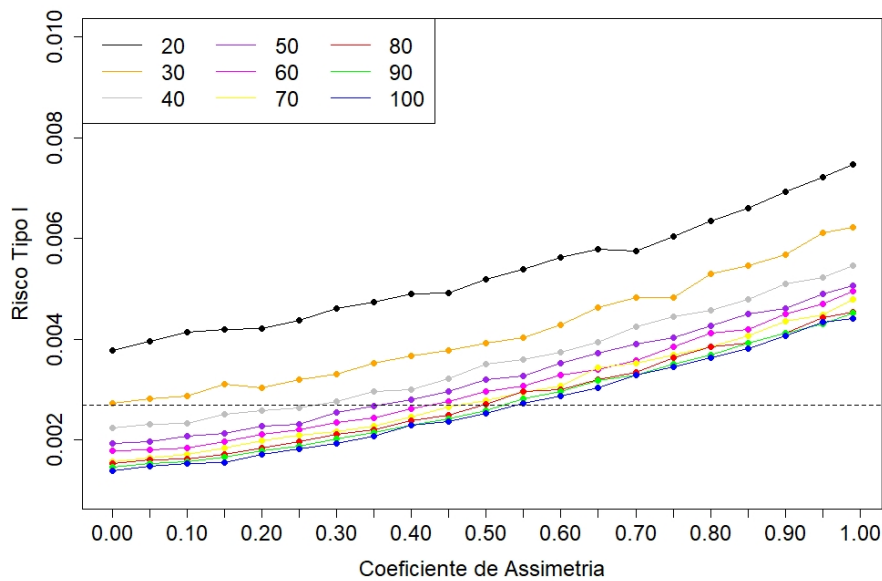


Figura 1: Risco tipo I do gráfico de controle de medidas individuais de Shewhart em função do número de amostras e coeficiente de assimetria γ_1 .

Os resultados destas simulações vão de encontro aos obtidos por Padgett et al.(1992), em que os riscos podem ser muito grandes mesmo para um processo não-normal. Mesmo quando considerado os dados normais, é necessário pelo menos 40 observações para obter gráfico de controle com taxa de risco tipo I dentro do estabelecido.

A taxa média de risco tipo I do gráfico de controle de medidas individuais com correção de assimetria em função do número de amostras e coeficiente de assimetria γ_1 é apresentado na Figura 2. Observa-se que para todos os tamanhos de amostra, os valores da taxa de risco tipo I foram inferiores ao gráfico de Shewhart (Figura 1). Também é possível observar que, a taxa de risco tipo I é superior a 0,0027 apenas quando considerado 20 amostras para calcular os limites de controle. Ainda, nos demais cenários simulados, independente de γ_1 , todos os valores são inferiores a 0,0027.

Os resultados destas simulações vão de encontro aos obtidos por Karagöz e Hamurkaroglu (2012) com as distribuições Weibull, Gama e Lognormal, que realizou um estudo de simulação com o método da correção de assimetria em gráficos de controle, em que a taxa de risco tipo I foi inferior ao obtido pelo método de Shewhart e ao valor nominal de 0,0027.

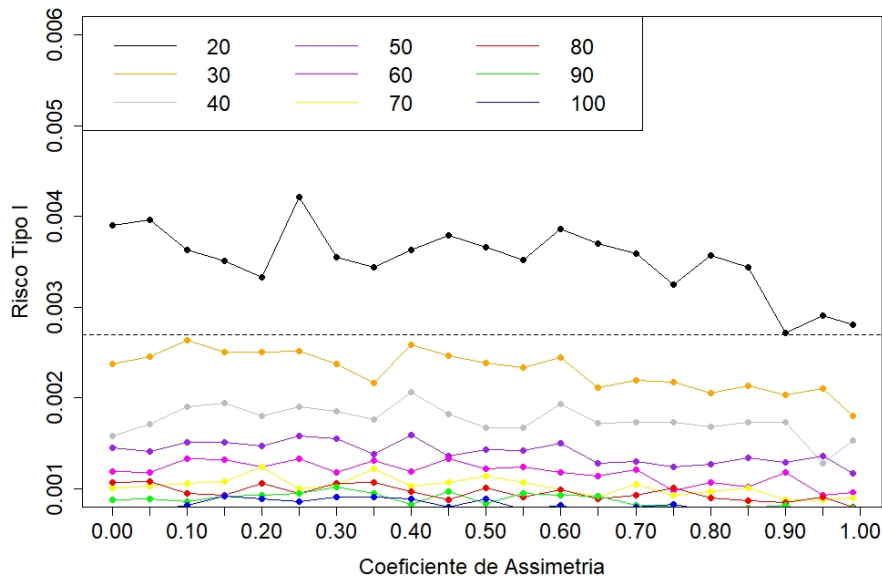


Figura 2: Risco tipo I do gráfico de controle de medidas individuais de Shewhart em função do número de amostras e coeficiente de assimetria γ_1 .

Conclusões

Nas simulações realizadas, observou-se que no gráfico de controle de medidas individuais de Shewhart a medida que a assimetria aumenta tem-se um aumento desse risco tipo I. Nestes casos se o coeficiente de assimetria for superior a 0,55, independente do tamanho de amostra, o risco é superior ao nominal e quando os dados são simétricos é necessário 40 amostras para ter um risco inferior ao nominal.

Para o gráfico de medidas individuais com correção de assimetria apenas para amostra de tamanho 20 tem-se uma taxa de erro tipo I superior a 0,0027, mesmo neste caso tem-se uma performance melhor que o de Shewhart. Assim, este método é preferível ao método tradicional de Shewhart ao lidarmos com dados assimétricos em cartas de controle para valores individuais.

Agradecimentos

Agradecemos a FAPEMAT pela bolsa de iniciação científica.

Referências bibliográficas

AZZALINI, A. The skew-normal distribution: Probability. In *The Skew-Normal and Related Families* (Institute of Mathematical Statistics Monographs, pp. 24-56). Cambridge: Cambridge University Press. 2013

BARBOSA, E. P. P.; GNERI, M. A.; MENEGUETTI, A. . Range control charts revisited: Simpler Tippett-like formulae, its practical implementation, and the study of

Sigmae, Alfenas, v.8, n,2, p. 474-480, 2019.

64ª Reunião da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria (RBRAS).
18º Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agrônoma (SEAGRO).

false alarm. *Communications in Statistics*, v.42, n.2, p. 247-262, 2013.

BURR, J. *Elementary Statistical Quality Control*, 2nd Edition. CRC Press, Statistics: A Series of Textbooks and Monographs. 2004.

KAN, E.; YAZICI, B.. The individuals control chart in case of non-normality. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, v. 5, n. 2, p. 542-550, 2006.

KARAGÖZ, D.; HAMURKAROGLU, C. Control charts for skewed distributions: Weibull Gamma, and Lognormal. *Metodoloski zvezki - Advances in Methodology and Statistics*, v. 9, n.2, p. 95-106, 2012.

MAST, J. D.; ROES, K. C. B. Robust individuals control chart for exploratory analysis. *Quality Engineering* , v.16, p. 407-421, 2004.

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico da qualidade*. 7 ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2016.

PADGETT, C. S., THOMBS, L. A. , PADGETT, W. J. On the α -risks for Shewhart control charts. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. v. 21, n. 4, p. 1125-1147, 1992.

TSAI , T. Skew normal distribution and the design of control charts for averages. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, v. 14, n. 1, p. 49-63, 2007.

YAZICI, B.; KAN, B. Asymmetric control limits for small samples. *Quality & Quantity*, v. 43, p. 865-874, 2009.

R CORE TEAM. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2018. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

Sigmae, Alfenas, v.8, n,2, p. 474-480, 2019.

64^a Reunião da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria (RBRAS).
18^o Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica (SEAGRO).