Desmistificando o Determinante de uma Matriz

Evandro Monteiro

Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas, Campus Alfenas, Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700, CEP 37130-000 - Alfenas - MG. E-mail: evandromonteiro@unifal-mg.edu.br.[†]

Resumo: *A teoria dos determinantes teve origem em meados do século XVII, quando eram estudados processos de resolução de sistemas de equações lineares. O determinante de uma matriz consiste em associar à cada matriz quadrada* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *um número real, denotado por* $\det A$*, que satisfaz as propriedades: 1. Se* B *é obtida da matriz* A *permutando-se duas linhas (ou colunas) então* $\det B = -\det A$*; 2. Se uma das linhas (ou colunas) da matriz* A *é combinação linear das demais então* $\det A = 0$*; 3.* $\det I = 1$*, onde* I *é a matriz identidade. Se a matriz* A *tem ordem* $n = 1$ *então* $\det A = a_{11}$*. No caso* $n = 2$*,* $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *e no caso* $n = 3$ *o cálculo pode ser obtido pela Regra de Sarrus. Para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem* $n > 3$ *utilizamos um processo mais complicado dado pelo Teorema de Laplace e quanto maior a ordem da matriz, maior é o trabalho para o cálculo do determinante. O objetivo deste texto é apresentar o determinante como uma função multilinear e alternada tal que* $\det I = 1$ *e, além disso, mostrar que esta função coincide com o determinante já conhecido. Para isso, utilizaremos conceitos de Álgebra Linear. Finalizaremos este trabalho comparando o cálculo do determinante de uma matriz de ordem* $n > 3$ *utilizando Teorema de Laplace e através da definição apresentada, verificando-se o quanto é mais simples o cálculo do determinante neste segundo processo.*

Palavras-chave: Determinante de uma matriz; Teorema de Laplace; função multilinear; função alternada.

Abstract: *Determinant's originated in the mid-seventeenth century when processes were studied to solve linear equations systems. The determinant of a matrix is a function that associate every square matrix* A *to a real number, denoted by* $\det A$*, for which the next properties holds: 1. If* B *is a matrix obtained from* A *exchanging two rows (or columns) then* $\det B = -\det A$*; 2. If one of the rows (or columns) of* A *is a linear combination of the other then* $\det A = 0$*; 3.* $\det I = 1$*, where* I *is the identity matrix. If the matrix* A *has order* $n = 1$ *then* $\det A = a_{11}$*. In the case* $n = 2$*,* $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *and if* $n = 3$ *is given by Sarrus Rule. For the calculation of the determinant of a matrix of order* $n > 3$ *we use a more complicated procedure given by Laplace's Theorem and as higher is the a order matrix as greater is the labor for calculation of it's determinant. The objective of this paper is to present the determinant as a multilinear and alternate function such that* $\det I = 1$ *and, moreover, show that this function coincides with the usual determinant. We use concepts of Linear Algebra. We conclude this study comparing calculation of determinant of a matrix of order* $n > 3$ *by Laplace's Theorem and by this definition abstract, verifying that this one is simpler than the other.*

Keywords: Determinant of a matrix, Laplace's Theorem; multilinear function; alternate function.

[†]Este trabalho trata-se de um minicurso oferecido na I Semana da Matemática da Unfal-MG.

Introdução

A teoria dos determinantes teve origem em meados do século XVII, quando eram estudados processos de resolução de sistemas lineares de n equações a n incógnitas. Posteriormente, ele foi identificado com a área de um paralelogramo ou o volume de um paralelepípedo e depois, de forma definitiva, como a função D multilinear alternada satisfazendo $D(I) = 1$, onde I denota a matriz identidade de ordem n. A função determinante consiste em associar a cada matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ sobre um anel comutativo com identidade K um escalar $\alpha \in K$. Por simplicidade K será o corpo $\mathbb{R}$, quando nada for dito em contrário.

No ensino médio aprendemos uma ferramenta para o cálculo de determinantes de matrizes.

Exemplo 1 *Se* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, *então* $D(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *(ROSSO Jr.; FURTADO, 2011).*

Exemplo 2 *Se* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, *então* $D(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Essa fórmula é conhecida como Regra de Sarrus (ROSSO Jr.; FURTADO, 2011).

Para matrizes de ordem maior que 3 temos o Teorema de Laplace (ROSSO Jr.; FURTADO, 2011) que permite calcular o determinante. O objetivo aqui é mostrar que existe uma única função D multilinear alternada satisfazendo $D(I) = 1$, e que esta coincide com o determinante usual que é visto no ensino médio. Abordaremos o cálculo de determinantes utilizando esta definição, que simplifica o cálculo de determinantes de matrizes de ordem grande.

Função Determinante

Definições Preliminares

No que segue abordaremos algumas definições para que possamos entender essa teoria. Tais definições e resultados são baseados nas referências Bueno (2006), Hoffman e Kunze (1979) e Lima (2000).

Definição 3 (Forma n-linear) *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma forma n-linear no espaço vetorial E é uma função*

$$f : E \times \ldots \times E \to \mathbb{R},$$

definida no produto cartesiano $E \times \ldots \times E = E^n$ que é linear em cada uma de suas variáveis.

A função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x.y$ é uma forma bilinear.

Observação 4 *Utilizaremos a definição de n-linear para uma função D, que associa cada matriz A quadrada de ordem n a um número real, da seguinte forma: Diremos que D é n-linear se para cada i, $1 \leq i \leq n$, D é uma função linear da i-ésima linha quando as outras $(n-1)$ linhas são mantidas fixas.*

Por exemplo, se $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é uma matriz quadrada de ordem n e cada $\alpha_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in})$ é a i-ésima linha então D é n-linear se, e somente se,

$$D(\alpha_1, \ldots, c\alpha_i + \beta_i, \ldots, \alpha_n) = cD(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) + D(\alpha_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \alpha_n).$$

Exemplo 5 *Determinar todas as funções bilineares (ou 2-lineares) sobre as matirizes 2×2 com coeficientes em $\mathbb{R}$.*

Considere $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Seja D uma função bilinear. Então

$$\begin{aligned} D(A) &= D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + a_{12}D\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{21}D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{11}a_{22}D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12}a_{21}D\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}a_{22}D\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, todas as formas bilineares no conjunto $M_2(\mathbb{R})$ ficam determinadas pelos valores que D assume nas matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Definição 6 (Função Alternada) *Seja D uma função n-linear. Dizemos que D é alternada (ou alternante) se as duas condições seguintes são verificadas:*
(a) $D(A) = 0$ sempre que duas linhas de A forem iguais;
(b) Se A' é uma matriz obtida trocando duas linhas de A, então $D(A') = -D(A)$.

Observação 7 *Toda função que satisfaz (a), automaticamente satisfaz (b). Em geral (a) não é uma consequência de (b).*

De fato, basta apenas trocar as linhas c_i e c_j e calcular $D(c_1, \ldots, c_i + c_j, \ldots, c_j + c_i, \ldots, c_n)$.

Por outro lado, se o corpo K satisfaz $1 + 1 \neq 0$ então (b) implica (a).
Considere $K = \mathbb{Z}_2$ e o conjunto matrizes $M_2(\mathbb{Z}_2)$ definindo $D(\epsilon_i, \epsilon_j) = 1$, $\forall i, j = 1, 2$ temos que D é bilinear satisfaz (b) e não satisfaz (a), onde ϵ_i representa uma linha da matriz 2×2 que tem 0 em todas as colunas, exceto na i-ésima.

Observação 8 *Notemos que no exemplo acima temos*

$$D(A) = a_{11}a_{22}D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - a_{12}a_{21}D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 9 (Função Determinante) *Seja $D : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Dizemos que D é uma função determinante se D é n-linear, alternada e $D(I) = 1$.*

Mostraremos mais adiante que existe uma única função determinante sobre $M_n(\mathbb{R})$.
Isto pode ser visto facilmente nos casos $n = 1$ e $n = 2$.

Exemplo 10 *Seja D a função determinante definida sobre $M_3(\mathbb{R})$. Seja*

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

então $D(A) = x^4 + x^2$.

Existência da Função Determinante

Nesta etapa do trabalho estamos interessados em mostrar que realmente existe uma função $D : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que é n-linear e alternada.

Definição 11 *Sejam $n > 1$ e A é uma matriz $n \times n$. Indiquemos por $A(i|j)$ a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida de A retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Se D é uma função $(n-1)$-linear então definimos $D_{ij}(A) = D[A(i|j)]$.*

Teorema 12 *Seja $n > 1$ e seja D uma função $(n-1)$-linear alternada sobre as matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Para cada $1 \leq j \leq n$, a função E_j definida por*

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A) \tag{1}$$

é uma função n-linear alternada sobre as matrizes $n \times n$ A. Se D é uma função determinante, então cada E_j também é.

Antes da prova do Teorema 12 precisamos de um lema para auxiliar na demonstração deste.

Lema 13 *Seja D uma função n-linear sobre as matrizes $n \times n$. Suponhamos que D seja tal que $D(A) = 0$ sempre que duas linhas adjacentes de A sejam iguais. Então D é alternada.*

Demonstração: A prova do lema consiste em mostrar que $D(A) = 0$ quando duas linhas quaisquer de A são iguais e que $D(B) = -D(A)$ onde B é obtida de A permutando-se duas linhas de A.

Suponhamos inicialmente que B é uma matriz obtida de A trocando duas linhas adjacentes. Digamos que $A = (l_1, \ldots, l_k, l_{k+1}, \ldots, l_n)$, (onde l_i é a i-ésima linha da matriz A) e $B = (l_1, \ldots, l_{k+1}, l_k, \ldots, l_n)$. Então:

$$\begin{aligned}
0 &= D(l_1, \ldots, l_k + l_{k+1}, l_k + l_{k+1}, \ldots, l_n) \\
&= D(l_1, \ldots, l_k, l_k, \ldots, l_n) + D(l_1, \ldots, l_k, l_{k+1}, \ldots, l_n) \\
&+ D(l_1, \ldots, l_{k+1}, l_k, \ldots, l_n) + D(l_1, \ldots, l_{k+1}, l_{k+1}, \ldots, l_n) \\
&= D(A) + D(B),
\end{aligned}$$

o que implica que $D(B) = -D(A)$.

Assuma, agora, que B é obtida de A permutando-se as linhas i e j de A com $i < j$. Podemos obter B de A por uma sucessão de trocas de pares de linhas adjacentes. Inicialmente trocamos as linhas i e $i+1$ e continuamos até que a matriz esteja da seguinte forma

$$(l_1, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_j, l_i, l_{j+1}, \ldots, l_n,$$

o que requer $k = j - i$ trocas de linhas adjacentes. Agora, deslocamos a linha l_j para a i-ésima posição usando $k - 1$ permutações adjacentes. Desta forma obtivemos B de A por meio de $k + (k-1) = 2k - 1$ trocas de linhas adjacentes. Portanto,

$$D(B) = (-1)^{2k-1} D(A) = -D(A).$$

No que segue provaremos que se A é uma matriz com duas linhas iguais então $D(A) = 0$. Seja A uma matriz com duas linhas iguais, digamos $l_i = l_j$, com $i < j$. Se $j = i + 1$ então A possui duas linhas iguais adjacentes o que por hipótese implica $D(A) = 0$. Se $j > i + 1$ trocamos as linhas l_{i+1} e l_j e a matriz resultante B possui duas linhas iguais e adjacentes, portanto $D(B) = 0$. Logo, $D(A) = -D(B) = 0$, o que finaliza a prova do lema.

□

No que segue abordaremos a prova do Teorema 12.

Demonstração: (Teorema 12) Iremos mostrar inicialmente que cada função E_j, $j = 1 \dots n$, é n-linear. Seja A uma matriz com linhas $l_1, \dots, l_n$.

Afirmação: E_j é linear na k-ésima linha. De fato, suponha que $l_k = \alpha l_{k_1} + l_{k_2}$, onde $l_{k_1} = (a_{k1} \ \dots \ a_{kn})$ e $l_{k_2} = (b_{k1} \ \dots \ b_{kn})$. Denotaremos $A = (l_1, \dots, l_k, \dots, l_n)$. Assim,

$$\begin{aligned}
E_j(A) &= E_j(l_1, \dots, l_k, \dots, l_n) = E_j(l_1, \dots, \alpha l_{k_1} + l_{k_2}, \dots, l_n) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(l_1, \dots, \alpha l_{k_1} + l_{k_2}, \dots, l_n) \\
&+ (-1)^{k+j} (\alpha a_{kj} + b_{kj}) D_{kj}(l_1, \dots, \alpha l_{k_1} + l_{k_2}, \dots, l_n) \\
&+ \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(l_1, \dots, \alpha l_{k_1} + l_{k_2}, \dots, l_n) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+j} \alpha a_{ij} D_{ij}(l_1, \dots, l_{k_1}, \dots, l_n) + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(l_1, \dots, l_{k_2}, \dots, l_n) \\
&+ (-1)^{k+j} \alpha a_{kj} D_{kj}(l_1, \dots, l_{k_1}, \dots, l_n) + (-1)^{k+j} b_{kj} D_{kj}(l_1, \dots, l_{k_2}, \dots, l_n) \\
&+ \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha a_{ij} D_{ij}(l_1, \dots, l_{k_1}, \dots, l_n) + \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(l_1, \dots, l_{k_2}, \dots, l_n) \\
&= \alpha E_j(l_1, \dots, l_{k_1}, \dots, l_n) + E_j(l_1, \dots, l_{k_2}, \dots, l_n),
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Se D é uma função alternada então para mostrar que E_j é alternada basta demonstrar que $E_j(A) = 0$ sempre que A tiver duas linhas iguais e adjacentes e utilizar o Lema 13. Suponhamos que A é uma matriz tal que as linhas l_k e l_{k+1} sejam iguais. Se $i \neq k$ e $i \neq k+1$, a matriz $A(i|j)$ tem duas linha iguais e então $D_{ij}(A) = 0$. Portanto,

$$E_j(A) = (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{k+1+j} a_{(k+1)j} D_{(k+1)j}(A).$$

Como $l_k = l_{k+1}$ segue que $a_{kj} = a_{(k+1)j}$ e $A(k|j) = A(k+1|j)$, o que implica que $E_j(A) = 0$. Assim, aplicando o Lema 13 concluímos que a função E_j é alternada para todo $j = 1, \dots, n$.

Resta-nos verificar que D é uma função determinante, isto é, se $D(I) = 1$ então $E_j(I) = 1$.

De fato,

$$E_j(I) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} D_{ij}(I) = (-1)^{j+j} D_{ij}(I) = (-1)^{2j} = 1,$$

pois se $i \neq j$ a matriz $A(i|j)$ terá a j-ésima linha com todos elementos nulos.

Portanto, se D é uma função determinante então cada E_j também o é.

□

Corolário 14 *Sejam $K = \mathbb{R}$ e n um inteiro positivo. Existe pelo menos uma função determinante sobre $M_n(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Demonstramos a existência de uma função determinate sobre as matrizes 1×1 e mesmo sobre as matrizes 2×2. O Teorema 12 nos diz explicitamente como construir a função determinante sobre as matrizes $n \times n$, partir de uma função determinante sobre as matrizes $(n-1) \times (n-1)$. O corolário decorre por indução. □

Exemplo 15 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

uma matriz 3×3 *sobre* $\mathbb{R}$. *Definindo*

$$E_1(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$E_2(A) = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$E_3(A) = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Unicidade da Função Determinante

Na seção anterior mostramos a existência da função determinante. Para uma matriz quadrada de ordem n mostramos que cada E_j $(j = 1, \ldots, n)$ é uma função determinante. Nesta seção estamos interessados em mostrar que na verdade todas essas funções $E_j^{\prime s}$ são iguais. Isso é facilmente visto no casos $n = 1$ e $n = 2$ (vide Observação 8).

Definição 16 *Seja* $\Gamma = \{1, 2, \ldots, n\}$, *ou mais geralmente um conjunto* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *com* n *elementos distintos. Uma* **permutação** *é uma aplicação sobrejetora* $p : \Gamma \to \Gamma$.

A notação que usaremos para uma permutação $p : \Gamma \to \Gamma$ é

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

ou uma matriz $A = (a_{ij})$, com $a_{ij} = 0$ se $i \neq p_j$ e $a_{ij} = 1$, se $i = p_j$, chamada de representação matricial da permutação p ou matriz da permutação p.

Exemplo 17 *Considere a permutação*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A permutação p *é representada pela matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposição 18 *A composta de duas permutações do conjunto* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *equivale à multiplicação das matrizes de suas permutações.*

A demonstração da proposição anterior pode ser encontrada em Bueno (2006), página 62.

Definição 19 *Uma* **transposição** *é uma permutação* $\tau : \Gamma \to \Gamma$ *tal que existem dois elementos* $i, j \in \Gamma$ *com* $\tau_i = j$, $\tau_j = i$ *e* $\tau_k = k$, $\forall k \in \Gamma$, *com* $k \neq \{i, j\}$.

Lema 20 *Se* D_1 *e* D_2 *forem funções* n*-lineares, alternadas e* $D_1(I) = D_2(I)$, *então* $D_1(A) = D_2(A)$ *para toda matriz* $n \times n$ *de permutação* A.

Demonstração: Seja A uma matriz de permutação $n \times n$. Uma transposição corresponde a troca de duas linhas da matriz A e altera o sinal de seu determinante. Claramente um número finito (no máximo $n-1$) de transposições transforma a matriz A na matriz identidade. Se k tranposições forem utilizadas nesse processo, temos

$$D_1(A) = (-1)D_1(A_1) = D_1(A_2) = \ldots = (-1)^k D_1(I),$$

onde A_1 tem primeira linha com $e_1 = (1\ 0\ 0\ \ldots\ 0)$, A_2 tem primeira linha e_1 e segunda linha $e_2 = (0\ 1\ 0\ \ldots\ 0)$, etc.

Como o mesmo cálculo vale para $D_2(A)$, resulta que as funções coincidem pois $D_1(I) = D_2(I)$. □

Teorema 21 *Sejam D_1 e D_2 funções n-lineares, alternadas tais que $D_1(I) = D_2(I)$, então $D_1 = D_2$.*

Demonstração: Sejam $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{R}^n$ vetores arbitrários. Então

$$\begin{array}{rcl} l_1 & = & a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n \\ l_2 & = & a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ l_n & = & a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{array}$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} D_1(l_1, \ldots, l_n) & = & a_{11}D_1(e_1, l_2, \ldots, l_n) + a_{12}D_1(e_2, l_2, \ldots, l_n) \\ & + & \ldots + a_{1n}D_1(e_n, l_2, \ldots, l_n) \\ & = & \displaystyle\sum_{1_i, 2_i, \ldots n_i = 1}^{n} a_{11_i}a_{22_i}\ldots a_{nn_i}D_1(e_{1_i}, e_{2_i}, \ldots, e_{n_i}). \end{array}$$

Repetindo-se o mesmo cálculo para D_2 resulta na mesma igualdade para D_2. Segue pelo Lema 20 que

$$D_1(e_{1_i}, e_{2_i}, \ldots, e_{n_i}) = D_2(e_{1_i}, e_{2_i}, \ldots, e_{n_i}).$$

□

Decorre deste teorema o seguinte corolário.

Corolário 22 *Existe uma única função determinante.*

Notemos que pelo Teorema 12 garantimos a existência de n funções determinante para o conjunto das matrizes $n \times n$, pois cada E_j, $j = 1, \ldots, n$ é uma função determinante. No entanto, o Corolário 22 nos mostra a unicidade deste função, ou seja, todas as funções $E_j{}'^s$ são iguais.

Na próxima seção abordaremos as principais propriedades da função determinante no conjunto das matrizes $n \times n$.

Propriedades do Determinante de uma Matriz

Definição 23 *Sejam D a função determinante e $A = (l_1, \ldots, l_n)$ uma matriz $n \times n$ denotada por meio de suas linhas. Definimos*

$$detA = D(l_1, \ldots, l_n).$$

Definição 24 *Sejam p uma permutação e A a matriz que representa p. Definimos o* **sinal** *da permutação p por*

$$\epsilon(p) = \epsilon(A) := det(A).$$

Observação 25 *Tendo em vista a definição de sinal de uma permutação obtemos:*

$$D(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_p \epsilon(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}.$$

Teorema 26 (Matriz Transposta): *Seja A uma $n \times n$ matriz e A^t a transposta da matriz A. Então*

$$det A = det A^t.$$

Demonstração: Segue da equação descrita na Observação 25 que

$$det A = \sum_p \epsilon(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}.$$

Além disso, se $p(i) = j$ então $i = p^{-1}p(i) = p^{-1}(j)$. Denotando $p(i)$ por p_i segue que $p^{-1}(j)$ será denotado por p_j^{-1}, deste modo $i = p_j^{-1}$. Assim, se $p_1 = j$ então $a_{1p_1} = a_{p_j^{-1}j}$. Repetindo esse processo para os outros índices a_{ip_i}, obtemos

$$\sum_p \epsilon(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n} = \sum_p \epsilon(p) a_{p_1^{-1}1} a_{p_2^{-1}2} \ldots a_{p_n^{-1}n}.$$

Note que se p percorrer todas as permutações de $\{1, \ldots, n\}$ o mesmo ocorre com p^{-1}. Uma vez que o sinal de p e p^{-1} é o mesmo, resulta que

$$det A = \sum_p \epsilon(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n} = \sum_p \epsilon(p^{-1}) a_{p_1^{-1}1} a_{p_2^{-1}2} \ldots a_{p_n^{-1}n} = det A^t,$$

pois cada uma de suas entradas é da forma a_{ji} ao invés de a_{ij}.

□

Observação 27 *Segue deste teorema que a mesma definição de função determinante poderia ser dada utilizando as colunas da matriz ao invés das linhas, conforme fizemos.*

Teorema 28 Produto de Matrizes: *Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes $n \times n$. Então*

$$det(AB) = (det A)(det B).$$

Demonstração: Sejam α_i, β_i e γ_i as i-ésimas linhas das matrizes A, B e BA, respectivamente.

Notemos que a i-ésima linha de uma matriz A é obtida ao se calcular o seu valor em e_i, ou seja,

$$(a_{i1} \ \ldots \ a_{in}) = (0 \ \ldots \ 0 \ 1 \ 0 \ \ldots \ 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = e_i A,$$

onde o número 1 que aparece na matriz linha $(0 \ \ldots \ 0 \ 1 \ 0 \ \ldots \ 0)$ está localizado na i-ésima posição.

Logo,

$$e_i(BA) = (e_i B)A = \beta_i A.$$

Por definição

$$\gamma_i = b_{i1}\alpha_1 + \ldots + b_{in}\alpha_n,$$

onde b_{ij} são os elementos da matriz B.

Assim, se D denotar a função determinante, temos

$$\begin{aligned} det(BA) &= D(b_{11}\alpha_1 + \ldots + b_{1n}\alpha_n, \ldots, b_{n1}\alpha_1 + \ldots + b_{nn}\alpha_n) \\ &= \sum_p b_{1p_1} \ldots b_{np_n} D(\alpha_{p_1}, \ldots, \alpha_{p_n}) \\ &= \sum_p \epsilon(p) b_{1p_1} \ldots b_{np_n} D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ &= detA \sum_p \epsilon(p) b_{1p_1} \ldots b_{np_n} \\ &= detA.detB \\ &= detB.detA. \end{aligned}$$

□

Exemplo: Cálculo de Determinante

Nesta seção abordaremos o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 4 utilizando as duas formas de calcular, isto é, utilizando a Fórmula de Laplace e a teoria apresentada neste trabalho.

Considere a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Abordaremos o cálculo do determinante desta matriz utilizando os dois métodos citados acima.

Utilizando que a função determinante é uma função multilinear, alternada tal que $detI = 1$:

Faremos algumas observações antes do proferido cálculo:

Observação 29 1. *As linhas da matriz podem ser escritas como combinação linear dos vetores canônicos do $\mathbb{R}^4$, conforme a 1^a linha da matriz*

$$(0\ 1\ 2\ 1) = 0e_1 + 1e_2 + 2e_3 + 1e_4.$$

2. *Utilizando o fato que a função determinante é multilinear então o cálculo do determinante da matriz acima será a soma de cálculos de determinantes onde apenas um elemento é não nulo em cada linha.*

3. *Do item acima e como a função determinante é alternada então se tivermos dois elementos não nulos na mesma coluna, uma linha será múltipla da outra, então determinante desta matriz será zero, por isso não aparecerá no cálculo.*

4. *Novamente como a função determinante é multilinear os escalares que multiplicam cada linha "saem do determinante"e, portanto, a matriz obtida só possuem escalares* 0 *ou* 1.

5. *Como a função determinante é alternada então permutamos as linhas até obter a matriz identidade.*

6. *Se houver dúvida do que foi utilizado em um passo do cálculo do determinante, este está justificado em um dos ítens desta observação.*

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&+ det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&+ det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&= -3det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&- 12det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 4det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&+ 6det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= -3det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&+ 12det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 4det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 4det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&- 6det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&= -3-2+1+12-4-4-6+2-1 = 15-20\\
&= -5.
\end{aligned}
$$

Utilizando a Fórmula de Laplace

Lembremos que a Fórmula de Laplace é dada por

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A),\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

Assim, utilizando $j = 1$ na fórmula acima calculemos o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+1}a_{i1}det(A(i|1)) \\ &= -3det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -3(1+2-4) + 2(1-1-2) - (4+1-1) \\ &= -5, \end{aligned}$$

onde neste último cálculo utilizamos a Regra de Sarrus.

Conclusões

Abordamos neste trabalho duas formas de calcular o determinante de uma matriz. A primeira muito conhecida e que é ensinada no ensino médio chamada de forma de Laplace que permite o cálculo do determinante de uma matriz de ordem n se conhecermos o determinante de uma matriz de ordem $n-1$. Por outro lado, quando olhamos para o determinante como uma função multilinear, alternada e que avaliado na identidade vale 1, não precisamos conhecer determinantes de submatrizes para o cálculo do mesmo.

Vimos no exemplo de uma matriz de ordem 4 que talvez a Fórmula de Laplace seja mais simples aplicar, no entanto, utilizamos a Regra de Sarrus sem exibir os cálculos. Já no caso de uma matriz de ordem $n \geq 5$ este cálculo já fica mais complicado do que o método apresentado neste minicurso.

Agradecimentos

Agradeço a comissão organizadora da *I SEMANA DA MATEMÁTICA* pela oportunidade de apresentar este minicurso e aos alunos que participaram do mesmo.

Referências

BUENO, H. P. *Álgebra Linear: Um segundo curso.* Rio de Janeiro: Editora SBM, 2006.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear.* Tradução de Renate Watanabe. Segunda Edição. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear.* Quarta edição. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, CNPQ, 2000.

ROSSO Jr., A. C.; FURTADO, P. *Matemática: uma ciência para vida.* Vol 2. Editora Harbra, 2011.