Cálculo de Ordem Fracionária e Aplicações

José Paulo C. dos Santos[1†], *Andrea Cardoso*[1], *Estela C. Ferreira*[2], *Janaína C. Franco*[2], *José Carlos Souza Jr.*[1]

[1] *Docente do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas.*
[2] *Discente do curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alfenas.*

Resumo: *O objetivo desse trabalho é divulgar a teoria de Calculo Fracionário. O texto contém as principais definições e alguns resultados importantes para um primeiro estudo da teoria de integrais e derivadas de ordem arbitrária.*

Palavras-chave: Calculo Fracionário, Integral Fracionária, Derivada de Riemann-Liouville, Derivada de Caputo, Transformada de Laplace.

Abstract: *The objective of this paper is to promote the theory of Fractional Calculus. The text contains the main definitions and some important results for a first study of the theory of integrals and derivatives of arbitrary order.*

Keywords: Fractional Calculus, Fractional Integral, Riemann-Liouville Derivative, Caputo Derivative, Laplace Transform.

Introdução

O Cálculo Fracionário tem sua origem 1695 com uma discussão entre Leibniz e L'Hospital tentando definir de que forma podemos derivar 1/2 uma função. Desde dessa época ilustres matemáticos como Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, dentre outros, contribuíram para o desenvolvimento dessa teoria que se preocupa em estudar integrais e derivadas de ordens arbitrárias. Caputo (1969) propôs uma nova definição para a derivada de ordem fracionária que aplicou a problemas de viscoelasticidade e sismologia (CAPUTO, 1992). Lorenzo (1998) e Lorenzo e Hartley (2000) propuseram uma interpretação geométrica para a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov que mostrou-se bastante eficiente para resolver problemas numéricos (CIESIELSKI; LESZCZYNSKI, 2003).

A partir das definições introduzidas por Caputo e Grünwald-Letnikov é possível modelar diversos fenômenos naturais a partir do cálculo fracionário, visto que o mesmo oferece uma descrição mais fina que aquela feita a partir do cálculo usual, tendo em vista que derivadas fracionárias proporcionam uma excelente descrição para efeitos de memória e propriedades hereditárias de diversos materiais, como por exemplo, polímeros. Dentre as funções relacionadas ao cálculo fracionário, uma das mais importantes é a função de Mittag-Leffler (1903) que representa uma generalização para a função exponencial e tem papel fundamental no estudo de equações diferenciais de ordem não-inteira. Importantes resultados e generalizações foram obtidos, através do cálculo fracionário, em diversas áreas do conhecimento.

† *Autor correspondente:* zepaulo@unifal-mg.edu.br.

Mainardi (1996) e Gorenflo e Mainardi (1997) resolveram quatro equações associadas a vários fenômenos físicos substituindo derivadas de ordem inteira por derivadas de ordem não-inteira nas respectivas equações diferenciais associadas a estes fenômenos, dentre elas destacam-se as equações diferenciais ordinárias associadas ao relaxamento e à oscilação, e equações diferenciais parciais associadas com difusão e propagação de onda, todas elas discutidas em termos da metodologia da transformada de Laplace. Caputo (1992) discutiu a equação associada ao movimento de um ponto oscilando livremente em um meio viscoso na versão fracionária, isto é, trocando o termo de viscosidade por uma derivada de ordem fracionária. Orsingher e Beghin (2004) estudam as equações temporais fracionárias do telégrafo e processos envolvendo a equação do telégrafo com tempo browniano.

Há áreas onde a utilização do cálculo fracionário é indispensável, como por exemplo, em alguns sistemas de alta energia e na teoria dos fractais onde a derivada fracionária tem outra interpretação, especialmente na modelagem de sistemas dinâmicos e estruturas porosas. Chen (2006) investiga a origem da difusão anômala, quando há crescimento não-linear da variância no decorrer do tempo, através da conjectura de duas hipóteses: invariância fracionária e equivalência fractal, propõe um modelo utilizando o conceito de derivada de Hausdorff e discute o problema de Cauchy associado à equação de difusão anômala unidimensional. Wyss (2000) descreve uma aplicação do cálculo fracionário em matemática financeira obtendo a solução da equação de Black-Scholes utilizando a transformada de Laplace.

Embora o cálculo fracionário tenha apresentado considerável evolução, algumas questões permanecem em aberto. Por exemplo, se é possível obter uma interpretação geométrica para a derivada de ordem não-inteira. Oldham e Spanier (1974) é talvez o principal texto no tema e inclui inúmeras aplicações. Podlubny (1999) é um texto completo e rigoroso sem deixar de ter o enfoque bastante prático. E no campos da equações diferenciais abstratas, os trabalhos de Agarwal, Santos e Cuevas (2012), Andrade e Santos (2012), Santos, Cuevas e Andrade (2011) e Santos e Cuevas (2012). A principal referência deste trabalho é o texto Camargo (2009), primeiro escrito em português a fazer um estudo completo e detalhado sobre integrais, derivadas de ordens arbitrárias, equações diferenciais de ordem não-inteira e suas aplicações.

Tendo em vista que o cálculo fracionário é uma teoria recente e em desenvolvimento, que a literatura em português referente à área ainda incipiente, o objetivo desse trabalho é dar um visão geral deste campo de pesquisa bem como de seu potencial campo de aplicação. O texto contém as principais definições e alguns resultados de integrais e derivadas de ordem arbitrária.

Cálculo Fracionário

Começamos esta seção introduzindo algumas definições e notações que serão usadas durante a exposição deste trabalho. Denotaremos por $\Gamma(\cdot)$ a função Gama e por $B(\cdot)$, a função Beta, definidas respectivamente por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx,$$

$$B(\alpha,\mu) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)x^{\mu}dx.$$

A função Gama possui algumas propriedades úteis para o cálculo fracionário, em particular destacamos a propriedade

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Desta forma, a função Gama estende o fatorial, ou seja, em particular para $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

As funções Beta e Gama se relacionam por meio da seguinte identidade

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Denotaremos por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)dy,$$

a convolução incompleta entre as funções $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, desde que esta expressão tenha sentido.

A transformada de Laplace de uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada pela integral

$$F(s) = \mathfrak{L}[f] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

desde que a integral exista. A variável s é denominado parâmetro da transformada. A seguir estão listadas algumas propriedades importantes da transformada de Laplace.

(i) Sabendo que $\mathfrak{L}[f] = F(s)$ e $\mathfrak{L}[g] = G(s)$ então $\mathfrak{L}[af + bg] = aF(s) + bG(s)$.

(ii) Seja $\mathfrak{L}[f] = F(s)$ então $\mathfrak{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$, para $s > a$.

(iii) $\mathfrak{L}[f] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} = F(s)$.

(iv) Seja f e f' integráveis em $[0, b]$, para todo $b > 0$, se f for de ordem exponencial, então existe $\mathfrak{L}[f'(t)] = s\mathfrak{L}[f] - f(0)$.

(v) Sejam $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, temos que

$$\mathfrak{L}[(f * g)(t)] = \mathfrak{L}[f]\mathfrak{L}[g]. \tag{1}$$

Dada uma função G se existe uma função g tal que $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, ela será denominada a transformada inversa de Laplace de G e esta inversa será denotada por $\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$.

Integral Fracionária

Agora vamos introduzir uma motivação para definição da Integral Fracionária. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e integrável em todo subintervalo de $[0, \infty)$. Denotaremos por $Jf(t)$ o seguinte operador integral

$$Jf(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

e por

$$J^k f(t) = (JJ \ldots J)f(t)$$

a composição k vezes do operador J.

A seguir vamos introduzir a definição para o operador $J^\alpha, \alpha > 0$.

Observe que

$$\begin{aligned} J^2 f(t) &= JJf(t) \\ &= \int_0^t Jf(s)ds \\ &= \int_0^t \int_0^s f(\epsilon)d\epsilon ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando o Teorema de Fubinni, obtemos

$$\begin{aligned} J^2 f &= \int_0^t \int_0^s f(\epsilon)d\epsilon ds \\ &= \int_0^t \int_\epsilon^t f(\epsilon)ds d\epsilon \\ &= \int_0^t f(\epsilon)(t-\epsilon)d\epsilon, \end{aligned}$$

é fácil ver que

$$\begin{aligned}
J^3 f &= \int_0^t \int_0^s f(\xi)(s-\xi) d\xi ds \\
&= \int_0^t \int_\xi^t f(\xi)(s-\xi) ds d\xi \\
&= \int_0^t f(\xi) \frac{(s-\xi)^2}{2} |_\xi^t d\xi \\
&= \int_0^t f(\xi) \frac{(t-\xi)^2}{2} d\xi.
\end{aligned}$$

Usando o procedimento anterior sucessivamente obtemos a seguinte expressão integral para o operador $J^n f$

$$J^n f = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds,$$

substituindo $(n-1)! = \Gamma(n)$, podemos reescrever a expressão anterior da forma

$$\begin{aligned}
J^n f &= \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Como a expressão (2) continua bem definida para $\alpha > 0$, este fato motiva a seguinte definição.

Definição 1 *A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α é definida pela integral*

$$(J^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \qquad (3)$$

Exemplo 1 *De acordo com a definição é possível calcular a integral de ordem arbitrária α, por exemplo, do monômio t^μ, com $\mu > -1$.*

$$J^\alpha t^\mu = \frac{t^{\alpha+\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}.$$

De fato, fazendo uma mudança de variáveis $u = \frac{s}{t}$, obtemos

$$\begin{aligned}
J^\alpha t^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\alpha-1}(1-\frac{s}{t})^{\alpha-1} s^\mu ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-u)^{\alpha-1}(tu)^\mu t du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha}(1-u)^{\alpha-1} t^\mu u^\mu du \\
&= \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\mu du.
\end{aligned}$$

Usando a definição da função Beta a integral acima pode ser escrita

$$\begin{aligned} J^\alpha t^\mu &= \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} B(\mu+1,\alpha) \\ &= \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu+1+\alpha)} \\ &= \frac{t^{\alpha+\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Considere a função $\Phi_\alpha(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ definida para todo $t > 0$. Fazendo o produto convolução com a função f obtemos

$$\begin{aligned} (\Phi_\alpha * f)(t) &= \int_0^t \Phi_\alpha(t-s) f(s) ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds \\ &= J^\alpha f(t). \end{aligned}$$

Portanto a definição de integral fracionária pode ser interpretada como o produto de convolução entre as funções Φ_α e f.

Utilizaremos o produto de convolução, bem como as relações entre a função Beta e Gama para demonstrar o próximo resultado que é a lei dos expoentes para integrais fracionárias. Essa lei é muito importante para o desenvolvimento da Teoria do Cálculo Fracionário.

Teorema 1 *Sejam $\alpha, \beta \geq 0$ temos que $J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta}$, em particular vale a propriedade comutativa $J^\alpha J^\beta = J^\beta J^\alpha$.*

Demonstração: Como já vimos, temos que

$$(J^\alpha f)(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t). \tag{4}$$

Agora, vamos mostrar que

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \Phi_{\alpha+\beta}(t).$$

De fato

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \int_0^t \frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dy \\ &= \int_0^t \frac{t^{\alpha-1}(1-\frac{y}{t})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dy. \end{aligned}$$

Fazendo $u = \dfrac{y}{t}$, temos

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} (ut)^{\beta-1} t du \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} t^\beta du \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du. \end{aligned}$$

Com a mudança de variável $x = 1 - u$, obtemos

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_1^0 -x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

Multiplicando e dividindo por $\Gamma(\alpha+\beta)$

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) & \\ = \frac{t^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx. & \qquad (5)\end{aligned}$$

Lembrando que a função Beta e substituindo em (5), temos que

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)}B(\alpha,\beta) \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \Phi_{\alpha+\beta}(t). \qquad (6)\end{aligned}$$

Portanto, de (4) e (6) e da propriedade associativa da convolução obtemos que

$$\begin{aligned}(J^\alpha J^\beta f)(t) &= \Phi_\alpha(t) * J^\beta f(t) \\ &= \Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) * f(t) \\ &= \Phi_{\alpha+\beta}(t) * f(t) \\ &= (J^{\alpha+\beta} f)(t).\end{aligned}$$

■

Derivada Fracionária Segundo Riemann-Liouville e Caputo

A definição de derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville é consequência direta do Teorema Fundamental do Cálculo. Sabemos desse Teorema que se $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, e se $F : [0, b] \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

então F é diferenciável e $F' = f$. Usando a notação de integral fracionária para $(Jf)(x) = \int_0^x f(s)ds$ e a notação $(Df)(t) = f'(t)$ para o operador Derivada, temos então pelo Teorema Fundamental do Cálculo que $(DJf)(t) = f(t)$. E de forma geral, é fácil ver por indução finita que para todo $m \in \mathbb{N}$ a relação

$$(D^m J^m f)(t) = f(t), \qquad (7)$$

é verdadeira, em que $D^m f = (DD \dots D)f$ é a composição m vezes do operador D ou a derivada de ordem m de f. Cabe lembrar que o operador Derivada satisfaz a leis dos expoentes $D^m D^n f = D^{m+n} f$.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tal que m é o menor inteiro maior que n e $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que admite derivadas até ordem n, usando a relação (7) temos que

$$D^{m-n} J^{m-n} f = f,$$

por outro lado aplicando o operador D^n em ambos os lados

$$D^m J^{m-n} f = D^n f,$$

como a integral fracionária pode ser definida para números não inteiros $\alpha > 0$, trocando n por α na expressão acima obtemos

$$D^\alpha f = D^m J^{m-\alpha}.$$

Portanto a discussão anterior motiva a seguinte definição formal.

Definição 2 *Seja $\beta > 0$ e n o menor inteiro maior que β, assim a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem β da função f é definida por*

$$D^{\beta}f(t) = D^{n}[J^{n-\beta}f(t)],$$

$D^{\beta}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}f(t)$, *se* $\beta = n$.

O próximo Teorema nos diz como se comporta a composição a direita e a esquerda entre a derivada e a integral fracionária de Riemann-Liouville.

Teorema 2

$$D^{\beta}J^{\beta}f = f.$$

$$J^{\beta}D^{\beta}f = f(t) - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(\beta-k+1)}t^{\beta-k}D^{m-k+1}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0}.$$

Demonstração: De fato, no primeiro caso é fácil ver que

$$D^{\beta}J^{\beta}f(t) = D^{m}J^{m-\beta}J^{\beta}f(t) = D^{m}J^{m}f(t) = f(t).$$

Por outro lado, note que

$$J^{\beta}D^{\beta}f(t) = DJ^{\beta+1}D^{\beta}f(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^t (t-s)^{\beta}D^{\beta}f(s)ds\right].$$

Usando integração por partes sucessivamente obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^t (t-s)^{\beta}D^{\beta}f(s)ds \\
= & \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^t (t-s)^{\beta}D^{m}J^{m-\beta}f(s)ds \\
= & \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\left\{(t-s)^{\beta}D^{m-1}J^{m-\beta}f(s)|_0^t - \beta\int_0^t (t-s)^{\beta-1}D^{m-1}J^{m-\beta}f(s)ds\right\} \\
= & -\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta}D^{m-1}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0} - \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}D^{m-1}J^{m-\beta}f(s)ds \\
= & -\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta}D^{m-1}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0} \\
& -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left\{(t-s)^{\beta-1}D^{m-2}J^{m-\beta}f(s)|_0^t - (\beta-1)\int_0^t (t-s)^{\beta-2}D^{m-2}J^{m-\beta}f(s)ds\right\} \\
= & -\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta}D^{m-1}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0} - \frac{1}{\Gamma(\beta)}t^{\beta-1}D^{m-2}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0} \\
& -\frac{1}{\Gamma(\beta-2)}\int_0^t (t-s)^{\beta-2}D^{m-2}J^{m-\beta}f(s)ds \\
& \vdots \\
= & -\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta}D^{m-1}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0} - \frac{1}{\Gamma(\beta)}t^{\beta-1}D^{m-2}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0}\dots \\
& -\frac{1}{\Gamma(\beta+1-(m-1))}t^{\beta-m+1}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0} - \frac{1}{\Gamma(\beta-m+1)}\int_0^t (t-s)^{\beta-m}J^{m-\beta}f(s)ds \\
= & \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(\beta+2-k)}t^{\beta-k+1}D^{m-k}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0} - J^{\beta-m+1}J^{m-\beta}f(t) \\
= & \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(\beta+2-k)}t^{\beta-k+1}D^{m-k}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0} - Jf(t).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} J^\beta D^\beta f(t) &= \frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(\beta+2-k)}t^{\beta-k+1}D^{m-k}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0} - Jf(t)\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(\beta-k+1)}t^{\beta-k}D^{m-k+1}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0} - f(t) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(\beta-k+1)}t^{\beta-k}D^{m-k+1}J^{m-\beta}f(t)|_{t=0} - f(t). \end{aligned}$$

■

Agora vamos introduzir a definição de derivada de ordem fracionária segundo Caputo.

Definição 3 *Tomando $\beta > 0$, n o menor inteiro maior que β. Nestas condições, a derivada de ordem β de f segundo Caputo é definida da seguinte maneira*

$$D_*^\beta f(x) = J^n[D^{n-\beta}f(x)].$$

Com exceção do índice *, os índices tem o mesmo significado que na derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e para $\beta = n \in \mathbb{N}$ definimos $D_*^\beta = D^n$, ou seja

$$D_*^\beta f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\beta)}\displaystyle\int_0^t \frac{f^{(n)}(s)ds}{(t-s)^{\beta+1-n}}, & n-1 < \beta < n. \\ \dfrac{d^n}{dt^n}f(t), & \beta = n. \end{cases}$$

Observação 1 *Note que a definição de Derivada Fracionária segundo Caputo é mais restritiva que a definição de Riemann-Liouville uma vez que requer a integrabilidade da derivada de ordem n da função. Sempre que utilizarmos o operador D_*^β será considerado que esta hipótese é satisfeita.*

Exemplo 2 *A derivada de ordem β segundo Caputo da função $f(x) = x^\mu$, $\mu > -1$ e $\mu \neq 0$ é $\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\beta+1)}x^{\mu-\beta}$.*

Note que

$$\begin{aligned} D^n x^\mu &= \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}x^{\mu-n}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} D_*^\beta f(x) &= J^{n-\beta}[D^n f(x)] \\ &= J^{n-\beta}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}x^{\mu-n}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}J^{n-\beta}[x^{\mu-n}] \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}\frac{\Gamma(\mu-n+1)}{\Gamma(\mu-\beta+1)}x^{\mu-\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\beta+1)}x^{\mu-\beta}. \end{aligned}$$

■

Observação 2 *A derivada segundo Riemann-Liouville e Caputo se relacionam entre si da seguinte forma*

$$D^{\beta}f(t) = D^{\beta}_{*}f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\beta}}{\Gamma(k-\beta+1)} f^{(k)}(0).$$

Por outro lado,

$$D^{\beta}f(t) = D^{\beta}g(t) \text{ se, e somente se, } f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{\beta-j},$$

com $t > 0$ *e* $m-1 < \beta < m$. *Respectivamente e possível provar que*

$$D^{\beta}_{*}f(t) = D^{\beta}_{*}g(t) \text{ se, e somente se, } f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j t^{m-j}.$$

Para mais detalhes sobre as identidades acima, veja Gorenflo e Mainardi (1997).

Funções de Mittag-Leffer

Antes de passarmos às aplicações do cálculo fracionário, veremos as funções de Mittag-Leffer, importantes funções relacionadas ao cálculo de ordem não inteira.

Definição 4 *A função de Mittag-Leffer de um parâmetro é dada por*

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)},$$

com $x \in \mathbb{R}$ *e* $x > 0$.

Note que, no caso em que $\alpha = 1$, essa função pode ser descrita da seguinte forma

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Dessa forma, podemos estender a função de Mittag-Leffer como uma generalização da função exponencial.

Definição 5 *A função de Mittag-Leffer de dois parâmetros é definida por*

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},$$

com $x \in \mathbb{R}$ *e* $x > 0$.

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrado em Diethelm (2010).

Teorema 3 *A função de Mittag-Leffer de dois parâmetros converge uniformemente para todo* $x \in \mathbb{C}$.

Observação 3 *Quando* $\beta = 1$, *temos que*

$$E_{\alpha,1}(x) = E_{\alpha}(x)$$

Observação 4 *As funções seno e cosseno hiperbólicos são casos particulares da função de Mittag-Leffer.*

$$E_{2,1}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} = \cosh(x)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = E_{2,1}(x^2)
\end{aligned}$$

E de forma similar podemos mostrar que

$$E_{2,2}(x^2) = \frac{senh(x)}{x}.$$

Transformada de Laplace da Derivada de Riemann-Liouville e Caputo

Começamos esta seção com o seguinte Lema.

Lema 1 *A transformada de Laplace da integral fracionária é dada por* $\mathfrak{L}[J^\alpha f] = s^{-\alpha}\mathfrak{L}[f]$.

Demonstração: Seja $\Phi_\alpha(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ a função definida anteriormente. Note que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[\Phi_\alpha(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha-1}dt.
\end{aligned}$$

Fazendo $u = st$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[\Phi_\alpha(t)] &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^b e^{-u}\frac{u^{\alpha-1}}{s^{\alpha-1}}\frac{du}{s}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)s^\alpha}\int_0^b e^{-u}u^{\alpha-1}du\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)s^\alpha}\Gamma(\alpha) = s^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Por outro lado usando a propriedade (1) da transformada de Laplace do produto convolução obtemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[J^{\alpha}f] &= \mathfrak{L}[(\Phi_{\alpha} * f)(t)]\\ &= \mathfrak{L}[\Phi_{\alpha}(t)]\mathfrak{L}[f(t)]\\ &= s^{-\alpha}\mathfrak{L}[f].\end{aligned}$$

■

Teorema 4 *Seja $f(t) = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})$, a transformada de Laplace dessa função é dada por*

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - a}.$$

Demonstração: Pela definição de transformada de Laplace e pela convergência uniforme da função de Mittag-Leffer temos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})] &= \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})dt\\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}\frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta+\alpha k-1}dt\end{aligned}$$

Utilizando a mudança de variável $u = st$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta+\alpha k-1}dt &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{\infty} e^{-u}\frac{u^{\beta+\alpha k-1}}{s^{\beta+\alpha k-1}}\frac{du}{s}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\beta+\alpha k-1}du\frac{1}{s^{\beta+\alpha k}}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\Gamma(\alpha k+\beta)\frac{1}{s^{\beta+\alpha k}}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{s^{\beta+\alpha k}}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{s^{\beta}s^{\alpha k}}\\ &= \frac{1}{s^{\beta}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{s^{\alpha k}}\\ &= \frac{1}{s^{\beta}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{s^{\alpha}}\right)^k,\end{aligned}$$

pela convergência da série geométrica obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^{\beta}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{s^{\alpha}}\right)^k &= \frac{1}{s^{\beta}}.\frac{1}{1-(\frac{a}{s^{\alpha}})}\\ &= \frac{1}{s^{\beta}}.\frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha}-a}\\ &= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\beta}-a}\end{aligned}$$

■

De forma análoga, podemos mostrar.

Corolário 1

$$\mathfrak{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha})\right] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\beta}+a}.$$

Portanto, pode-se definir

Definição 6 *A transformada de Laplace inversa das funções* $f(t) = \dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\beta}+a}$ *e* $g(t) = \dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\beta}-a}$ *são*

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\beta}+a}\right] = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha}),$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\beta}-a}\right] = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha}).$$

Teorema 5 *A transformada de Laplace da Derivada de Caputo de ordem β é dada por*

$$\mathfrak{L}[D_*^{\beta}f(t)] = s^{\beta}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{k}(0)s^{\beta-k-1},$$

em que $\mathfrak{L}[f] = F(s)$.

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[D_*^{\beta}f(t)] &= \mathfrak{L}[J^{m-\beta}[D^{m}f(t)]] \\
&= s^{-m+\beta}\mathfrak{L}[D^{m}f(t)] \\
&= s^{-m+\beta}\left(s^{m}\mathfrak{L}[f] - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)s^{m-1-k}\right) \\
&= s^{\beta}\mathfrak{L}[f] - s^{-m+\beta}\sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)s^{m-1-k} \\
&= s^{\beta}\mathfrak{L}[f] - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)s^{\beta-1-k}.
\end{aligned}$$

■

De forma semelhante podemos provar o seguinte Teorema

Teorema 6 *A transformada de Laplace da Derivada Fracionária de Riemann-Liouville é dada por*

$$\mathfrak{L}[D^{\beta}f(t)] = s^{\beta}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k}J^{m-\beta}f(0)s^{m-1-k},$$

em que $\mathfrak{L}[f] = F(s)$.

Podemos assim definir

Definição 7

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[s^{\beta}\mathfrak{L}[f] - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)s^{\beta-1-k}\right] = D_*^{\beta}f(t),$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[s^{\beta}\mathfrak{L}[f] - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k}J^{m-\beta}f(0)s^{m-1-k}\right] = D^{\beta}f(t).$$

Aplicação: Equação do Relaxamento Fracionária

A equação do relaxamento fracionária é descrita pela equação

$$D^{\alpha}u(t) = -u(t) + q(t), \tag{8}$$

com $0 < \alpha < 1$, para mais detalhes sobre essa equação, veja Gorenflo e Mainardi (1997).

Encontraremos a solução dessa equação usando a metodologia da transformada de Laplace. Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação (8) obtemos

$$\mathfrak{L}[D^{\alpha}u(t)] = -\mathfrak{L}[u(t)] + \mathfrak{L}[q(t)],$$

usando o Teorema 6 segue que

$$s^{\alpha}\mathfrak{L}[u(t)] - s^{\alpha-1}u(0) = -\mathfrak{L}[u(t)] + \mathfrak{L}[q(t)],$$

portanto

$$s^{\alpha}\mathfrak{L}[u(t)] + \mathfrak{L}[u(t)] = \mathfrak{L}[q(t)] + s^{\alpha-1}u(0),$$

disto segue que

$$(s^{\alpha} + 1)\mathfrak{L}[u(t)] = \mathfrak{L}[q(t)] + s^{\alpha-1}u(0),$$

e assim obtemos

$$\mathfrak{L}[u(t)] = \frac{\mathfrak{L}[q(t)]}{s^{\alpha}+1} + \frac{s^{\alpha-1}u(0)}{s^{\alpha}+1}u(0). \tag{9}$$

Observe que

$$\frac{1}{s^{\alpha}+1} = -\left(s\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1} - 1\right) = -\left(s\mathfrak{L}\left[E_{\alpha}(-t^{\alpha})\right] - E_{\alpha}(-t^{\alpha})|_{t=0}\right) = \mathfrak{L}\left[\frac{d}{dt}E_{\alpha}(-t^{\alpha}))\right], \tag{10}$$

substituindo (10) em (9) obtemos

$$\mathfrak{L}[u(t)] = \mathfrak{L}[q(t)]\mathfrak{L}\left[\frac{d}{dt}E_{\alpha}(-t^{\alpha})\right] + \mathfrak{L}[E_{\alpha}(-t^{\alpha})]u(0)$$

logo pela propriedade (1) obtemos

$$\mathfrak{L}[u(t)] = \mathfrak{L}\left[q(t) * \frac{d}{dt}E_{\alpha}(-t^{\alpha})\right] + \mathfrak{L}[E_{\alpha}(-t^{\alpha})]u(0).$$

Usando a transformada de Laplace inversa obtemos a solução da equação do relaxamento fracionária dada por

$$u(t) = \int_0^t q(t-s)\frac{d}{ds}E_{\alpha}(-s^{\alpha})ds + E_{\alpha}(-t^{\alpha})u(0).$$

em termos da função de q e da função de Mittag-Leffer.

Agradecimentos

Os autores Estela Ferreira e Janaina Franco agradecem a FAPEMIG pelo suporte financeiro.

Referências

AGARWAL, R. P.; DOS SANTOS, J.P.C.; CUEVAS, C. Analytic Resolvent Operator and Existence Results for Fractional Integro-differential Equations, *Jour. Abstr. Differ. Equ. Appl.* n.2, p. 26-47, 2012.

ANDRADE, B.; SANTOS, J.P.C. DOS Existence of solutions for a fractional neutral integro-differential equation with unbounded delay, *Elect. J. Diff. Equ.* n.90, p. 1-13, 2012.

CAMARGO, R. F. *Cálculo Fracionário e Aplicações*, 2009. 135 f. Tese (Doutorado em Matemática). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2009.

CAPUTO, M. *Elasticità e Diddipazione.* Bologna: Zanichelli, 1969.

CAPUTO, M. Vibrations of an infinite plate with a frequency independent damping. *J. Acoust. Soc. Amer.*, n.60, p.634-641, 1976.

CAPUTO, M. Lectures on Seismology and Rheological Tectonics, Univ. degli Studi di Roma. *La Sapienza,* 1992.

CHEN, W. Time-Space Fabric Underlying Anomalous Diffusion. *Chaos, Solitons and Fractals,* n.28, p.923-929, 2006.

CIESIELSKI, M.; LESZCZYNSKI, J. Numerical Simulation of Anomalous Diffusion. *Computer Methods in Mechanics,* 2003.

DIETHELM, K. *Analysis of Fractional Differential Equations*, New York: Springer-Verlag, 2010.

GORENFLO, R.; MAINARDI, F. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order. In: CARPINTERI, A.; MAINARDI, F. (Eds.) *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics.* New York: Springer-Verlag, 1997, p. 223-276.

LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. T. Intialization, Conceptualization, and Aplication in the Generalized Fractional Calculus. *NASA/TP-1998-208415*, 1998.

LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. T. Initialized fractional calculus. *NASA/TP-2000-209943*, 2000.

MAINARDI, F. Fractional Relaxation-Oscillation and Fractional Diffusion-Wave. Phenomena. *Chaos, Solitons & Fractals,* n.7, p.1461-1477, 1996.

MITTAG-LEFFLER, G. M. Sur la Nouvelle Fonction $E_\alpha(x)$. *C. R. Acad. Sci.*, n.137, p.554-558, 1903.

OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. *The fractional calculus.* London: Academic Press, 1974.

ORSINGHER, E.; BEGHIN, L. Time-Fractional Telegraph Equation and Telegraph Pocesses with Brownian time. *Probab.Theory Relat. Fields,* n.128, p.141-160, 2004.

PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations, Mathematics on Science and Engeneering*, v. 198. San Diego: Academic Press, 1999.

SANTOS, J.P.C. DOS, CUEVAS, C. Asymptotically almost automorphic solutions of abstract fractional integro-differentail neutral equations, *Appl. Math. Lett.* n.23, p. 960-965, 2012.

SANTOS, J.P.C. DOS; CUEVAS, C.; ANDRADE, B. Existence results for a fractional equation with state-dependent delay, *Adv. Diff. Equ.* p. 1-15. Article ID 642013, 2011.

WYSS, W. The Fractional Black-Scholes Equation. *Frac. Cal. Appl. Anal.*, n.3, p.51-60, 2000.