

## Sobre autovalores e zeros de polinômios e problemas de otimização: uma síntese e demonstrações

José Claudinei Ferreira<sup>1†</sup>, Natally R. Silva<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas.*

<sup>2</sup>*Graduada em Matemática Licenciatura pela Universidade Federal de Alfenas.*

**Resumo:** *O objetivo deste trabalho é demonstrar, partindo do teorema de Bolzano Weierstrass, resultados sobre existência e localização de raízes de polinômios, sobre diagonalização de operadores (ou matrizes) autoadjuntos ou normais e sobre decomposição em valores singulares, em dimensão finita. O texto faz parte de uma busca por material que sintetize um conjunto de resultados dispersos sobre o assunto, que possa contribuir para um maior aprofundamento do tema, que possa ser bem interpretado por leitor com conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral e de Álgebra Linear.*

**Palavras-chave:** Autovalores; valores singulares; raízes de polinômios; máximos de funções.

**Abstract:** *This work is to discuss results on the existence of roots of polynomials over the real or complex field, eigenvalues and singular values of operators or matrix in finite dimension, and how to find it. The text is a bibliographic review to brief describe basic and important results on this subject, from the analysis point of view.*

**Keywords:** Eigenvalues; singular values; roots of polynomials; maximum of functions.

## 1 Introdução

Em vários assuntos envolvendo matemática é comum a utilização dos conceitos de autovalor e de autovetor de uma transformação linear ou de uma matriz. Um exemplo muito usado para motivar o tema é o algoritmo PageRank que deu origem ao sistema de busca do Google (BRYAN, 2006). Autovalores são úteis na classificação de cônicas e de quádricas, que estão associadas ao problema de determinar pontos de máximo ou de mínimo de funções de várias variáveis reais a valores reais (LIMA, 2004; THOMAS, 2009; ZHOU, 2007). Em muitos destes problemas, como em aplicações em imagens digitais (PESCO at al, 2013) e resolução de sistemas lineares mau condicionados (JOZI, 2017), o conceito de autovalor é substituído pelo de valor singular. Tanto polinômios quanto autovalores aparecem em muitos outros campos relacionados com a matemática, como no estudo de exponenciais de matrizes e teoria qualitativa para equações diferenciais ordinárias. Esses assuntos, por sua vez, podem ser aplicados em métodos de otimização de funções, como os métodos relacionados com o método dos gradientes.

Mesmo sendo um conceito extremamente importante e amplamente utilizado em diversas áreas, muitos argumentos utilizados em processos de existência e localização de autovalores não recebem muita atenção em cursos de graduação na área de ciências exatas.

Por isso, o objetivo deste trabalho é a apresentação de resultados sobre diagonalização de operadores autoadjuntos ou normais e decomposição em valores singulares. Como a determinação de autovalores geralmente passa pela determinação de raízes de polinômios, apresentamos também uma bela versão de demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, sem o uso de extensões de corpos, o que difere da forma comumente abordada em cursos de pós-graduação em Matemática.

---

<sup>†</sup>Autor correspondente: [jose.ferreira@unifal-mg.edu.br](mailto:jose.ferreira@unifal-mg.edu.br).

Procuramos elaborar um texto de revisão de literatura que possa ser lido por alguém que tenha cursado disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral em duas variáveis e Álgebra Linear elementar, ou mesmo Geometria Analítica, mas com um pouco mais de esforço. A ideia é fazer um texto que sintetize um conjunto de resultados dispersos e que sirva como material para uma leitura auto contida sobre o assunto.

O ponto de partida para a elaboração da discussão aqui proposta foi o estudo da classificação de pontos críticos de uma função, em pontos de máximo ou de mínimo ou de sela (THOMAS, 2009). Um ponto interessante que determinou o rumo a seguir é que a existência de pontos de máximo e de mínimo de funções contínuas, definidas em conjuntos compactos, é garantida por teoremas relacionados com Teorema de Bolzano-Weierstrass (LIMA, 2004). Esses mesmos resultados podem ser usados para garantir a existência de raízes de polinômios com coeficientes complexos, a existência de autovalores e de autovetores de matrizes autoadjuntas, anti autoadjuntas e normais, incluindo as matrizes associadas às cônicas e quádricas. Isso está também relacionado às matrizes definidas positivas, como as que aparecem na decomposição em valores singulares e decomposição polar de matrizes.

Organizamos o texto como segue. Na Seção 2 fazemos uma introdução de conceitos relacionados com a completude do conjunto dos números reais, de forma axiomática apenas, garantindo que toda sequência limitada de números reais possui subsequência convergente. Esse raciocínio também se aplica a sequências limitadas de vetores com número finito de coordenadas reais ou complexas. Finalizamos esta seção com uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Na Seção 3 lembramos o conceito de autovalor e de autovetor e apresentamos três demonstrações da existência deles e da diagonalização de operadores por meio do teorema espectral, para o caso em que a transformação linear ou a matriz é autoadjunta. Na Seção 4, tratamos do caso de matrizes normais e do teorema da decomposição singular que se aplica ao caso geral. Na Seção 5 mostramos que toda transformação linear possui pelo menos um autovalor complexo. A Seção 6 encerra o texto com considerações e comentários.

## 2 Máximos e mínimos de funções

Para contextualizar o assunto proposto mencionamos alguns fatos elementares de Análise Real, de acordo com Lima (2004). O primeiro resultado pode ser visto como uma aplicação direta do axioma da completude do conjunto dos números reais, em que aceitamos que todo conjunto limitado de números reais possui supremo.

**Teorema 2.1.** (*Bolzano-Weierstrass*) - *Todo sequência limitada de números reais possui subsequência convergente.*

Este resultado pode ser usado para demonstrar o que segue, sendo também considerado por alguns como uma versão do Teorema 2.1. A demonstração desta versão passa pela aplicação do resultado anterior em cada coordenada do vetor  $x \in K \subset \mathbb{R}^n$ , para algum número natural  $n$ .

**Teorema 2.2.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto fechado e limitado (compacto) e seja  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Existem  $a, b \in K$  tais que*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad x \in K.$$

Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas, no conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e considere  $a \in U$ . A fórmula de Taylor nos diz que

$$f(a+h) = f(a) + \langle f'(a), h \rangle + \frac{\langle Hf(a)h, h \rangle}{2} + r(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|^2} = 0,$$

onde  $f'(a)$  denota o vetor gradiente  $\left( \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(a)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \right)$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usado,  $Hf(a) = \left[ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{n \times n}$  denota a matriz hessiana,  $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle}$  denota a norma do vetor

$h$  e  $r(h)$  é uma função definida para todo  $h \in \mathbb{R}^n$  suficientemente próximo do vetor nulo e representa o erro cometido na aproximação de  $f(a+h)$  por um polinômio de grau dois (LIMA, 2004).

Dizemos que o ponto  $a$  é crítico quando o vetor gradiente  $f'(a)$  for nulo. Como a matriz hessiana  $Hf(a)$  é autoadjunta, vamos mostrar na Seção 3 que é possível encontrar uma mudança de base  $P$  de tal forma que  $Hf(a) = PDP^{-1}$  e

$$f(a+h) = f(a) + \frac{\langle Du, u \rangle}{2} + r(u), \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{r(u)}{\|u\|^2} = 0, \quad Pu = h, \quad (1)$$

com

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Isso garante que o ponto crítico  $a$  determina um ponto de máximo local, quando cada  $\lambda_i$  não for positivo, ou um ponto de mínimo local, quando cada  $\lambda_i$  não for negativo. Quando houver um  $\lambda_i$  com sinal positivo e um  $\lambda_j$  com sinal negativo, o ponto crítico  $a$  determina um ponto de sela.

A ideia inicial deste texto é aplicar o Teorema 2.2 para garantir a existência de autovalores (reais) e de autovetores de matrizes ou transformações lineares autoadjuntas ou normais, com entradas reais ou complexas, em espaços vetoriais complexos.

Como o processo de determinação de autovalores muitas vezes utiliza raízes de polinômios associados, encerramos a seção apresentando uma bela demonstração do clássico Teorema Fundamental da Álgebra. Essa demonstração pode ser apresentada em um curso de Cálculo Diferencial e Integral e é devida a Gauss e Cauchy (veja Garbi (2010) para uma revisão histórica sobre equações polinomiais).

Lembramos que um número complexo é da forma  $z = x + iy$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $i^2 = -1 = e^{i\pi}$ . A representação na forma polar de  $z \in \mathbb{C}$  é dada pela fórmula de Euler  $z = |z|e^{i\theta}$ , sendo  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$ .

**Teorema 2.3.** *Seja*

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j + z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

um polinômio, com cada  $a_j \in \mathbb{C}$ . Para cada  $z_0 \in \mathbb{C}$ , o problema de otimização

$$\min_{|z-z_0| < r} |p(z)|^2,$$

tem solução  $u \in \mathbb{C}$ , para  $r > 0$  suficientemente grande. Ainda, se  $u$  for solução do problema de otimização, então  $p(u) = 0$ .

*Demonstração.* Primeiramente note que  $p(z) = p(x + iy)$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ , é uma função contínua de duas variáveis reais. Note ainda que

$$|p(z)| \geq |z|^n \left( 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|z|^{n-j}} \right), \quad |z| > 0.$$

Segue que  $|p(z)|$  cresce muito, quando  $|z|$  cresce, e que podemos escolher  $r > 1$  de tal forma que

$$|p(z)| > \frac{|z|^n}{2} > |p(0)| + 1, \quad |z| \geq r.$$

Essa expressão e o Teorema 2.2 garantem que existe  $u \in \mathbb{C}$ , com  $|u| < r$ , tal que

$$|p(u)| \leq |p(z)|, \quad |z| < r, \quad (4)$$

ou seja,  $|p(z)|$  assume pelo menos um valor mínimo local em  $\mathbb{C}$ . Resta mostrar que  $p(u) = 0$ . Considere agora  $b \in \mathbb{C}$  tal que  $p(b) \neq 0$ . Podemos utilizar o binômio de Newton para reescrever

$$p(z + b) = p(b) + c_k z^k + r(z)z^{k+1}, \quad z \in \mathbb{C},$$

sendo  $r(z)$  um polinômio,  $c_k \neq 0$  e  $k \geq 1$  um número natural. Então podemos usar a desigualdade triangular para obter a desigualdade

$$\left| \frac{p(z + b)}{p(b)} \right| \leq \left| 1 + \frac{c_k}{p(b)} z^k \right| + \left| \frac{r(z)}{p(b)} z^{k+1} \right|.$$

Escrevendo  $c_k/p(b) = |c|e^{-i\theta}$  e  $d(z) = r(z)/p(b)$ , e escolhendo  $z = |z|e^{i(\theta+\pi)/k}$  suficientemente próximo de 0, temos que

$$\left| \frac{p(z + b)}{p(b)} \right| \leq 1 - |c| |z|^k + |d(z)| |z|^{k+1}, \quad |z| \approx 0.$$

Como  $|d(z)| |z|^{k+1} < |c| |z|^k$ , quando  $|z|$  é suficientemente próximo de 0, temos

$$|p(z + b)| < |p(b)|, \quad z = |z|e^{i(\theta+\pi)/k}, \quad 0 < |z| < \delta,$$

para algum  $\delta > 0$ . Assim,  $|p(b)|^2$  não pode ser um valor mínimo local para  $|p(z)|^2$ .

Como a Expressão (4) garante que existe valor mínimo local para  $|p(z)|$ , segue que, se

$$|p(u)|^2 = \min_{|z-z_0|<r} |p(z)|^2,$$

então  $p(u) = 0$ . □

O corolário seguinte mostra que os pontos críticos de  $|p(z)|^2$  são pontos de mínimo, onde  $p(z)$  se anula, ou são pontos de sela.

**Corolário 2.4.** *Nas condições do Teorema 1 o problema de otimização*

$$\max_{|z-z_0|<r} |p(z)|^2,$$

*não tem solução*  $u \in \mathbb{C}$ , para  $r > 0$ .

*Demonstração.* Considere  $b \in \mathbb{C}$  tal que  $p(b) \neq 0$ , e lembre que

$$p(z + b) = p(b) + c_k z^k + r(z)z^{k+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Podemos usar a desigualdade triangular para obter a desigualdade

$$\left| \frac{p(z + b)}{p(b)} \right| \geq \left| 1 + \frac{c_k}{p(b)} z^k \right| - \left| \frac{r(z)}{p(b)} z^{k+1} \right|.$$

Escrevendo  $c_k/p(b) = |c|e^{-i\theta}$  e  $d(z) = r(z)/p(b)$ , e escolhendo  $z = |z|e^{i\theta/k}$  suficientemente próximo de 0, temos que

$$\left| \frac{p(z + b)}{p(b)} \right| \geq 1 + |c| |z|^k - |d(z)| |z|^{k+1}, \quad |z| = |z|e^{i\theta/k} \approx 0.$$

Como  $|d(z)| |z|^{k+1} < |c| |z|^k$ , quando  $|z|$  é suficientemente próximo de 0, temos

$$|p(z + b)| > |p(b)|, \quad z = |z|e^{i\theta/k}, \quad 0 < |z| < \delta,$$

para algum  $\delta > 0$ . Assim,  $|p(b)|^2$  não pode ser um valor máximo local para  $|p(z)|^2$ . □

**Observação 2.5.** *Não é difícil de verificar que, se  $p(u) = 0$ , então  $p(z) = (z - u)q(z)$ , sendo  $q(z)$  o quociente da divisão de  $p(z)$  por  $z - u$ . Isso quer dizer que o teorema anterior garante que  $p(z)$  possui no máximo  $n$  raízes distintas.*

*Para visualizar a demonstração do teorema anterior consideramos o polinômio  $p(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 2$ . A Figura 1 mostra o gráfico e curvas de nível de  $|p(z)|$ . Isso mostra que a função possui exatamente quatro pontos de mínimo, onde é nula, e que não possui ponto de máximo local, mas possui um ponto de sela.*

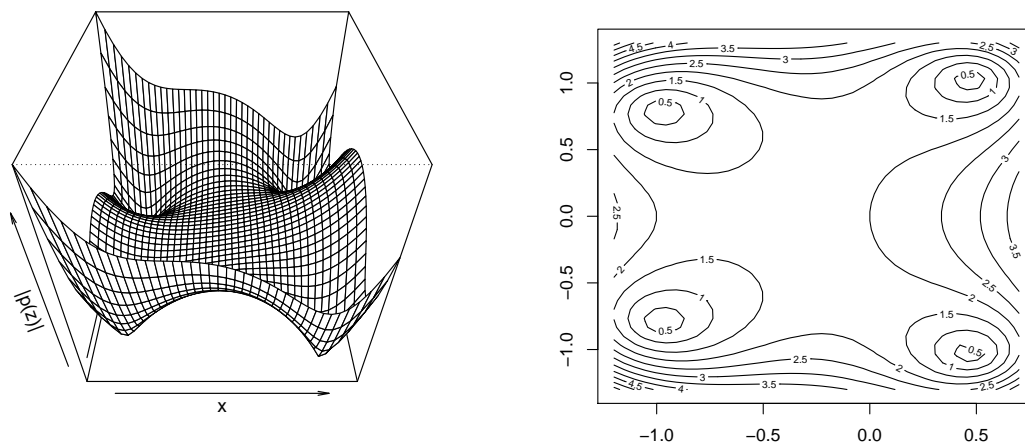


Figura 1: gráfico e curvas de nível de  $|p(z)|$ .

### 3 Operadores autoadjuntos

O objetivo desta seção é dar condições para que a expressão (1) seja verdadeira. Diremos que  $E$  e  $F$  são espaços euclidianos quando ambos forem espaços vetoriais reais ou complexos e de dimensão finita e com produto interno.

Dado um conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  linearmente independente em  $E$ , é sempre possível utilizar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar um conjunto ortonormal  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_p\}$  (BUENO, 2006). Considerando  $A$  como uma matriz com colunas  $a_i$ , que são combinações lineares dos vetores  $q_i$  e  $Q$  como uma matriz com colunas  $q_i$ . Segue que

$$QR = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_p] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & \cdots & r_{p1} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{pp} \end{bmatrix} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_p] = A, \quad (5)$$

com  $\|q_i\|^2 = \langle q_i, q_i \rangle = 1$  e  $r_{ij} = \langle a_i, q_j \rangle$ . Note que  $\langle q_i, q_j \rangle = 0$ , se  $i \neq j$ .

Diremos que o vetor não nulo  $u$  é autovetor da transformação linear  $H : E \rightarrow E$ , e que o escalar  $\lambda$  é autovalor, quando  $Hu = \lambda u$  ou  $(H - \lambda I)u = 0$ , em que  $I$  denota a função identidade e  $0$  denota o vetor nulo.

Denotamos por  $H^* : F \rightarrow E$  como o adjunto da transformação linear  $H : E \rightarrow F$ , que satisfaz a igualdade

$$\langle Hu, v \rangle = \langle u, H^*v \rangle = \overline{\langle H^*v, u \rangle}, \quad u \in E, \quad v \in F,$$

sendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o produto interno no respectivo espaço. No caso em que  $E = F$  e  $H = H^*$  diremos que  $H$  é um operador linear autoadjunto.

**Observação 3.1.** Note que, se  $H$  for autoadjunto,  $\lambda$  for um autovalor e  $u$  for um autovetor, com  $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = 1$ , então

$$\lambda = \langle Hu, u \rangle = \overline{\langle Hu, u \rangle} = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, os autovalores de  $H$  são sempre números reais.

Sabemos que toda matriz  $A$ , com  $m$  linhas e  $n$  colunas, define uma transformação linear  $H : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ , sendo  $\mathbb{K}$  o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$  ou dos números complexos  $\mathbb{C}$ . Em particular, se  $A$  for uma matriz quadrada de ordem  $n$ , então  $A$  define um operador linear em  $\mathbb{K}^n$ . Desse modo, dizemos que a matriz  $A$  é diagonalizável quando existir uma base  $B$  de  $\mathbb{K}^n$  formada de autovetores de  $H$ . Nesse caso, a matriz que representa a transformação linear na base  $B$  é da forma (2).

Podemos agora enunciar e demonstrar o teorema espectral para operadores lineares autoadjuntos, em dimensão finita, garantindo a existência de autovalores e de autovetores.

**Teorema 3.2.** *Sejam  $E$  um espaço euclidiano e  $H : E \rightarrow E$  um operador linear autoadjunto. Existe uma base ortogonal de  $E$  formada por autovetores de  $H$ .*

*Demonstração 1.* Note que podemos sempre manipular os elementos de  $E$  como se estivessem em  $\mathbb{K}^n$ . Seja

$$\psi(x) = \langle Hx, x \rangle = \overline{\langle Hx, x \rangle}, \quad x \in E.$$

Segue do Teorema 2.2 que existe  $u \in E$ , com  $\|u\| = 1$ , e  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  tais que

$$\psi(x) \leq \psi(u) = \lambda_1, \quad x \in E, \quad \|x\| = 1.$$

Sendo assim, se  $x \in E$  for não nulo, então

$$\langle (H - \lambda_1 I)x, x \rangle = \|x\|^2 \left( \psi \left( \frac{x}{\|x\|} \right) - \lambda_1 \right) \leq 0. \quad (6)$$

Para cada  $y \in E$  definimos o polinômio

$$\begin{aligned} p_y(t) &= \langle (H - \lambda_1 I)(u + ty), u + ty \rangle \\ &= t[\langle (H - \lambda_1 I)u, y \rangle + \langle (H - \lambda_1 I)y, u \rangle] + t^2 \langle (H - \lambda_1 I)y, y \rangle \\ &= t(b + ct) \end{aligned}$$

que tem grau no máximo igual a 2, na variável real  $t$ , sendo  $b = \langle (H - \lambda_1 I)u, y \rangle + \langle y, (H - \lambda_1 I)u \rangle$  e  $c = \langle (H - \lambda_1 I)y, y \rangle$ .

Tomando  $x = u + ty$  na Expressão 6, vemos que  $p_y(0) = 0$  e que  $p_y(t)$  não é positivo, para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Um análise da forma de  $p_y(t) = t(b + ct)$  nos mostra ainda que, como  $p_y(t)$  não assumirá valores positivos, o termo  $b$  tem que ser nulo, uma vez que  $c$  não é positivo. Pois, caso contrário, o polinômio poderia ter duas raízes distintas, e ser positivo para valores de  $t$  entre essas raízes, ou ter grau 1 e assumir valores positivos e negativos.

Sendo assim, tem que ocorrer a igualdade

$$b = \langle (H - \lambda_1 I)u, y \rangle + \langle y, (H - \lambda_1 I)u \rangle = 0, \quad y \in E.$$

Tomando  $y = (H - \lambda_1 I)u$ , temos que  $\|(H - \lambda_1 I)u\| = 0$  e que

$$(H - \lambda_1 I)u = 0.$$

Assim, mostramos a existência de um autovalor  $\lambda_1$  e de um autovetor  $u_1 = u$ .

Para prosseguir, considere  $E_1$  como o subespaço de  $E$ , ortogonal ao vetor  $u_1$ , observe que  $H(v) \in E_1$  para cada  $v \in E_1$ , e repita o raciocínio para  $H$  restrito a  $E_1$  para mostrar que existe

$$\lambda_2 = \max_{\substack{x \in E_1 \\ \|x\|=1}} \langle Hx, x \rangle.$$

Note que o procedimento garante que existe  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Ainda, se  $Hu_j = \lambda_j u_j$  e  $E_p$  é o subespaço ortogonal a cada  $u_j$ , para  $j \leq p$ , então

$$\lambda_{p+1} = \max_{\substack{x \in E_p \\ \|x\|=1}} \langle Hx, x \rangle.$$

□

Existem várias formas de demonstrar esse teorema e faremos aqui quatro versões que podem ser apresentadas aos alunos de graduação, particularmente os do curso de Matemática. A última versão de demonstração usa o Teorema 2.3 e está na Seção 5. Cabe destacar que o que difere nas demonstrações 1, 2, 3 e 4 é o início e, por isso, nas próximas versões só apresentaremos o argumento inicial.

*Demonstração 2.* Seja

$$\lambda = \max_{\|x\|=1} \|Hx\| = \|Hu\|,$$

para algum  $u \in E$ , com  $\|u\| = 1$ , e denote  $H(Hu) = H^2u$ .

Segue que

$$\|Hx\| \leq \lambda\|x\|, \quad x \in E.$$

Dito isso, podemos obter as desigualdades

$$\begin{aligned} \|(H^2 - \lambda^2 I)u\|^2 &= \langle H^2u - \lambda^2u, H^2u - \lambda^2u \rangle \\ &= \langle H^2u, H^2u \rangle - \langle H^2u, \lambda^2u \rangle - \langle \lambda^2u, H^2u \rangle + \langle \lambda^2u, \lambda^2u \rangle \\ &= \langle H^2u, H^2u \rangle - \lambda^2 \langle Hu, Hu \rangle - \lambda^2 \langle Hu, Hu \rangle + \lambda^4 \\ &= \|H(Hu)\|^2 - \lambda^4 \\ &\leq \lambda^4 - \lambda^4 = 0 \end{aligned}$$

Isso mostra que

$$(H^2 - \lambda^2 I)u = (H + \lambda I)(H - \lambda I)u = 0$$

e que

$$(H - \lambda I)u = 0 \quad \text{ou} \quad (H + \lambda I)w = 0,$$

sendo  $w = (H - \lambda I)u$ . O que nos diz que  $\lambda$  ou  $-\lambda$  é um autovalor e  $u$  ou  $w$  é um autovetor. Tome  $\lambda_1$  como o autovalor e  $u_1$  como um autovetor com norma 1.  $\square$

A Demonstração 2 é a mais direta que apresentamos e a que usa menos conceitos. Ela pode ser adaptada para demonstrar resultado semelhante para operadores lineares compactos em dimensão infinita (OLIVEIRA, 2005).

A próxima demonstração utiliza também o conceito de multiplicadores de Lagrange e por isso parece ser a mais direta (por favor veja Thomas (2009)).

*Demonstração 3.* Considere o problema:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Maximizar } \psi(x) = \langle Hx, x \rangle \\ \text{sujeito a } g(x) = 1 \end{array} \right. ,$$

com  $g(x) = \langle x, x \rangle$ . Escolhendo  $u_1$  como solução desse problema e usando o método dos multiplicadores de Lagrange obtemos a igualdade  $\psi'(u_1) = \lambda_1 g'(u_1)$ . Cálculos diretos mostram que

$$2\langle Hu_1, h \rangle = \langle \psi'(u_1), h \rangle = 2\lambda_1 \langle g'(u_1), h \rangle = 2\lambda_1 \langle u_1, h \rangle, \quad h \in E.$$

Disso segue-se que

$$\langle (H - \lambda_1 I)u_1, h \rangle = 0, \quad h \in E,$$

e que

$$(H - \lambda_1 I)u_1 = 0.$$

$\square$

Os argumentos da demonstração do Teorema 3.2 utilizam fortemente o fato do operador ser auto adjunto. Porém, a conclusão do teorema é ainda válida em outros contextos, em espaços euclidianos complexos.

Lembramos que um operador  $H$  é anti autoadjunto quando  $H^* = -H$ . É simples então de verificar que  $T = -iH$  é autoadjunto. Isso demonstra o lema seguinte e encerra a seção.

**Lema 3.3.** *Sejam  $E$  um espaço euclidiano complexo e  $H : E \rightarrow E$  um operador anti autoadjunto. Existe uma base ortogonal de  $E$  formada por autovetores de  $H$ .*

## 4 Operadores normais

Como podemos facilmente verificar, o conjunto das transformações lineares que não são autoadjuntas ou anti autoadjuntas é grande. Por isso existe um conceito mais amplo, o de operador linear normal, que são aquelas transformações  $H : E \rightarrow E$  que satisfazem a igualdade  $HH^* = H^*H$ .

Podemos agora estender o Teorema 3.2 para operadores normais, restringindo o domínio  $E$  aos espaços complexos.

**Teorema 4.1.** *Sejam  $E$  um espaço euclidiano complexo e  $H : E \rightarrow E$  um operador normal. Existe uma base ortogonal de  $E$  formada por autovetores de  $H$ .*

*Demonstração.* Primeiramente considere os operadores

$$T = \frac{H + H^*}{2} \quad \text{e} \quad S = \frac{H - H^*}{2}.$$

Os operadores  $T$  e  $-iS$  são autoadjuntos, com  $TS = ST$ . Ainda, se  $Tu = \lambda u$  e  $Sv = \mu v$ , para algum  $\lambda$  e  $\mu$  números complexos, então  $T(Su) = \lambda Su$  e  $S(Tv) = \mu Tv$ .

O Teorema 3.2 garante que existem  $n$  autovalores  $\lambda_j$  de  $T$ , que podem ser repetidos, e uma base ortogonal formada por autovetores de  $T$ . Denotando por  $V_j = \{u \in E : Tu = \lambda_j u\}$  temos que  $\cup V_j = E$ . Não é difícil ver que  $S(V_j) = \{Su : u \in V_j\} \subset V_j$  e o Lema 3.3 garante que existe uma base ortogonal para cada  $V_j$  formada por autovetores de  $S$ . Então existe uma base ortogonal  $B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  de  $E$  formada por autovetores de  $T$  e de  $S$  (simultaneamente). Então, para cada  $1 \leq j \leq n$ ,

$$Hw_j = Tw_j + Sw_j = \lambda_j w + \mu_j w = (\lambda_j + \mu_j)w_j$$

e  $w_j$  é autovetor de  $H$ , associado ao autovalor  $\lambda_j + \mu_j$ . □

**Observação 4.2.** *Note que as expressões de  $T$  e  $S$  na demonstração anterior nos auxiliam na determinação da parte real e imaginária dos autovalores do operador normal  $H$ .*

Mesmo quando a transformação linear não é um operador ou não é normal, é possível utilizar a ideia dos resultados anteriores, através da decomposição em valores singulares. Esse resultado é muito utilizado em processos, como aqueles envolvendo sistemas lineares mau condicionados e no cálculo de matrizes inversas generalizadas e ou aproximadas.

No que segue, o posto denota a dimensão da imagem de  $H$ .

**Teorema 4.3.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços euclidianos e  $T : E \rightarrow F$  uma linear de posto  $r$ . Existem bases ortogonais  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $E$  e  $C = \{w_1, \dots, w_m\}$  de  $F$  tais que:*

$$\begin{aligned} Tv_i &= \mu_i w_i, & \text{com } \mu_i > 0, & \text{ para } i \in \{1, \dots, r\}, \\ Tv_i &= 0, & & \text{ para } i \in \{r+1, \dots, n\}, \\ T^* w_i &= \mu_i v_i, & & \text{ para } i \in \{1, \dots, r\}, \\ T^* w_i &= 0, & & \text{ para } i \in \{r+1, \dots, m\}. \end{aligned}$$



Denotando por  $D_1$  a matriz diagonal  $r \times r$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_r \end{pmatrix},$$

a representação  $T$ , da base  $B$  para a base  $C$ , é a matriz  $m \times n$

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os escalares  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_r > 0$  são os valores singulares de  $T$ .

*Demonstração.* Considere o operador autoadjunto  $T^*T : E \rightarrow E$  e note que

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle \geq 0, \quad x \in E,$$

o que mostra que  $\text{Nuc}(T) = \text{Nuc}(T^*T)$ , ou seja,  $Tv = 0$  apenas quando  $T^*Tv = 0$ . Desta forma,

$$\text{posto}(T^*T) = n - \dim(\text{Nuc}(T^*T)) = n - \dim(\text{Nuc}(T)) = r.$$

Pelo Teorema 3.2, existe uma base ortogonal  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $E$  formada por autovetores de  $T^*T$ , com autovalores  $\mu_1^2 > \mu_2^2 > \dots > \mu_r^2 > \mu_{r+1} = 0 = \dots = \mu_n$ . Se  $\mu_i \neq 0$ , podemos definir

$$w_i = \frac{1}{\mu_i}T(v_i).$$

Se  $\mu_i = 0$  basta escolher  $w_i \in \text{Nuc}(T^*)$ .

Seja  $\{w_{r+1}, \dots, w_m\}$  uma base ortogonal de  $\text{Nuc}(T^*)$ . Esses vetores satisfazem  $T^*w_i = 0$ , para  $i \in \{r+1, \dots, m\}$ . Podemos verificar que  $\text{Nuc}(T^*)$  é ortogonal a  $\text{Im}(T)$ , e assim, os vetores  $\{w_1, \dots, w_m\}$  formam uma base ortogonal de  $F$ .  $\square$

Denotando por  $|H| : E \rightarrow E$  a transformação linear cujos autovalores são os valores singulares de  $H$  e cujos autovetores são os vetores  $\{v_i\}$ . O operador  $|H|$  é chamado de módulo de  $H$  e é também denotado por  $\sqrt{H^*H}$ . O resultado seguinte é uma versão da forma polar de um número complexo  $z = e^{i\theta}|z|$  para transformações lineares.

**Corolário 4.4.** *Sejam  $E, F$  espaços euclidianos e  $T : E \rightarrow F$  linear de posto  $r$ . Existe uma transformação linear (parcialmente) isométrica  $U$ , tal que  $H = U|H|$ .*

*Demonstração.* Basta definir  $U : E \rightarrow F$  como

$$\begin{cases} U(|H|v) = Hv, & v \in E \\ U(w) = 0, & w \perp \text{Im}(H) \end{cases}$$

e observar que

$$\langle U(|H|v), U(|H|v) \rangle = \|Hv\|^2 = \sum \mu_j^2 |\alpha_j|^2 = \||H|v\|^2,$$

pois  $v = \sum \alpha_j v_j$ ,  $Hv = \sum \alpha_j \mu_j w_j$  e  $|H|v = \sum \alpha_j \mu_j v_j$ , de acordo com o Teorema 4.3.  $\square$

A demonstração desse resultado auxilia na interpretação geométrica de uma transformação linear, uma vez que  $|H|$  transforma uma esfera em  $E$  em um elipsoide em  $F$ . Ainda,  $|H|$  transforma um cubo  $C$  em  $E$  em um paralelepípedo  $P$  em  $F$ . Isso mostra que o volume de  $P$  é o produto do volume de  $C$  pelo produto dos valores singulares de  $H$  (ou o módulo do determinante de  $H$ ), e dispensa o uso de determinantes no teorema de mudança de variáveis em integrais.

## 5 Autovalores de operadores

A versão de demonstração a seguir pode ser feita utilizando o Teorema 2.3 e o polinômio característico de um operador linear, que por sua vez faz uso da teoria de determinantes e é, do nosso ponto de vista, a versão mais conhecida e a menos prática, usa vez que usa resultados para os quais os alunos de graduação desconhecem as demonstrações e manipulação, como a localização de raízes de polinômios e a teoria de determinantes (por favor veja Garbi (2010), Bueno (2006) e STEWART (2004)). Cabe destacar que Axler (1995) fez, de forma inovadora e premiada, uma construção de vários resultados de Álgebra Linear, sem o uso do conceito de determinante e, por isso, gerou uma discussão sobre a inutilidade do uso de determinantes em cursos de graduação, que infelizmente ainda não influenciou os autores de livros e professores.

O que pode ser útil saber sobre determinantes aqui é apenas a obtenção do polinômio característico de  $H$ , mas na realidade não precisamos nem disso.

Escolhendo uma base para o espaço  $E$  e denotando por  $A$  a matriz de  $H$  nessa base. A ideia de encontrar um autovalor  $\lambda$  e de um autovetor  $v$  de  $H$  pode ser explicada por meio da resolução do sistema de equações lineares da forma

$$(A - \lambda I)u = 0.$$

Esse sistema terá solução não nula  $u$  apenas quando o processo de eliminação de Gauss produzir uma matriz com zeros na diagonal principal.

De modo geral (se preferir suponha que o valor de  $z$  não anula o elemento pivô da respectiva diagonal) temos a equivalência de matrizes:

$$\begin{aligned} A - zI &= \begin{bmatrix} a_{11} - z & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - z & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - z \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} a_{11} - z & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & (a_{11} - z)(a_{22} - z) - a_{21}a_{12} & \dots & (a_{11} - z)a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (a_{11} - z)a_{n2} - a_{n1}a_{12} & \dots & (a_{11} - z)(a_{nn} - z) - a_{n1}a_{1n} \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} q_1(z) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & q_2(z) & \dots & (a_{11} - z)a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_n(z) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

em que  $q_n(z)$  é um polinômio de grau maior que  $n$ , cujo conjunto de raízes contem os autovalores de  $H$ . Uma forma rápida de fazer a verificação dessa afirmação, para quem conhece a teoria de determinantes, é usar a  $n$ -linearidade do determinante e a regra de Laplace para demonstrar o seguinte resultado.

**Lema 5.1.** *Seja  $H : E \rightarrow E$  um operador linear e  $A$  uma matriz  $n \times n$  associada a  $H$ , numa dada base. Se  $B(z)$  é uma matriz triangular superior obtida por meio de eliminação de Gauss de  $A - zI$  e  $b_{ii}(z) = q_i(z)$ , então  $q_n(z)$  tem grau maior que  $n$  e o conjunto de suas raízes contem os autovalores de  $H$ .*

Os comentários anteriores possibilitam a nossa quarta demonstração para o Teorema 3.2, utilizando o polinômio  $q_n(z)$ . Porém, faremos a demonstração de uma outra forma.

*Demonstração 4.* Seja  $v$  um vetor não nulo de  $E$  e denote  $H^j v = H(H^{j-1}v)$ , para  $j = 2, 3, \dots$ . Segue que existem escalares  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ , com  $\alpha_m$  não nulo, tais que

$$\alpha_0 v + \sum_{j=1}^m \alpha_j H^j v = 0, \quad (7)$$

pois o conjunto  $\{v, Hv, \dots, H^m v\}$  é linearmente dependente, para algum  $m \leq n$ , sendo  $n$  é a dimensão de  $E$ . Considere o polinômio

$$p(z) = \sum_{j=0}^m \alpha_j z^j, \quad z \in \mathbb{C},$$

e aplique o Teorema 2.3 para garantir que existe  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$  tal que  $p(\lambda_1) = 0$ . Temos então

$$p(z) = (z - \lambda_1)q(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

e que

$$(H - \lambda_1 I)q(H)v = \alpha_0 v + \sum_{j=1}^m \alpha_j H^j v = 0.$$

Escolhendo  $m$  como o menor número natural com essa propriedade, e  $u_1 = q(H)v$ , que é não nulo, temos que  $Hu_1 = \lambda_1 u_1$  e que  $\lambda_1$  é autovalor de  $H$ .  $\square$

A parte apresentada da demonstração acima se aplica a qualquer operador linear  $H$ . A necessidade de  $H$  ser autoadjunto ou normal é a parte que usa a ortogonalidade dos autovetores e o fato de  $H(E_j)$  estar contido em  $E_j$ .

**Corolário 5.2.** *Seja  $H : E \rightarrow E$  um operador linear. Existe pelo menos um autovalor complexo de  $H$ .*

Lembramos que um corpo tem característica zero quando qualquer soma do elemento neutro multiplicativo  $1 + 1 + \dots + 1$  não resulta no elemento neutro aditivo  $0$ . Nesse caso, o argumento anterior produz um resultado ainda mais interessante, que pode ser visto como uma elegante demonstração para o teorema da decomposição primária ou para a forma de Jordan.

**Corolário 5.3.** *Seja  $V$  espaço vetorial de dimensão finita  $n$ , sobre um corpo  $\mathbb{K}$  de característica zero e  $H : V \rightarrow V$  um operador linear. Seja  $p(z)$  é um polinômio e  $v \in V$  não nulos e tais que  $p(H)v = 0$ . Então*

$$V = \text{Nuc}(p(H)^n) \oplus \text{Im}(p(H)^n)$$

e existe uma base de  $V$  para a qual a representação matricial de  $H$  toma a forma de blocos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

sendo  $A_1$  é uma matriz  $m \times m$  e  $m = \dim \text{Nuc}(p(H)^n)$ .

*Demonstração.* Sejam  $V_1 = \text{Nuc}(p(H)^n)$  e  $V_2 = \text{Im}(p(H)^n)$ .

O conjunto  $\{w, p(H)w, \dots, p(H)^{k-1}w\}$  é linearmente independente, sempre que  $p(H)^k w = 0$  e  $p(H)^{k-1}w \neq 0$ , para algum  $w \in V$ . Para ver isso, suponha que  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1} \in \mathbb{K}$  são tais que

$$0 = \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i p(H)^i w,$$

e aplique  $p(H)^{k-1-i}$  em ambos os lados da igualdade para obter  $\beta_i = 0$ .

Portanto, se  $p(H)^k w = 0$ , para algum  $k$  natural, então  $p(H)^n w = 0$ . Sendo assim, se  $w \in V_1 \cap V_2$  existe  $u \in V$  tal que  $w = p(H)^n u$  e  $p(H)^n w = p(H)^{2n} u = 0$ , o que garante que  $p(H)^n u = w = 0$ .

Como  $H p(H)w = p(H)Hw$ , para  $w \in V$ , podemos escolher bases para  $V_1$  e  $V_2$  e a matriz  $A$  como no enunciado, para representar a matriz de  $H$  nesta base.  $\square$

**Observação 5.4.** Considere o operador linear  $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , com produto interno usual e matriz (na base canônica)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Segue que  $H$  não é normal e, tomando  $v = (1, 0, 0, 0)^t$ , temos que

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Av = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A^2v = \begin{bmatrix} 51 \\ 76 \\ 74 \\ 55 \end{bmatrix}, \quad A^3v = \begin{bmatrix} 1099 \\ 1539 \\ 1580 \\ 1174 \end{bmatrix}, \quad A^4v = \begin{bmatrix} 22888 \\ 32208 \\ 33198 \\ 24687 \end{bmatrix}$$

formam um conjunto linearmente dependente. Usando a Expressão (7) encontramos o polinômio  $p(z) = -27 + 68z + 17z^2 + 20z^3 - z^4$  tal que  $p(A)$  é a matriz nula.

Podemos ver graficamente, na Figura 2 que  $p(z)$  possui duas raízes reais e, sendo assim, existe  $v \in \mathbb{R}^4$  de tal forma que o polinômio da Expressão (7) tenha grau 1 ou 2.

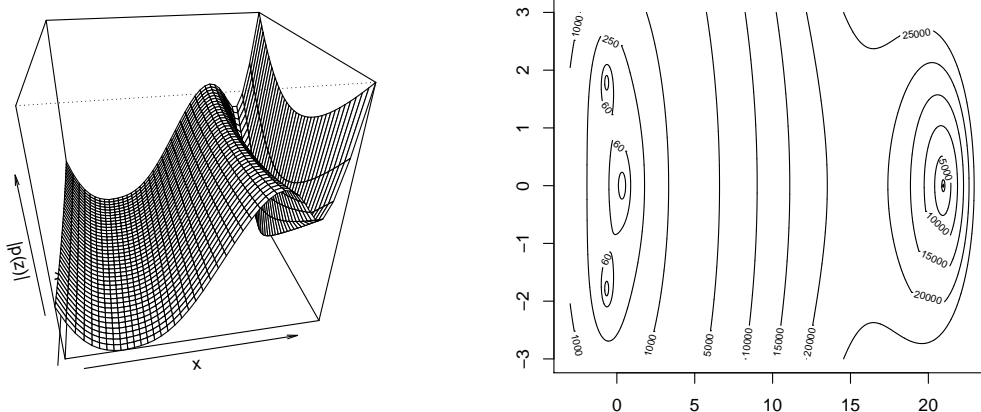


Figura 2: gráfico e curvas de nível de  $|p(z)|$ .

Em particular, é possível escolher autovetores  $v_1$  e  $v_2$  de  $H$ , com autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , e um vetor  $w$ , com  $A^2w = \alpha_1 w + \alpha_2 Aw$ , para algum  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , tais que  $\{v_1, v_2, w, Aw\}$  seja base de  $\mathbb{R}^4$ . A matriz de  $H$  nessa base toma a forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

## 6 Considerações finais

As demonstrações 1 e 3 do Teorema 3.2 podem ser facilmente adaptadas para mostrar que um autovalor de  $H$  é determinado resolvendo o problema de programação não linear

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \psi(x) = \langle Hx, x \rangle \\ \text{sujeito a } g(x) = 1 \end{cases}, \quad (8)$$

com  $g(x) = \langle x, x \rangle$ . A solução desse problema pode ser aproximada por meio do método numérico baseado no gradiente e no método de Euler, dado pela equação a diferenças (ZHOU, 2007)

$$v_{n+1} = (I - 2hH - 2hM(g(v_n) - 1)I)v_n$$

para  $M > 0$  é suficientemente grande,  $h$  positivo (suficientemente próximo de zero) e  $v_0$  é um vetor qualquer de  $E$  (com norma próxima de 1). É claro que o método apresentado é o método de Euler para aproximar numericamente a solução da equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} v'(t) = -\psi'(v(t)) - 2M(g(v(t)) - 1)g'(v(t)) \\ v(0) = v_0 \end{cases}, \quad (9)$$

sendo  $v = v(t) \in E$ , para  $t \in [0, +\infty)$ , uma aproximação de um autovetor de  $H$ , para  $t$  grande (veja Zhou (2007) para algumas discussões recentes sobre o assunto). A Equação (9) descreve a curva em  $E$ , com direção de maior decrescimento da função

$$f(x) = \psi(x) + M(g(x) - 1)^2, \quad x \in E.$$

Cabe notar que esse processo pode aproximar valores mínimos locais de  $\psi(x)$ , que também são autovalores, e que o processo produz também uma aproximação para um autovetor de  $H$ . Podemos ainda aproximar todos os autovalores e autovetores de  $H$ , inserindo em (8) e (9) uma condição de ortogonalidade a cada autovetor e autovalor encontrado. Assim, apresentamos uma forma de aproximar todas as raízes de um polinômio, relacionado com uma matriz normal ou autoadjunta, em particular apresentamos uma forma de aproximar os valores singulares de um operador, e isso é muito bom, porque os trabalhos de Évariste Galois e de Niels Henrik Abel, em suas breves vidas, mostraram que encontrar as raízes de qualquer polinômio de grau maior que quatro só é possível por processo iterativo (por favor veja o Teorema 15.11 em Stewart (2004, p. 159)).

Lembramos que todo polinômio (1) possui uma matriz companheira

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

que está associada um operador  $H : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ , cujos autovalores são raízes desse polinômio (veja a Observação 4.2). O módulo das raízes desse polinômio são os valores singulares de  $A$ . Ainda, sob certas condições, podemos obter aproximações para todas as raízes desse polinômio por meio do algoritmo QR (veja Whatkins (2008) para detalhes de versões modernas do algoritmo), que revolucionou a Análise Numérica depois do ano de 1961. A ideia mais simples para o algoritmo é construir a sequência:

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_{k+1} R_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

com  $A_1 = A = Q_1 R_1$  (veja Expressão (5)). Sob certas condições, essa sequência converge para uma matriz

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & * & \dots & * \\ 0 & B_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_p \end{bmatrix},$$

que possui blocos  $B_i$  de dimensão  $1 \times 1$  ou  $2 \times 2$  na diagonal. Os autovalores de  $B_i$  juntos são os autovalores de  $A$ .

**Observação 6.1.** Para a matriz companheira

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

do polinômio  $p(z)$  dado na Observação 2.5 obtemos as matrizes

$$B_1 \approx \begin{bmatrix} -0.8312761 & -1.21045720 \\ 0.5277258 & -1.11063566 \end{bmatrix}, \quad B_2 \approx \begin{bmatrix} 0.1689174 & -1.0972074 \\ 1.0273954 & 0.7729943 \end{bmatrix},$$

que produzem as aproximações  $-0.9734301 + 0.7873158i$ ,  $-0.9734301 - 0.7873158i$ ,  $0.47343 + 1.025591i$  e  $0.47343 - 1.025591i$  para as raízes de  $p(z)$ , calculando  $A_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, 50$ .

## Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq e a FAPEMIG pelo apoio financeiro.

## Referências

- BRYAN, K.; LEISE, T., The R\$25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google, SIAM Review, Vol. 48, No. 3, 569-581, 2006, <https://doi.org/10.1137/050623280>.
- LIMA, E. L., **Análise Real**, Vol. 2, Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.
- THOMAS, G. B., **Cálculo**, Vol. 2, Pearson, Ed. 11, 2009.
- LIMEI ZHOU, YUE WU, LIWEI ZHANG, GUANG ZHANG, Convergence analysis of a differential equation approach for solving nonlinear programming problems, Applied Mathematics and Computation, Volume 184, Issue 2, 2007, 789-797, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.05.190>.
- PESCO, D. U., BORTOLOSSI, H. J., Imagens digitais e matrizes, Revista Gazeta Matemática, n. 169, 44-48, 2013, <http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=407>.
- JOZI, M., KARIMI, S., Weighted singular value decomposition for the discrete inverse problems, Numer. Linear Algebra Appl., 2017, <https://doi.org/10.1002/nla.2114>.
- GARBI, G. G., **O romance das equações algébricas**, Livraria da Física, São Paulo, 4. ed., 2010.

BUENO, H.P., **Álgebra Linear: Um segundo curso**, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

OLIVEIRA, C. R., **Introdução à Análise Funcional**, 2. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

STEWART, I., **Galois Theory**, 3rd ed., Chapman & Haal/CRC, 2004.

AXLER, S., Down with Determinants!, American Mathematical Monthly, 102, 139-154, 1995, <http://www.axler.net/DwD.html>.

WATKINS, D. S., The QR Algorithm Revisited, SIAM Review 2008 50:1, 133-145, <https://doi.org/10.1137/060659454>.

R CORE TEAM. *R*: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2012. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.