ISSN: 2317-0840

Estudo de Algumas Bolas no Espaço $\mathbb{R}^n$

Saulo Alves de Araujo[1†], *Angela Leite Moreno*[2]

[1] *Graduanda em Matemática Licenciatura, Universidade Federal de Alfenas.*
[2] *Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas.*

Resumo: *Neste trabalho são apresentadas diferentes métricas em $\mathbb{R}^n$, não apenas as usuais, conhecidas como métricas do módulo, a Euclidiana, e a do máximo, que são métricas particulares do caso da métrica p, com $p \in [1, \infty]$. Mais precisamente, se trata de um estudo sobre a sequência em função de p em que, para cada p fixo, obtém-se uma métrica diferente, por exemplo, as métricas Euclidiana e a do módulo são apenas casos particulares para $p = 1$ e $p = 2$, respectivamente, já a métrica do máximo é tratada como $p = \infty$. Será mostrado que esta sequência de funções d_p converge para a métrica do máximo quando p tende ao infinito. Deste modo, primeiramente são apresentadas as normas $\| \cdot \|_p$ e $\| \cdot \|_\infty$ e demonstrado que, de fato, são métricas para o conjunto $\mathbb{R}^n$. Para provar este resultado se faz necessário enunciar e demonstrar três importantes desigualdades: Desigualdade Elementar, Desigualdade de Hölder e Desigualdade de Minkowsky. Em seguida, demonstra-se que, quando p tende ao infinito, a norma $\| \cdot \|_p$ converge para a norma $\| \cdot \|_\infty$. Ao final, conclui-se que todas as métricas aqui apresentadas são equivalentes independente do valor p, desta forma, tem-se a garantia que qualquer que for a escolha de uma dessas métricas obtém-se resultados similares sobre o espaço $\mathbb{R}^n$. Esses resultados são adaptações de resultados análogos para espaços de dimensão infinita apresentados em Kreyszig (1978), sendo que o último resultado é deixado como exercício.*

Palavras-chave: Métricas Equivalentes, Espaços $\mathbb{R}^n$, Desigualdade Elementar, Desigualdade de Hölder, Desigualdade de Minkowsky.

Abstract: *In this work it presents different metrics in $\mathbb{R}^n$, not just the usual ones, known as module metrics, Euclidian, and maximum metrics, which are metric of the p metric case, with p in$[1, \infty]$. More precisely, it is a study about the sequence in function of p in which, for each fixed p, a different metric is obtained, for example, the Euclidean and module metrics are only particular cases for $p = 1$ and $p = 2$, respectively, since the maximum metric is treated as $p = \infty$. It will be shown that this sequence of functions d_p converges to the maximum metric when p tends to infinity. In this way, the rules $\| \cdot \|_p$ e $\| \cdot \|_\infty$ and demonstrated that, in fact, they are metric for the set $\mathbb{R}^n$. To prove this result it is necessary to state and demonstrate three important inequalities: Elementary Inequality, Hölder Inequality and Minkowsky Inequality. Then, it is shown that when p tends to infinity, the norm $\| \cdot \|_p$ converges to the standard $\| \cdot \|_\infty$. At the end, it is concluded that all the metrics presented here are equivalent independent of the value p, in this way, one has the guarantee that whichever one of these metrics is obtained similar results on the space $\mathbb{R}^n$. These results are adaptations of similar results for infinite-dimensional spaces presented in Kreyszig (1978), with the last result being left as an exercise.*

Keywords: Equivalent Metrics, Spaces $\mathbb{R}^n$, Elementary Inequality, Hölder Inequality, Minkowsky Inequality.

†Autor correspondente: sauloalvesaraujo2010@hotmail.com.

Introdução

A disciplina Espaços Métricos está presente na grande maioria dos cursos de matemática, nesta disciplina alguns dos primeiros conceitos a serem apresentados é o de métrica, bola e espaço métrico, junto com estes também são apresentados alguns exemplos. Um dos exemplos apresentados em Munkres (2000) é sobre o espaço $\mathbb{R}^2$ com a métrica Euclidiana e com a métrica do máximo, porém estes resultados não são discutidos de forma detalhada, o mesmo acontecendo em Kreyszig (1978). Com isso, faremos neste trabalho um estudo para mostrar a relação entre estas métricas e apresenta um resultado válido em qualquer espaço $\mathbb{R}^n$.

O Espaço $\mathbb{R}^n$ com diferentes métricas

Foram utilizados como referência para esta seção Domingues (1982) e Kreyszig (1978), entretanto as referências discutem o caso em dimensão infinita (espaço ℓ_p), sendo que os resultados apresentados são para o caso em que a dimensão é finita (espaço $\mathbb{R}^n$), ou seja, para o cujas demonstrações aqui apresentadas são casos mais simples. Além disso, esses resultados são apresentados mais detalhadamente que nas referências.

Definição 1 Suponha que M seja um conjunto não vazio. Uma função $d : M \times M \to [0, +\infty)$ será uma distância ou métrica sobre M se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

(i) para quaisquer $a, b \in M$, tem-se que $d(a, b) = 0$ se, e somente se, $a = b$;

(ii) Simetria: para quaisquer $a, b \in M$ tem-se que$d(a, b) = d(b, a)$;

(iii) Desigualdade Triangular: para quaisquer $a, b, c \in M$ tem-se que

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b).$$

Um par ordenado (M, d) será um *espaço métrico* se M for um conjunto e $d : M \times M \to [0, +\infty)$ for uma métrica sobre M.

Definição 2 Seja (M, d) um espaço métrico, um ponto $x_0 \in (M, d)$ e um $\varepsilon > 0$, então o conjunto $B(x_0, r)$ dado por

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in M | d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$$

será uma bola em (M, d) centrada em x_0 de raio ε.

Sejam $p, q \in (1, \infty)$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ define-se a função $\| \cdot \|_p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dada por

$$\| (x_1, x_2, \ldots, x_n) \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

cuja distância induzida pela norma $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dada por $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$.

E a função $\| \cdot \|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dada por

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\},$$

cuja distância induzida pela norma $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ é dada por $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$.

Para relacionar as métricas nas normas d_p, inicialmente se faz necessário mostrar que estas são realmente métricas e, para isto, apresenta-se algumas desigualdades que serão dadas a seguir:

Lema 1 (Desigualdade de Young (Desigualdade Elementar)) Suponha que a, b, p e q sejam números reais positivos e tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Primeiramente, é necessário relembrar a definição de função convexa: Uma função é dita convexa se, e somente se,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

para todo $t \in [0,1]$.

E mais, se f for duas vezes derivável, então ela será convexa se, e somente se,

$$f''(x) > 0.$$

Observe que $f = e^x$ é duas vezes derivável e

$$f''(x) = e^x > 0.$$

Logo, e^x é uma função convexa.

Tome $t = \dfrac{1}{p}$ e , portanto,

$$1 - t = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln ab) \\ &= \exp\left(\ln(a^p)^{\frac{1}{p}} + \ln(b^q)^{\frac{1}{q}}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q\right) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp(\ln a^p) + \frac{1}{q}\exp(\ln b^q) \\ &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \end{aligned}$$

Portanto,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

■

Segue diretamente da Desigualdade de Yang que, para todo $a, b \in [0, \infty)$ tem-se que

$$a^{1/p}b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Lema 2 (Desigualdade de Hölder) Suponha que $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ então

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{1/q}.$$

Demonstração:

1º Caso: $\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p = 1$ e $\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q = 1$.

Note que

$$|x_j \cdot y_j| = |x_j| \cdot |y_j|,$$

daí, pela Desigualdade Elementar, segue que

$$|x_j \cdot y_j| \leq \frac{|x_j|^p}{p} + \frac{|y_j|^q}{q},$$

logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| &\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{|x_j|^p}{p} + \frac{|y_j|^q}{q} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j|^p}{p} + \sum_{j=1}^{n} \frac{|y_j|^q}{q} \\
&= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Caso Geral: $x, y \in \mathbb{R}^n$ Defina

$$\widetilde{x}_j = \frac{x_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{y}_j = \frac{y_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{1/q}}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |\widetilde{x}_j|^p &= \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{x_j}{\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}} \right|^p \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p} |x_j|^p \\
&= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \\
&= 1
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} |\widetilde{y}_j|^q = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \left| \dfrac{y_j}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/p}} \right|^q$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q} |y_j|^q$$
$$= \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^q$$
$$= 1,$$

assim, pelo 1º caso segue que

$$\sum_{j=1}^{n} |\widetilde{x}_j|\,|\widetilde{y}_j| \leq 1,$$

daí

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{|x_j|}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}} \right) \cdot \left(\frac{|y_j|}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}} \right) \leq 1.$$

Multiplicando ambos os lados por $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$ obtém-se

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{1/q}.$$

■

Lema 3 (Desigualdade de Minkowsky) Suponha que $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ então

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}.$$

Demonstração: Seja q tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e, observe que

$$\sum_{j=1}^{n} \left(|x_j + y_j|^{p-1}\right)^q = \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q} = \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p < \infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p &= \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} (|x_j| + |y_j|) \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \left(|x_j + y_j|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q} + \\
&+ \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \left(|x_j + y_j|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

daí

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p = \left(\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/q}.$$

Logo

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p},$$

daí

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}.$$

■

Aqui foi apresentado o caso da desigualdade de Minkowsky para caso do espaço $\mathbb{R}^n$, o qual possui dimensão finita, porém ela também é válida para o caso de um espaço de dimensão infinita, como é demonstrado em Kreyszig (1978).

Teorema 1 $(\mathbb{R}^n, d_p)$ é um espaço métrico.

Demonstração: Sejam x, y e $z \in (\mathbb{R}^n, d_p)$ com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ então segue que:

(i) Se $d_p(x, y) = 0$ tem-se que

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - yi|^p\right)^{1/p} = 0,$$

ou seja,

$$|x_i - y_i|^p = 0,$$

para $i = 1, 2 \ldots, n$, daí

$$x_i = y_i,$$

para $i = 1, 2 \ldots, n$, portanto $x = y$. De maneira análoga caso $x = y$ então

$$x_i = y_i,$$

para $i = 1, 2 \ldots, n$, assim
$$|x_i - y_i|^p = 0,$$
para $i = 1, 2 \ldots, n$, o que implica em
$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - yi|^p \right)^{1/p} = 0$$

(ii) Note que
$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - yi|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |-(y_i - x_i)|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^p \right)^{1/p} \\ &= d_p(y, x), \end{aligned}$$
para quaisquer $x, y \in M$.

(iii) Como
$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - yi|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|^p \right)^{1/p},$$
pela desigualdade de Minkowsky tem-se que
$$d_p(x, y) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$
Portanto
$$d_p(x, y) \leq d_p(x, z) + d_p(z, y) = d_p(x, z) + d_p(y, z)$$
Portanto segue que $(\mathbb{R}^n, d_p)$ é de fato um espaço métrico. ■

Teorema 2 $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ é um espaço métrico.

Demonstração: Sejam x, y e $z \in (\mathbb{R}^n, d_p)$, com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

(i) Se $d_\infty(x, y) = 0$ então
$$d_\infty(x, y) = \max \{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} = 0,$$
o que implica que
$$|x_i - y_i| \leq 0,$$
então
$$x_i = y_i.$$
Portanto $x = y$ Ȧnalogamente se $x = y$ tem-se que
$$x_i = y_i,$$

daí

$$|x_i - y_i| = 0$$

e, assim

$$\max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} = 0.$$

Portanto,

$$d_\infty(x, y) = 0.$$

(ii) Note que

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \max\{|-(y_i - x_i)| : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \max\{|y_i - x_i| : 1 \leq i \leq n\}, \end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in M$. Portanto,

$$d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x),$$

para quaisquer $x, y \in M$.

(iii) Primeiramente observe que

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |y_i - z_i|,$$

daí

$$|x_i - y_i| \leq \max\{|x_i - z_i| : 1 \leq i \leq n\} + \max\{|y_i - z_i| : 1 \leq i \leq n\},$$

assim,

$$|x_i - y_i| \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(y,z),$$

o que implica que

$$\max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(y,z).$$

Logo,

$$d_\infty(x,y) \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(y,z)$$

Portanto $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ é de fato um espaço métrico. ■

Alguns resultados sobre as métricas d_p com $p \in [1, \infty]$

Teorema 3 No espaço $\mathbb{R}^n$ tem-se que

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p.$$

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{R}^n$, então existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\|x\|_\infty = |x_k|$ daí

$$\begin{aligned} \left| \|x\|_p - \|x\|_\infty \right| &= \left| \left(\sum_{n=1}^{n} |x_n|^p \right)^{1/p} - |x_k| \right| \leq \left| (n\,|x_k|^p)^{1/p} - |x_k| \right| \\ &= \left| n^{1/p}\,|x_k| - |x_k| \right| = \left| \left(n^{1/p} - 1\right) |x_k| \right| \\ &= \left| \left(n^{1/p} - 1\right) |x_k| \right| = \left| n^{1/p} - 1 \right| |x_k|, \end{aligned}$$

daí, fazendo $p \to \infty$ segue que

$$\left| \|x\|_p - \|x\|_\infty \right| \to 0$$

e, portanto

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p.$$

■

Para uma visualização geométrica, tome o espaço $\mathbb{R}^2$ com a métrica $\|\cdot\|_p$, assumindo um raio fixo e um ponto x_0 obtém-se uma bola centrada em x_0 que altera de acordo com p varia, considerando $n = 2$ pode-se ver que as bolas com as normas p vão se aproximando do comportamento da bola induzida pela métrica do máximo, isto pode ser visto na Figura 1.

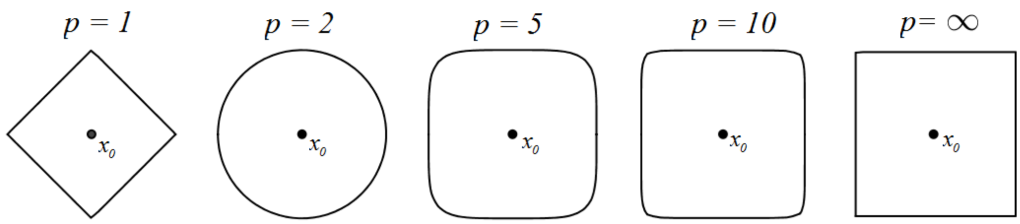

Figura 1: Bolas em $\mathbb{R}^2$ centradas em x_0 conforme p aumenta.

Da mesma maneira pode-se ter uma visualização geométrica em $\mathbb{R}^3$ (Figura 2).

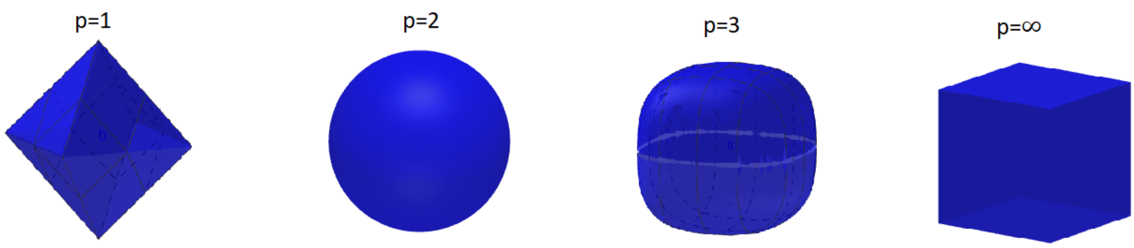

Figura 2: Bolas em $\mathbb{R}^3$ centradas em x_0 conforme p aumenta.

Definição 3 Sejam d_1 e d_2 métricas sobre um mesmo conjunto M. As métricas d_1 e d_2 serão métricas equivalentes se, para cada $x_0 \in M$, qualquer bola $B_{d_1}(x_0, r)$, existir $\lambda > 0$ tal que $B_{d_2}(x_0, \lambda) \subset B_{d_1}(x_0, r)$.

Proposição 1 Sejam d_1 e d_2 métricas sobre um mesmo conjunto M. Se existirem $r, s > 0$ tais que

$$r \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq s \cdot d_1(x, y),$$

então as métricas d_1 e d_2 serão equivalentes.

Demonstração: Sejam d_1 e d_2 métricas em M e $x, y \in M$ tais que

$$r \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq s \cdot d_1(x, y).$$

Considere a bola $B_{d_1}(x_0, \varepsilon)$. Primeiramente será demonstrado que

$$B_{d_2}(x_0, r\varepsilon) \subset B_{d_1}(x_0, \varepsilon).$$

Dado $x \in B_{d_2}(x_0, r\varepsilon)$, então

$$d_2(x_0, x) < r \cdot \varepsilon,$$

e, da hipótese tem-se que $r \cdot d_1(x_0, x) \leq d_2(x_0, x)$, segue que

$$r \cdot d_1(x_0, x) < r\varepsilon,$$

ou melhor,

$$d_1(x_0, x) < \varepsilon.$$

Portanto $x \in B_{d_1}(x_0, \varepsilon)$.

Agora dado $B_{d_2}(x_0, \varepsilon)$, considere $x \in B_{d_1}(x_0, \frac{\varepsilon}{s})$, então

$$d_1(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{s},$$

ou seja,

$$s \cdot d_1(x, x_0) < \varepsilon.$$

Como $d_2(x, x_0) \leq s \cdot d_1(x, x_0)$ então

$$d_2(x, x_0) < \varepsilon.$$

Dessa forma $x \in B_{d_2}(x_0, \varepsilon)$ assim

$$B_{d_1}(x_0, \frac{\varepsilon}{s}) \subset B_{d_2}(x_0, \varepsilon).$$

Portanto d_1 e d_2 são equivalentes. ■

Teorema 4 No conjunto $\mathbb{R}^n$ as métricas d_p e d_∞ são equivalentes.

Demonstração: Sejam $x, y \in (\mathbb{R}^n, d_p)$ com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Considere

$$|x_{k_0} - y_{k_0}| = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\},$$

com $k_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ou seja,

$$d_\infty(x, y) = |x_{k_0} - y_{k_0}| = (|x_{k_0} - y_{k_0}|^p)^{\frac{1}{p}},$$

daí

$$d_\infty(x, y) \leq (|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_{k_0} - y_{k_0}|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto

$$d_\infty(x, y) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - yi|^p\right)^{1/p},$$

ou seja,

$$d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y).$$

Agora, será provado que $d_p(x, y) \leq n^{1/p} \cdot d_\infty(x, y)$.
De fato, primeiramente relembrando que

$$d_\infty(x, y) = |x_{k_0} - y_{k_0}|,$$

para algum $k_0 \in \{1, 2, \ldots n\}$. Além disso,

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - yi|^p\right)^{1/p},$$

daí,

$$\begin{aligned}
(d_p(x, y))^p &= |x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_k - y_k|^p + \ldots + |x_k - y_k|^p \\
&\leq |x_{k_0} - y_{k_0}|^p + \ldots + |x_{k_0} - y_{k_0}|^p + \ldots + |x_{k_0} - y_{k_0}|^p \\
&= n \cdot |x_{k_0} - y_{k_0}|^p,
\end{aligned}$$

assim

$$(d_p(x, y))^p \leq n \cdot |x_{k_0} - y_{k_0}|^p$$

e como $p \in [1\infty)$ segue que

$$d_p(x, y) \leq n^{1/p} \cdot |x_{k_0} - y_{k_0}|,$$

ou melhor,

$$d_p(x, y) \leq n^{1/p} \cdot d_\infty(x, y).$$

Com tudo isso, segue da Proposição 1 que d_p e d_∞ são equivalentes para qualquer $p \in [1, \infty)$. ■

Considerações Finais

Neste trabalho foi construída uma sequência de funções que converge para a métrica do máximo, consequentemente obtêm-se uma sequência de bolas, sendo possível estabelecer a relação entre as métricas do mólulo, Euclidiana e a do máximo. Além disso, o Teorema 4 garante que todas as métricas d_p são equivalentes a d_∞ e assim, são equivalentes entre si também. Desta forma todas as métricas determinam um mesmo espaço topológico, portanto todas elas satisfazem as mesmas propriedades métricas sobre o conjunto $\mathbb{R}^n$.

References

DOMINGUES, H. H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*. São Paulo: Atual, 1982.

KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley & Sons, 1978.

MUNKRES, J. R. *Topology*. 2 ed., Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.