ISSN: 2317-0840

Completude no Espaço de Funções Contínuas $\mathcal{C}[a, b]$

Saulo Alves de Araujo[1†], *Angela Leite Moreno*[2]

[1] *Graduando em Matemática-Licenciatura, Universidade Federal de Alfenas.*
[2] *Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas.*

Resumo: *A disciplina de Espaços Métricos está presente na grande maioria dos cursos de graduação em Matemática, tanto nas licenciaturas quanto nos bacharelados. Nessa disciplina, estudam-se propriedades referentes a completude de um espaço, sendo discutidos exemplos usuais como* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}^n$*, porém, quando se estudam as aplicações se faz necessário utilizar espaços mais complexos, como, por exemplo, o espaço de funções. Para estudar mais profundamente estes espaços são necessários conceitos referentes a Análise Funcional, tendo em vista que este espaço possui dimensão infinita. Entretanto, utilizando conceitos mais básicos vistos em Espaços Métricos, conseguimos estudar o espaço das funções reais contínuas definidas em um intervalo* $[a, b]$*, espaço este denotado por* $\mathcal{C}[a, b]$*. Ao trabalhar neste espaço, temos que cada ponto é uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, ou seja, as funções são tratadas como pontos do espaço métrico. Entretanto, nosso foco é discutir como duas métricas em um mesmo espaço podem mudar as características deste espaço como, por exemplo, a completude. Assim, concluímos que duas métricas distintas no espaço de este espaço verificando que, ao mudarmos a métrica, podemos perder propriedades interessantes como a completude.*

Palavras-chave: Espaços de Banach, Métrica do Máximo, Métrica do Integral.

Abstract: *The discipline of metric spaces is present in most of the undergraduate courses in Mathematics, both undergraduate and baccalaureate. In this discipline, properties related to the completeness of a space are studied, with usual examples being discussed as* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{R}^n$*, but when studying applications it is necessary to use more spaces functions, such as function space. To study these spaces more deeply, concepts related to Functional Analysis are necessary, since this space has an infinite dimension. However, using more basic concepts seen in Metric Spaces, we can study the space of continuous real functions defined in a range* $[a, b]$*, space denoted by* $\mathcal{C}[a, b]$*. When working in this space, we have that each point is a function* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, that is, functions are treated as metric space points. However, our focus is on how two metrics in the same space can change the characteristics of this space, such as completeness. Thus, we conclude that two different metrics in the space of this space verifying that, when we change the metric, we can lose interesting properties like completeness.*

Keywords: Banach Spaces, Maximum Metric, Integral Metric.

1 Introdução

Primeiramente iremos definir o conjunto das funções reais contínuas no intervalo $[a, b]$ que será o objeto deste trabalho, em seguida definimos duas métricas neste conjunto e então analisamos quais as consequências ao se trabalhar com diferentes métricas. Em especial, discutiremos a completude nessas duas métricas que, segundo Munkres (2000), é um conceito essencial a ser compreendido em qualquer aspecto da Análise. Apesar desse conceito estar ligado à propriedade métrica do espaço em vez da topológica, são numerosos os resultados envolvendo completude de espaços métricos que caracterizam um espaço topológico.

†Autor correspondente: sauloalvesaraujo2010@hotmail.com.

2 Espaços de funções $\mathcal{C}[a,b]$

Antes de apresentarmos o conjunto das funções reais contínuas, precisaremos de alguns conceitos essenciais neste estudo. Iniciaremos apresentando o conceito de métrica juntamente com o de espaço métrico.

Definição 1 Suponhamos que X seja um conjunto não vazio. Diremos que uma função $\rho : X \times X \to [0,+\infty)$ é uma distância ou métrica sobre X se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

(i) Para quaisquer $a,b \in M$, temos que $\rho(a,b) = 0$ se, e somente se, $a = b$.

(ii) Simetria: para quaisquer $a,b \in M$ temos que$\rho(a,b) = \rho(b,a)$.

(iii) Desigualdade Triangular: para quaisquer $a,b,c \in M$ temos que

$$\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b).$$

Diremos que um par ordenado (M,ρ) é um *espaço métrico* se M for um conjunto não vazio e $\rho : M \times M \to [0,+\infty)$ for uma métrica sobre M.

Exemplo 1 *Consideremos as funções* $\rho_1, \rho_2 : \mathcal{C}[a,b] \times \mathcal{C}[a,b] \to [0,+\infty)$ *dadas por*

$$\rho_1(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| \qquad e \qquad \rho_2(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt.$$

Então $(\mathcal{C}[a,b],\rho_1)$ *e* $(\mathcal{C}[a,b],\rho_1)$ *são espaços métricos.*

De fato, notemos que, para quaisquer $f,g,h \in \mathcal{C}[a,b]$ temos

(i) $\rho_1(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| = 0$, se e somente se,

$$|f(t) - g(t)| = 0,$$

para todo $t \in [a,b]$, se e somente se,

$$f(t) = g(t),$$

para todo $t \in [a,b]$, se e somente se,

$$f = g$$

(ii) $\rho_1(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| = \max_{t\in[a,b]} |g(t) - f(t)| = \rho_1(g,f)$;

(iii) Notemos que

$$|f(t) - g(t)| \leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|,$$

assim

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &\leq \max_{t\in[a,b]} |f(t) - h(t)| + \max_{t\in[a,b]} |h(t) - g(t)| \\ &\leq \rho_1(f,h) + \rho_1(h,g) \end{aligned}$$

Portanto
$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| \leq \rho_1(f,h) + \rho_1(h,g),$$
ou seja,
$$\rho_1(f,g) \leq \rho_1(f,h) + \rho_1(h,g)\rho_1(g,f).$$

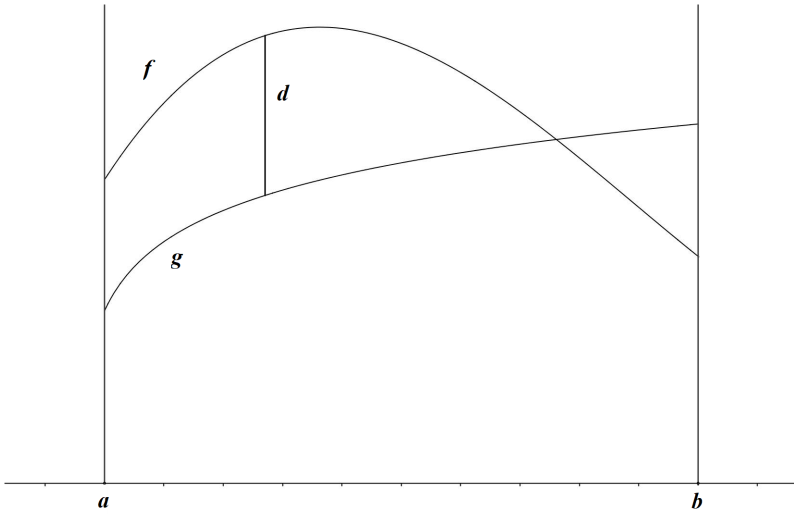

Figura 1: Representação gráfica da métrica do máximov

Portanto $(\mathcal{C}[a,b], \rho_1)$ é um espaço métrico.

Novamente considerando $f, g, h \in \mathcal{C}[a,b]$ temos que

(i) Notemos que
$$\rho_2(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt = 0$$
se, e somente se,
$$f(t) = g(t),$$
para todo $t \in [a,b]$, pois $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$, e isso acontece se, e somente se,
$$f = g.$$

(ii) $\rho_2(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt = \int_a^b | - g(t) + f(t)|dt = \int_a^b |g(t) - f(t)|dt = \rho_2(g,f).$

(iii) Como
$$|f(t) - g(t)| \leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|,$$
para todo $t \in [a,b]$, integrando de a a b de ambos os lados da desigualdade temos que
$$\int_a^b |f(t) - g(t)|dt \leq \int_a^b |f(t) - h(t)|dt + \int_a^b |h(t) - g(t)|dt,$$
ou melhor,
$$\rho_2(f,g) \leq \rho_2(f,h) + \rho_1(h,g).$$

Logo $(\mathcal{C}[a,b], \rho_1)$ é um espaço métrico. ■

Para definirmos completude em um espaço métrico precisamos do conceito de sequência de Cauchy, que apresentamos a seguir:

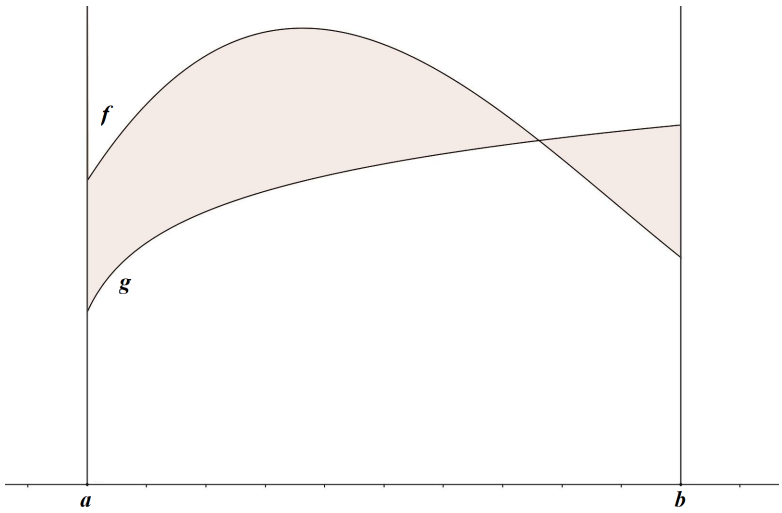

Figura 2: Representação gráfica da métrica da integral

Definição 2 *Consideremos um espaço métrico (X, d). Uma sequência (x_n) em um espaço métrico é chamada de sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ então $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Agora já estamos em condições de definir completude em um espaço métrico:

Definição 3 *Um espaço métrico se diz completo quando toda sequência de Cauchy deste espaço convergir.*

Exemplo 2 $(\mathcal{C}[a, b], \rho_1)$ *é completo.*

Com efeito, seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}[a, b]$, então dado $\varepsilon > 0$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\rho_1(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

para quaisquer $m, n > n_0$, isto é,

$$\max_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon,$$

para quaisquer $m, n \geq n_0$. Em particular temos que

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon,$$

para todo $t \in [a, b]$ e para quaisquer $m, n \geq n_0$. Assim temos que a sequência $\{f_n(t)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, para cada $t \in [a, b]$ fixo. Como $\mathbb{R}$ é completo, para cada $t \in [a, b]$ temos que

$$f_n(t) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(t).$$

Considerando a função assim definida precisamos mostrar que $f_n \to f$ e que $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

Afirmação 1: $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

De fato, dado $t_0 \in [a, b]$, temos que

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(t_0)| + |f_n(t_0) - f(t_0)|, \tag{1}$$

Como $f_n(t) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(t)$,segue que exitem $n_1, n_2 > 0$ tais que

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n > n_1$ e

$$|f_n(t_0) - f(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n > n_2$. Além disso, pela continuidade de f_n temos que existe $\delta > 0$ tal que se $|t - t_0| < \delta$, então

$$|f_n(t) - f_n(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $n > n_2$. Logo, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ da Desigualdade (1) segue que, se $|t - t_0| < \delta$, então

$$|f(t) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$, com $t_0, t \in [a, b]$. Portanto f é contínua.

Afirmação 2: $f_n \to f$.
Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho_1(f_n, f) = \max_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. Para isto basta considerarmos que

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$ e todo $t \in [a, b]$. Como $\{f_n\}$ é de Cauchy exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho_1(f_n, f_m) = \max_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para quaisquer $m, n > n_0$. Em particular

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para quaisquer $m, n > n_0$ e $t \in [a, b]$. Agora, tomando t fixo e fazendo $m \to \infty$ temos que

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$ e todo $t \in [a, b]$. Logo

$$\rho_1(f_n, f) = \max_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$ e $\varepsilon > 0$ dado. Portanto $(\mathcal{C}[a, b], \rho_1)$ é completo. ■

Porém se alterarmos a métrica podem haver alterações no espaço. Para isto basta tomarmos o mesmo espaço acima com uma outra métrica.

Exemplo 3 *$(\mathcal{C}[-1, 1], \rho_2)$ não é completo.*

Com efeito, consideremos em $(\mathcal{C}[-1, 1], \rho_2)$ a sequência de funções

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq t \leq 0, \\ nt, & \text{se } 0 < t \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{se } \frac{1}{n} < t \leq 1, \end{cases}$$

Primeiramente provaremos que a sequência $\{f_n\}$ é de Cauchy, ou seja, que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho_2(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

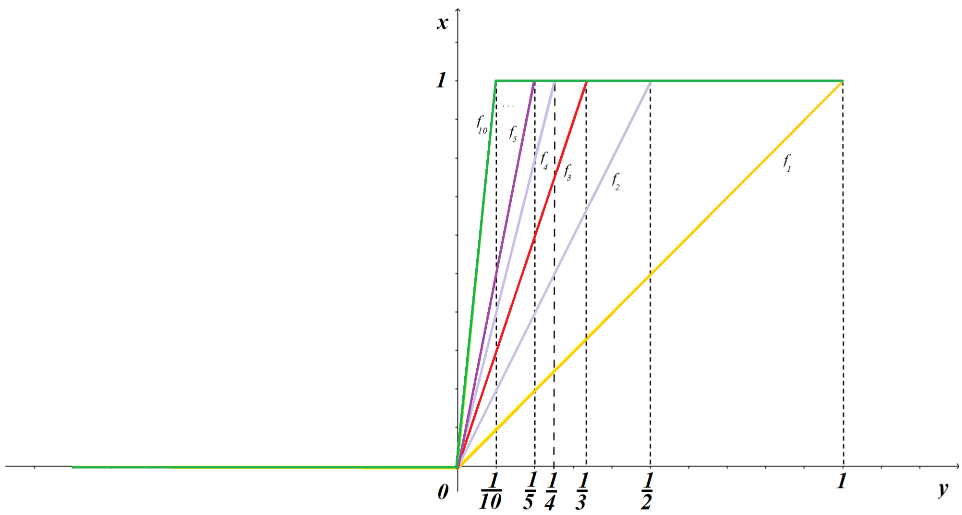

Figura 3: Sequência das funções $f_n(t)$

para todo $n > n_0$, ou seja, que

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$.
De fato, consideremos a sequência $f_n(t)$, ela será de Cauchy.
Para verificarmos esse fato, tomemos $\varepsilon > 0$ e consideremos $m < n$, pois, com isso, teremos que

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{m},$$

daí

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|dt \leq \int_{-1}^{0} |f_n(t) - f_m(t)|dt + \int_{0}^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - f_m(t)|dt +$$

$$+ \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |f_n(t) - f_m(t)|dt + \int_{\frac{1}{m}}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|dt$$

$$= \int_{-1}^{1} |0 - 0|dt + \int_{0}^{\frac{1}{n}} |nt - mt|dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |1 - mt|dt + \int_{\frac{1}{m}}^{1} |1 - 1|dt =$$

$$= (n - m)\int_{0}^{\frac{1}{n}} tdt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |1 - mt|dt =$$

$$= (n - m)\frac{t^2}{2}\bigg|_{0}^{\frac{1}{n}} + \left[t - \frac{mt^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} =$$

$$= \frac{n - m}{2n^2} + \frac{1}{m} - \frac{m}{2m^2} - \frac{1}{n} + \frac{m}{2m^2}v =$$

$$= \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Assim,

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|dt \leq \varepsilon$$

para m e n suficientemente grandes. Logo existe $n_0 > 0$ tal que

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|dt \leq \varepsilon$$

para todo $m, n > n_0$. Portanto $f_n(t)$ é de Cauchy. Essa sequência é de Cauchy, porém ela é converge para uma função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq t \leq 0, \\ 1, & \text{se } 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

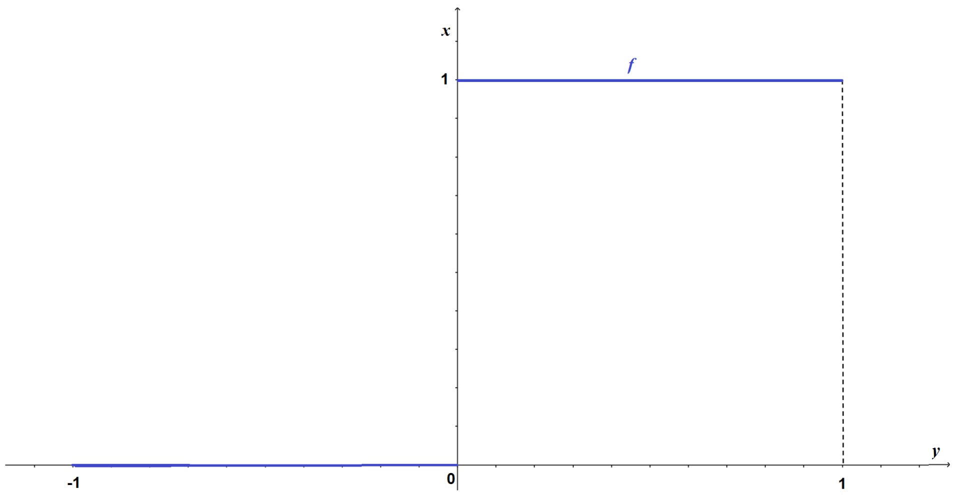

Figura 4: Gráfico da Função $f(t)$.

que não é contínua, portanto o espaço $(\mathcal{C}[-1,1], \rho_2)$ não é completo com esta métrica.

Considerações e Conclusões

Com o estudo das métricas realizado nesse trabalho foi possível verificar que um mesmo conjunto ao assumir métricas diferentes resulta em espaços métricos distintos, possuindo características distintas, como a completude do espaço.

References

KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.

MUNKRES, J. R. **Topology**, 2 ed., Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.