ISSN: 2317-0840

Um Resultado sobre Funções Mensuráveis Limitadas em $\mathcal{L}^p$

Michele Martins Lopes[1†], Angela Leite Moreno[2].

[1] *Graduada em Matemática, Universidade Federal de Alfenas*
[2] *Professora do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas*

Resumo: *Neste artigo são apresentados alguns dos resultados trabalhados no Trabalho de Conclusão de Curso sobre Teoria da Medida e Integração. Funções Lebesgue integráveis são funções que se encontram em um espaço chamado Espaço L^p, com $p \in [1,\infty)$. Primeiramente definimos tal espaço e, dentre resultados importantes sobre o mesmo, mostramos que ele é um espaço vetorial. Então, após definir uma norma nesse espaço, mostramos que ele é um espaço vetorial normado. Para isso, utilizamos três importantes desigualdades: Desigualdade de Young, Desigualdade de Hölder e Desigualdade de Minkowsky. Daí, definimos uma distância com essa norma e mostramos que o Espaço L^p com essa distância é um espaço métrico completo. Uma função Lebesgue integrável deve ser uma função simples, ou então deve existir uma função simples que tenha propriedades semelhantes às da função que se deseja integrar. Ao final apresentamos o teorema que garante a existência de uma função simples que possui propriedades semelhantes à de uma função presente no Espaço L^p. Com isso, temos a aplicação que diz que o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso no espaço L^p.*

Palavras-chave: *Integral de Lebesgue, Função Simples, Conjunto Denso, Espaços L^p.*

Abstract: *In this article we presented some of the results with which we dealt while doing the Course Concluding Work on Measure and Integration Theory. Lebesgue integrable functions are functions that lie in a space called L^p Space, with $p \in [1,\infty)$. At first we defined such space and, as one of the important results about it, we showed that it is a vector space. Then, after defining a norm for that space, we demonstrated that it is a normed vector space. With this purpose, we used three important inequalities: Young's Inequality, Hölder's Inequality and Minkowsky's Inequality. Afterwards we defined a distance through that norm and demonstrated that L^P space with that distance is a complete metric space. An Lebesgue Integrable Function must be a simple function, or otherwise there must be a simple function having properties similar to those of the function to be integrated. At the end of this work we presented a theorem which guarantees the existence of a simple function having properties similar to those of a function lying in L^P Space. Finally, we have obtained an application clarifying that the set of limited measurable functions is dense in the L^p space.*

Keywords: *Lebesgue integral, Simple Functions, Dense Set, L^p Space.*

Introdução

Primeiramente, apresentamos as definições de espaços $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^p$, mostrando que estamos trabalhando em um espaço vetorial. Em seguida vemos três importantes desigualdades que são necessárias para demonstrar um teorema que mostra que $\mathcal{L}^p$ é espaço vetorial normado, com uma norma específica, que é finita. Definimos, com isso, uma métrica d_p, que em $\mathcal{L}^p$ determinam um espaço métrico completo. Por fim, esse teorema é usado para demonstrar um resultado fundamental para esse estudo. Com ele, realizamos uma aplicação: o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em $\mathcal{L}^p$. Este trabalho foi baseado em Kreyszig (1978), Medeiros (2008) e Ricou (2009).

[†]Autor correspondente: mi_martins22@hotmail.com.

Os Espaços $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^p$

Definição 1 Seja $p \in [1, \infty)$. Definamos $L^p(X, \mu)$ o seguinte conjunto

$$L^p(X,\mu) = \left\{ f \text{ mensurável} : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Para simplificar utilizaremos a notação $\mathcal{L}^p(X,\mu) := L^p(X,\mu)\Big|_{\sim}$.

Agora, suponhamos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ seja um espaço de medida. Seja $L^1(X,\mu)$, e considere a seguinte relação: $f \sim g \leftrightarrow f = g$, quase sempre.

Assim, $f \sim g$ se existir $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mu(A) = 0 \ e \ f(x) = g(x),$$

para todo $x \notin A$. Temos que $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $L^1(X,\mu)$.

De fato,

(i) $f \sim f$, *pois* $f = f$.

(ii) Suponhamos que $f \sim g$, daí $f = g$ quase sempre, então $g = f$ quase sempre e, portanto, $g \sim f$.

(iii) Suponhamos que $f \sim g$ e que $g \sim h$, então

- *existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \notin A$;*
- *existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(B) = 0$ e $g(x) = h(x)$, para todo $x \notin B$.*

Tomando $C = A \cup B$, temos que $C \in \mathcal{A}$ e que

$$\mu(C) = \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0,$$

ou seja, $\mu(C) = 0$. E mais, para todo $x \notin C$, temos que

$$f(x) = g(x) = h(x).$$

Portanto, $f \sim h$.

Definição 2 Definimos a seguinte norma sobre $\mathcal{L}^1(X,\mu)$

$$\|[f]\| := \int_X |f| \, d\mu.$$

Usaremos a notação $\mathcal{L}^1(X,\mu) := \mathcal{L}^1(X,\mu)\Big|_{\sim}$. Além disso, por convenção, denotaremos $[f] = f$.

Antes de continuarmos se faz necessário mostrarmos que $\|\cdot\|$ está bem definida.

De fato, suponhamos que $f, g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ sejam tais que $[f] = [g]$. Queremos mostrar que $\|[f]\| = \|[g]\|$, ou seja, que

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |g| d\mu.$$

Observemos que, se $[f] = [g]$, então $f \sim g$, ou seja, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin A$. Assim, para todo $x \notin A$, temos que

$$f^+(x) = g^+(x) \qquad e \qquad f^-(x) = g^-(x),$$

daí,

$$\int_X f^+ d\mu = \int_X g^+ d\mu \qquad e \qquad \int_X f^- d\mu = \int_X g^- d\mu,$$

logo,

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |g| d\mu.$$

Portanto $\|[f]\| = \|[g]\|$. ■

Teorema 1 $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ é um espaço vetorial.

Demonstração: *Sejam* $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então*

$$f + \lambda g \in \mathcal{L}^p(X, \mu).$$

De fato,

$$\begin{aligned} |f + \lambda g| &= |(f + \lambda g)(x)| \\ &\leq |f(x)| + |\lambda||g(x)| \\ &= |f| + |\lambda||g|, \end{aligned}$$

quase sempre. Daí,

$$\begin{aligned} \int_X |f + \lambda g| d\mu &= \int_X (|f| + |\lambda||g|) \, d\mu \\ &= \int_X |f| d\mu + |\lambda| \int_X |g| d\mu. \end{aligned}$$

Como $\int_X |f| d\mu < \infty$ *e* $\int_X |g| d\mu < \infty$, *então*

$$\int_X |f| d\mu + |\lambda| \int_X |g| d\mu < \infty,$$

portanto,

$$\int_X |f + \lambda g| d\mu < \infty$$

Como

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq 2 \max \{|f(x)|, |g(x)|\} \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq 2^p (\max \{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &= 2^p \max \{|f(x)|^p, |g(x)|^p\}, \end{aligned}$$

deste modo,

$$|f(x) + \lambda g(x)|^p \leq 2^p \max \{|f(x)|^p, |\lambda|^p |g(x)|^p\}$$

juntamente com o fato de

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty \quad e \quad \int_X |g|^p d\mu < \infty,$$

segue que

$$\int_X |f + \lambda g|^p d\mu < \infty.$$

Portanto, $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ *é um espaço vetorial.* ■

Nosso objetivo agora será mostrar que o espaço $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, munido da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço vetorial normado. Para isso, precisaremos das Desigualdades de Young, de Hölder e de Minkowsky, como seguem nos lemas abaixo:

Lema 1 (Desigualdade de Young (ou Desigualdade Elementar)) Suponhamos que a, b, p e q sejam números reais positivos e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 2 (Desigualdade de Hölder) Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Considere $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ e $g \in \mathcal{L}^q(X,\mu)$, então $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ e

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Demonstração: *Se $\|f\|_p \cdot \|g\|_q = 0$, então $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$, donde $|f| = 0$ quase sempre, ou $|g| = 0$ quase sempre. Assim, $|f \cdot g| = |f| \cdot |g| = 0$ quase sempre. Portanto,*

$$\int_X |f \cdot g| d\mu = 0.$$

Então, suponhamos que $\|f\|_p \cdot \|g\|_q \neq 0$. Neste caso podemos reescrever a desigualdade desejada como

$$\int_X \left|\frac{f}{\|f\|_p}\right| \cdot \left|\frac{g}{\|g\|_q}\right| d\mu \leq 1.$$

Tomemos

$$\varphi = \frac{f}{\|f\|_p} \qquad e \qquad \psi = \frac{g}{\|g\|_p},$$

daí basta verificarmos que

$$\int_X |\varphi \cdot \psi| d\mu \leq 1,$$

onde $\varphi \in L^p(X,\mu)$ e $\psi \in L^q(X,\mu)$, e

$$\|\varphi\|_p = 1 \qquad e \qquad \|\psi\|_p = 1.$$

Usando a Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\int_X |\varphi| \cdot |\psi| d\mu &\leq \int_X \left(\frac{|\varphi|^p}{p} + \frac{|\psi|^q}{q}\right) d\mu \\
&= \int_X \left(\frac{|\varphi|^p}{p}\right) d\mu + \int_X \left(\frac{|\psi|^q}{q}\right) d\mu \\
&= \frac{1}{p}\left(\int_X |\varphi|^p d\mu\right) + \frac{1}{q}\left(\int_X |\psi|^q d\mu\right) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

Lema 3 (Desigualdade de Minkowsky) Sejam $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$, então

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demonstração: *Se* $p = 1$ *vale a desigualdade.*

Então, suponhamos que $p > 1$. *Daí,*

$$\begin{aligned} |f+g|^p &= |f+g|^{p-1} \cdot |f+g| \\ &\leq |f+g|^{p-1} \cdot (|f| + |g|) \\ &= |f+g|^{p-1} \cdot |f| + |f+g|^{p-1} \cdot |g|. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\int_X (|f+g|^{p-1})^q d\mu = \int_X |f+g|^p d\mu < \infty,$$

o que significa que

$$|f+g|^{p-1} \in L^q(X, \mu).$$

Dessa forma, podemos utilizar a Desigualdade de Hölder para obter que

$$\int_X |f+g|^{p-1} \cdot |f| d\mu \leq \| |f+g|^{p-1} \|_q \cdot \|f\|_p,$$

e que

$$\int_X |f+g|^{p-1} \cdot |g| d\mu \leq \| |f+g|^{p-1} \|_q \cdot \|g\|_p.$$

Então, temos que

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \|f\|_p \cdot \| |f+g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \cdot \| |f+g|^{p-1} \|_q,$$

ou seja,

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \cdot \| |f+g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \cdot \| |f+g|^{p-1} \|_q,$$

assim,

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \| |f+g|^{p-1} \|_q.$$

Como

$$\begin{aligned} \| |f+g|^{p-1} \|_q &= I \left[\int_X (|f+g|^{p-1})^q d\mu \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\int_X (|f+g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{p}{q}} \\ &= \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

então

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

e, dividindo ambos os lados por $\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$, *juntamente com o fato de*

$$p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p\frac{1}{p} = 1,$$

e consequentemente

$$\frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}} = \|f+g\|_p,$$

então segue que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

■

Observação 1 Vale a igualdade na desigualdade de Minkowsky se, e somente se,

(i) Quando $p = 1$ então f e g têm o mesmo sinal quase sempre;

(ii) Quando $p > 1$ existem A e B tais que $AB \neq 0$ e $Af = Bg$ quase sempre.

Pois, $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a$ e b possuem o mesmo sinal quase sempre.

Teorema 2 $\left(\mathcal{L}^p(X, \mu), \|\cdot\|_p\right)$ é um espaço vetorial normado com a norma dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração:

(i) *É claro que $\|f\|_p = 0$ se, e somente se, $f = 0$.*

(ii) *Notemos que*

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_p &= \left(\int_X |\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_X |\lambda|^p |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda| \, \|f\|_p . \end{aligned}$$

(iii) *Desigualdade Triangular: Segue diretamente da Desigualdade de Minkowsky.* ■

Definição 3 Suponhamos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ seja um espaço de medida e que $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, com $p \in (1, \infty)$. Sobre $(X, \mathcal{A}, \mu)$ temos a norma

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definamos então

$$d_p(f, g) = \|f - g\|_p ,$$

onde $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$.

Teorema 3 $(\mathcal{L}^p(X, \mu), d_p)$ é um espaço métrico completo.

Demonstração: *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L^p(X, \mu)$. Tomemos a subsequência $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$, com $n_1 \geq n_2 \geq \ldots$, tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < 1.$$

Basta aplicarmos a definição de sequência de Cauchy, com $\varepsilon = \dfrac{1}{2^k}$, para $k = 1, 2, \ldots$ Definamos

$$g_k = |f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \ldots + |f_{n_{k+1}} - f_{n_k},|$$

para $k = 1, 2, \ldots$ Notemos que g_k é mensurável, e mais,

$$g_k \geq 0,$$

para $k = 1, 2, \ldots$, daí

$$g_k \leq g_{k+1},$$

para $k = 1, 2, \ldots$ Portanto, $g_k(x)$ é convergente e, daí, defina

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

Afirmação: *$g \in L_p(X, \mu)$.*

Com efeito, como cada g_k é mensurável, temos que g é mensurável. Além disso,

$$\int_X g^p d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} g_k^p d\mu,$$

daí, pelo Teorema de Beppo-Levi, segue que

$$\int_X g^p d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k^p d\mu.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\left(\int_X g_k^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &= \|g_k\|_p \\ &\leq \|f_{n_1}\|_p + \|f_{n_2} - f_{n_1}\|_p + \cdots + \|f_{n_k+1} - f_{n_k}\|_p \\ &\leq ||f_{n_1}\|_p + 1 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_X g^p d\mu &\leq \lim_{k\to\infty} (||f_{n_1}\|_p + 1) \\ &\leq \|f_{n_1}\|_p + 1 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Por um teorema temos que g^p é finita quase sempre. Logo, g é finita quase sempre, ou seja,

$$|f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

é finita quase sempre. Daí,

$$|f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

converge quase sempre e, portanto,

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

converge quase sempre. Logo, a sequência $\left\{f_{n_{k+1}(x)}\right\}$ converge quase sempre.

Agora, definamos

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_{k+1}}(x),$$

quase sempre.

Fixemos $\varepsilon > 0$ e tomemos um índice k suficientemente grande de forma que, se $m, n \geq n_k$, então

$$\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon,$$

assim,

$$\left\|f_{n_k} - f_n\right\|_p < \varepsilon,$$

para $n \geq n_k$ e $k > K$. Usando o Lema de Fatou, segue, para $n \geq n_k$, que

$$\begin{aligned}
\int_X |f - f_n|^p \, d\mu &= \int_X \lim_{k\to\infty} \inf |f_{n_k} - f_n|^p \, d\mu \\
&= \lim_{k\to\infty} \inf \int_X |f_{n_k} - f_n|^p \, d\mu \\
&= \lim_{k\to\infty} \inf \|f_{n_k} - f_n\|^p \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \inf \varepsilon^p \\
&= \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|f - f_n\|_p \leq \varepsilon,$$

para todo $n \geq k$.

■

Teorema 4 Suponhamos que $p \in [1, \infty)$ e que $\varepsilon > 0$. Se $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ então existe uma função simples ψ tal que

$$|\psi| \leq f \quad \text{e} \quad \|f - \psi\|_p < \varepsilon.$$

Demonstração:

1º caso: $f \geq 0$.

Usando o Teorema 3 podemos afirmar que existe uma sequência $\{\psi_n\}$ de funções simples tais que $0 \leq \psi_n \leq f$ e

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f(x) \tag{1}$$

daí

$$\begin{aligned}
|\psi_n - f| &\leq 2^p \left(|\psi_n|^p + |f|^p\right) \\
&\leq 2^p \left(|f|^p + |f|^p\right) \\
&= 2^{p+1}|f|^p
\end{aligned}$$

logo

$$|\psi_n - f| \leq 2^{p+1}|f|^p \tag{2}$$

Assim, com a Equação 1 juntamente com a Desigualdade 2, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n - f|^p = 0.$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_X |\psi_n - f|^p d\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty} |\psi_n - f|^p d\mu \\
&= \int_X 0 d\mu \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - f\|_p^p = 0.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe ψ simples tal que

$$\|f - \psi\|_p < \varepsilon.$$

2º caso: *f é qualquer.*

Como $f = f^+ - f^-$, onde $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$, podemos usar o caso anterior e afirmar que existem funções simples φ e ψ tais que

$$0 \leq \varphi \leq f^+ \qquad e \qquad 0 \leq \psi \leq f^-$$

e, assim,

$$\left\|f^+ - \varphi\right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad e \qquad \left\|f^- - \psi\right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como φ e ψ são funções simples, então $\varphi - \psi$ também é. Além disso,

$$\begin{aligned} |\varphi - \psi| &\leq \varphi| + |\psi| \\ &\leq f^+ + f^- \\ &= |f|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\varphi - \psi| \leq |f|,$$

e mais,

$$\begin{aligned} \|f - (\varphi - \psi)\|_p &= \|f^+ - f^- + (\varphi - \psi)\|_p \\ &\leq \|f^+ - f^-\|_p + \|\varphi + \psi\|_p \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, existe uma função simples $\varphi - \psi$ tal que

$$|\varphi - \psi| \leq f \qquad e \qquad \|f - (\varphi - \psi)\|_p < \varepsilon.$$

■

Teorema 5 Suponhamos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ seja finito, isto é, que $\mu(X) < \infty$. Então

(i) Se $1 \leq p < q \leq \infty$, então $\mathcal{L}^q(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mu)$.

(ii) Se $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$, então

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p.$$

Demonstração: *Temos dois casos a considerar:*

1º caso: *$q = \infty$.*

Queremos provar que $\mathcal{L}^\infty(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Seja $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$. Temos que

$$|f| \leq \|f\|_\infty \text{ quase sempre.}$$

daí,

$$|f|^p \leq \|f\|_\infty^p \text{ quase sempre}$$

e, por uma proposição, temos que

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^p \, d\mu,$$

logo,

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \, \mu(X) < \infty,$$

assim,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \, \mu(X)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$f \subset \mathcal{L}^p(X,\mu).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) \subset \mathcal{L}^p(X,\mu).$$

2º caso: *$q < \infty$. Assim, $1 \leq p < q < \infty$.*

Seja $f \subset \mathcal{L}^q(X,\mu)$, tomemos $\lambda = \dfrac{q}{p} > 1$, pois $q > p$. Podemos escolher β de forma que

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\lambda} = 1,$$

daí, usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_X |f|^p &\leq \left(\int_X (|f|^p)^\lambda \, d\mu\right)^{1/\lambda} \cdot \left(\int_X 1^\beta d\mu\right)^{1/\beta} \\
&= \left(\left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^{1/q}\right)^p \cdot (\mu(X))^{1/\beta} \\
&= \left(\|f\|_q\right)^p \cdot (\mu(X))^{1/\beta}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot (\mu(X))^{1/\beta p}.$$

Assim, se $f \in \mathcal{L}^q(X,\mu)$, então $\|f\|_p < \infty$, e, com isso,

$$\mathcal{L}^q(X,\mu) \subset \mathcal{L}^p(X,\mu).$$

Exemplo 1 Se $p \in [1,+\infty)$ então o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em $\mathcal{L}^q(X,\mu)$.

Com efeito, dada $f \in \mathcal{L}^q(X,\mu)$ e fixado $\varepsilon > 0$, por um teorema, existe uma função simples ψ tal que

$$|\psi| \leq f \qquad e \qquad \|f - \psi\|_p < \varepsilon,$$

e, como toda função simples é $\mathcal{L}^q(X,\mu)$, o resultado segue.

Com isso, mostramos que o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

References

KREYSZIG, E. Introductory functional analysis with applications. New York: John Wiley & Sons, 1978.

MEDEIROS, L. A. A Integral de Lebesgue. 6 ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

RICOU, M. Medida e Integração. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2009.