

Aplicação do Teorema de Baire

Michele Martins Lopes^{1†}, Angela Leite Moreno².

¹ *Graduada em Matemática, Universidade Federal de Alfenas*

² *Professora do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas*

Resumo: *Este trabalho trata de uma revisão de literatura, no qual são apresentados resultados obtidos de um projeto de Iniciação Científica em Análise Funcional. Primeiramente, discutiu-se sobre os conceitos de Espaço de Banach, Espaço Dual, Conjunto Nunca Denso, Conjunto de Primeira Categoria e Conjunto de Segunda Categoria. Com essas definições foi possível enunciar e demonstrar o Teorema de Baire, juntamente com seus corolários, que serviram como base para os dois Teoremas de Banach-Steinhaus, sendo o segundo a recíproca do primeiro, com o acréscimo da hipótese de X ser um Espaço de Banach. Estes dois teoremas, por sua vez, são fundamentais para a demonstração do Princípio da Limitação Uniforme aqui apresentada. Utilizamos esse princípio no seguinte resultado: em um Espaço de Banach X , onde uma função f pertence ao Espaço Dual de X , ou seja, X^* , se a imagem direta de um conjunto, $f(B)$, for um conjunto limitado, então B também será limitado.*

Palavras-chave: Análise Matemática, Espaços de Banach, Princípio da Limitação Uniforme, Teorema de Banach-Steinhaus.

Abstract: *This work deals with a literature review, in which are presented results obtained from a project of Scientific Initiation of Functional Analysis. Firstly, it was discussed about the concepts of Banach Space, Dual Space, Never Dense Set, First Category Set, Second Category Set. With these definitions it was possible to enunciate and to demonstrate Baire's Theorem together with its corollaries, which constituted the basis for the two Banach-Steinhaus' Theorem, the second being the reciprocal of the first one, with addition of the hypothesis of X being a Banach Space. These two theorems, in their turn, are fundamental to demonstrate the Principle of Uniform Limitation presented here. We use this principle in the following result: in a Banach Space X , where a function f belongs to Dual Space, that is, X^* , if the direct image of a set, $f(B)$, is a limited set, then B will also be limited.*

Keywords: Mathematical Analysis, Banach Spaces, Principle of Uniform Limitation, Banach-Steinhaus Theorem.

Introdução

Este trabalho apresenta alguns resultados importantes de Análise Funcional, com foco nas aplicações do Teorema de Baire. Para a sua realização foram utilizadas as seguintes referências: Huston e Pym (1980), Kreyszig (1978) e Munkres (2000). Primeiramente seguem algumas definições e resultados necessários, incluindo o Teorema de Baire, para que possamos utilizá-lo para demonstrar o Princípio da Limitação Uniforme, e encerramos com uma aplicação.

[†]Autor correspondente: mi_martins22@hotmail.com.

Teorema de Baire

Para começarmos as discussões, a primeira indagação é sobre o que é um Espaço de Banach? Um Espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo em relação a métrica induzida pela norma. Uma das propriedades mais interessantes de espaços vetoriais normados é que qualquer um destes pode ser imerso em um espaço de Banach.

Outro conceito importante é o de Espaço Dual, que denotamos por $\mathcal{L}(Y, \mathbb{K})$, sendo este constituído de funções $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ contínuas e lineares, em que Y é um espaço vetorial normado sobre o corpo \mathbb{K} . Ressaltamos que o espaço $\mathcal{L}(Y, \mathbb{K})$ é um Espaço de Banach geralmente denotado por Y^* .

Além destes conceitos, também precisamos compreender quando um conjunto é Nunca Denso, conceito essencial para definir conjuntos de 1ª e 2ª categoria. Assim:

Definição 1 (Conjunto Nunca Denso) Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico. Diremos que um subconjunto A de X é nunca denso quando $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$.

Notemos que ao mudarmos o espaço em que A está, A pode permanecer ou não nunca denso. De fato, se A for nunca denso, temos que $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$.

Se A for fechado, $A = \bar{A}$. Dessa forma,

$$\overset{\circ}{\bar{A}} = \overset{\circ}{A} = \emptyset$$

Logo, \bar{A} é nunca denso. ■

Além disso, se A for nunca denso e $B \subset A$ então B também será nunca denso.

De fato, se A é nunca denso, ou seja, que $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$ e que $B \subset A$, então

$$\overset{\circ}{\bar{B}} \subset \overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset.$$

Assim, $\overset{\circ}{\bar{B}} = \emptyset$. Logo, B é nunca denso.

Outra caracterização de conjuntos nunca densos pode ser dada através do seguinte resultado:

Proposição 1 Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico compacto e que A seja um subconjunto de X . Então A será nunca denso em X se, e somente se, $\overline{X - \bar{A}} = X$.

Demonstração: Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico e que $A \subset X$.

Afirmção: $X - \overline{X - \bar{A}} = \overset{\circ}{A}$.

Assim, considerando $B = \bar{A}$, provaremos que se $B \subset X$, então

$$X - \overline{X - B} = \overset{\circ}{B}.$$

De fato,

(C) Podemos observar que $X - B \subset \overline{X - B}$. Assim, temos que

$$X - \overline{X - B} \subset X - (X - B) = B,$$

ou seja,

$$X - \overline{X - B} \subset B.$$

Como $\overline{X - B}$ é fechado, então $X - \overline{X - B}$ é aberto. Portanto,

$$X - \overline{X - B} \subset \overset{\circ}{B}.$$

(\supset) Notemos que $X - B \subset X - \overset{\circ}{B}$

Como $X - \overset{\circ}{B}$ é fechado, então

$$\overline{X - B} \subset X - \overset{\circ}{B},$$

assim,

$$X - (X - \overset{\circ}{B}) \subset X - (\overline{X - B}),$$

ou melhor,

$$\overset{\circ}{B} \subset X - (\overline{X - B}).$$

Concluimos, então, que

$$X - (\overline{X - B}) = \overset{\circ}{B},$$

ou, ainda, que

$$X - \overline{X - A} = \overset{\circ}{A} \tag{1}$$

Agora podemos facilmente demonstrar o que queremos.

(\Rightarrow) Como A é nunca denso em X , $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

Mas, por 1 temos que

$$X - \overline{X - A} = \emptyset.$$

Portanto,

$$X = \overline{X - A}.$$

(\Leftarrow) Suponhamos que $X = \overline{X - A}$. Logo,

$$X - \overline{X - A} = \emptyset,$$

mas, pela Equação (1), temos que

$$\overset{\circ}{A} = \emptyset.$$

Concluimos, então, que A é nunca denso em X . ■

Agora podemos apresentar as devidas definições de Conjunto de 1ª e de 2ª categoria para que seja possível demonstrar o teorema central de nosso trabalho: o Teorema de Baire.

Definição 2 (Conjunto de 1ª Categoria e Conjunto de 2ª Categoria) Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico e que A seja um subconjunto de X . Diremos que A é de 1ª Categoria em (X, ρ) quando A for uma união enumerável de conjuntos nunca densos. Quando A não for de 1ª Categoria diremos que A é de 2ª Categoria.

Algumas das consequências imediatas dessa definição são:

- Se A for de 1ª Categoria em (X, ρ) e $B \subset A$, então B será de de 1ª Categoria em (X, ρ) .
- Se $\{A_n\}$ for uma família de conjuntos de 1ª Categoria em (X, ρ) , então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ será de de 1ª Categoria em (X, ρ) .

Com isso, estamos em condições de apresentar o Teorema de Baire:

Teorema 1 (Teorema de Baire) Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico completo. Se $\{A_n\}$ for uma família de conjuntos abertos e densos de (X, ρ) então

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = X.$$

Demonstração: Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico completo, e $\{A_n\}$ uma família de conjuntos abertos e densos. Defina $F_n = X - A_n$.

Afirmção 1: F_n é de 1ª categoria.

De fato, como A_n é denso em X , então $\overline{X - A_n} = \emptyset$. Daí,

$$\overset{\circ}{F_n} = \overline{X - A_n}^{\circ} = \emptyset = \emptyset.$$

Portanto, $\overset{\circ}{F_n} = \emptyset$, então F_n é de 1ª categoria.

Agora, seja A um subconjunto de X de 1ª categoria em X tal que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

Então,

$$X - A = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (2)$$

Afirmção 2: $\overline{X - A} = X$.

Notemos que $X - \overline{F_n}$ é aberto e $\overline{X - \overline{F_n}} = X$, para $n = 1, 2, \dots$, então

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{F_n})} = X \quad (3)$$

mas $F_n \subset \overline{F_n}$ e, portanto

$$X - \overline{F_n} \subset X - F_n$$

daí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{F_n}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n),$$

assim, pela Equação (3) temos que

$$X = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{F_n})} \subset \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n)} \subset X$$

assim,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n) = X$$

e, portanto

$$\overline{X - A} = X.$$

■

Segue diretamente do Teorema de Baire que todo espaço métrico completo é de 2ª categoria em X .

Corolário 1 Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico completo. Então X será de 2ª categoria em X .

Corolário 2 Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico completo e que A seja um subconjunto fechado de X . Se A for de 1ª categoria em X , então A será nunca denso.

Demonstração: Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico completo, que A seja um subconjunto fechado de X e que A seja um conjunto de 1ª categoria em X .

Pela demonstração do Teorema de Baire podemos dizer que

$$\overline{X - A} = X.$$

Como A é fechado, então $\overline{X - A} = X$ e, por teorema, segue que A é nunca denso. ■

Corolário 3 Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico completo e que A seja um subconjunto de X . Se A for de 1ª categoria em X , então

$$\overline{X - A} = X.$$

Demonstração: Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico completo, que A seja um subconjunto de X e que A seja de 1ª categoria em X . Logo

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

em que f_n é nunca denso para $n = 1, 2, \dots$. Daí

$$X - A = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n). \quad (4)$$

Afirmção: $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n) = X$.

Notemos que $X - \bar{F}_n$ é aberto e $\overline{X - \bar{F}_n} = X$, para $n = 1, 2, \dots$, então, por teorema, segue que

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (X - \bar{F}_n)} = X \quad (5)$$

mas $F_n \subset \bar{F}_n$ e, portanto

$$X - \bar{F}_n \subset X - F_n$$

daí

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (X - \bar{F}_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (X - F_n),$$

assim, pela Equação (5) temos que

$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (X - \bar{F}_n)} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (X - F_n) \subset X$$

assim,

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (X - \bar{F}_n)} = X$$

e, portanto

$$\overline{X - A} = X. \quad \blacksquare$$

Aplicação do Teorema de Baire

Nesta última seção, apresentamos o Teorema de Banach-Steinhaus (#1), sendo necessária uma hipótese adicional para provar sua recíproca, enunciada como Teorema de Banach-Steinhaus (#2). Também apresentamos o Princípio da Limitação Uniforme utilizando esses primeiros resultados e finalizamos com um exemplo de aplicação desse princípio, no qual se tivermos um espaço de Banach e uma função em seu espaço dual, se a imagem direta de um conjunto for limitada teremos que este conjunto também será limitado.

Iniciaremos com o Teorema de Banach-Steinhaus (#1) que garante que, sob determinadas hipóteses, se o conjunto de pontos onde uma função é finita for de 2ª categoria, essa função será finita.

Teorema 2 (Teorema de Banach-Steinhaus (#1)) Suponhamos que $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ sejam espaços vetoriais normados e que $T_\alpha \in \mathcal{L}(X, Y)$, com $\alpha \in \Omega$. Se

$$\{x \in X : \sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}$$

for de 2ª Categoria então

$$\sup \{\|T_\alpha\| : \alpha \in \Omega\} < \infty.$$

Demonstração: Primeiramente, observe que:

$$\{x \in X : \sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} \leq n\}$$

Afirmção: $\{x \in X : \sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} \leq n\}$ é fechado.

Seja $A_n = \{x \in X : \sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} \leq n\}$.

Tomando $x_m \in A_n$ tal que $\|x_m - x\| \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$, vamos analisar se $x \in A_n$.

Podemos afirmar que

$$\|T_\alpha(x_m)\| \leq n,$$

para $m = 1, 2, \dots$, pois $x_m \in A_n$, daí,

$$\begin{aligned} \|T_\alpha(x)\| &= \|T_\alpha(x) - T_\alpha(x_m) + T_\alpha(x_m)\| \\ &\leq \|T_\alpha(x - x_m)\| + \|T_\alpha(x_m)\| \end{aligned}$$

e, pelo fato de T ser contínua

$$\begin{aligned} \|T_\alpha(x)\| &\leq \|T_\alpha\| \|x - x_m\| + \|T_\alpha(x_m)\| \\ &\leq \|T_\alpha\| \|x - x_m\| + n. \end{aligned}$$

que, ao passarmos o limite quando $m \rightarrow \infty$, nos leva a

$$\|T_\alpha(x)\| \leq n,$$

para todo $\alpha \in \Omega$. Assim, $\sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} \leq n$, ou seja, $x \in A_n$. Portanto, A_n é fechado.

Além disso, por hipótese temos que

$$\{x \in X : \sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}$$

é de 2ª Categoria, assim

$$\text{int} A_m = \text{int} \{x \in X : \sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < m\} \neq \emptyset,$$

para algum m .

Tomemos $\overline{B_r(x_0)} \subset A_m$ e seja $x \in X$, com $\|x\| \leq 1$. Então

$$\begin{aligned} \|T_\alpha(x)\| &= \frac{1}{r} \|T_\alpha(rx)\| \\ &= \frac{1}{r} \|T_\alpha(rx + x_0) - T_\alpha(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{r} \|T_\alpha(rx + x_0)\| + \frac{1}{r} \|T_\alpha(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m \\ &\leq \frac{2}{r}m \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \Omega$. ■

Agora, para garantir a validade de sua recíproca, precisaremos que X seja um espaço de Banach:

Teorema 3 (Teorema de Banach-Steinhaus (#2)) Suponhamos que X seja um espaço de Banach, que $(Y, \|\cdot\|)$ seja um espaço vetorial normado e que $T_\alpha \in \mathcal{L}(X, Y)$, com $\alpha \in \Omega$. Se $\sup \{\|T_\alpha\| : \alpha \in \Omega\} < \infty$, então

$$\{x \in X : \sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}$$

será de 2ª Categoria.

Demonstração: Tomando $x \in X$, como $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, podemos afirmar que:

$$\|T_\alpha(x)\| \leq \|T_\alpha\| \|x\| \leq M \|x\|,$$

com $\alpha \in \Omega$.

Em particular,

$$\sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} \leq M \|x\|,$$

com $x \in X$.

Logo,

$$\{x \in X : \sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\} = X.$$

X é um espaço completo e, portanto, é de 2ª categoria.

Portanto, $\{x \in X : \sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}$ é de 2ª categoria. ■

O Princípio da Limitação Uniforme, dado no Teorema 4, utiliza as mesmas hipóteses do Teorema 3 e garante que se o supremo de uma função, aplicada em um ponto do domínio, é finita, então a função é finita. Para a demonstração desse princípio os Teoremas 2 e 3 são utilizados. E mais, esse princípio é a base para a nossa aplicação, realizada logo após.

Teorema 4 (Princípio da Limitação Uniforme) Suponhamos que X seja um espaço de Banach, que $(Y, \|\cdot\|)$ seja um espaço vetorial normado e que $T_\alpha \in \mathcal{L}(X, Y)$, com $\alpha \in \Omega$. Se $\sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty$ então $\sup \{\|T_\alpha\| : \alpha \in \Omega\} < \infty$.

Demonstração: Se mostrarmos que

$$\{\sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}$$

é de 2ª categoria, pelo Teorema 2 provamos o que queremos. Como $\sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty$, com $x \in X$, podemos dizer que

$$X = \{x \in X : \sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}.$$

X é completo e, assim, de 2ª categoria.

Portanto, $\{\sup \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\}$ é de 2ª categoria. ■

Por fim, como consequência temos que a seguinte aplicação:

Exemplo 1 Suponhamos que X seja um espaço de Banach, que $f \in X^*$ e que $B \subset X$. Se $f(B)$ for limitado então B será limitado.

Demonstração: Para cada $b \in B$, temos que

$$\begin{array}{ccc} T_b : X^* & \rightarrow & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(b) \end{array}$$

Assim temos que, para cada $T_b \in \mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})$ que $\|T_b\| = \|b\|$. Além disso, para cada $f \in X^*$, temos que $\|T_b(f)\| = \|f(b)\|$. Assim

$$\sup \{\|T_b(f)\| : b \in B\} = \sup \{\|f(b)\| : b \in B\} < \infty$$

segue, pelo Princípio da Limitação Uniforme que $\sup \{\|T_b\| : b \in B\} < \infty$, daí

$$\sup \{\|b\| : b \in B\} < \infty,$$

donde segue que B é limitado. ■

References

HUSTON, V. PYM, J.S. *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*. Academic Press, 1980.

KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley & Sons, 1978.

MUNKRES, J.R. *Topology*, 2 ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.