

Tesselações no Plano Hiperbólico

Anna Karenina Lima Antunes^{1†}, Cátia Regina Oliveira Quilles Queiroz²

¹ *Graduada em Matemática Licenciatura, Universidade Federal de Alfenas.*

² *Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas.*

Resumo: *Neste artigo é apresentado um estudo de tesselações no plano hiperbólico, com ênfase nas tesselações regulares. As tesselações estão presentes em nosso cotidiano há muito tempo, desde 5000 a.C., em colmeias de abelhas e decorações de vasos, por exemplo, mas por volta do século XVI, com os estudos de Johannes Kepler, matemático e físico alemão, essas pavimentações deixam de ter caráter puramente estético e passam a ser vistas como um estudo matemático, com diversas aplicações. Ao se estudar tesselações regulares no plano euclidiano, nota-se que há um número limitado das mesmas, mais precisamente, existem apenas três delas neste plano. Assim, surge então uma expansão acerca do estudo das tesselações regulares, agora no plano hiperbólico, uma vez que neste plano existem infinitas possibilidades, enriquecendo ainda mais o estudo das tesselações. Então, após um estudo geral sobre geometria hiperbólica, foram considerados dois modelos euclidianos bem conhecidos desta geometria: o semi-plano superior e o disco de Poincaré. Esses modelos trazem uma melhor visualização do plano hiperbólico.*

Palavras-chave: Geometria hiperbólica; modelos plano hiperbólico; tesselações regulares.

Abstract: *In this paper a study of hyperbolic tessellations is presented, with emphasis on regular tessellations. The tessellations have been present in our daily lives for a long time, since 5000 a.C, in bee hives and pot decorations, for example, but in the 16th century, with the studies of Johannes Kepler, German mathematician and physicist, these pavements left to have a purely aesthetic character and come to be seen as a mathematical study, with several applications. When studying regular tessellations in the Euclidean plane, it is noticed that there are a limited number of them, more precisely, there are only three of them in this plane. Thus there arises an expansion about the study of regular tessellations, now on the hyperbolic plane, since in this plane there are infinite possibilities, further enriching the study of tessellations. Then, after a general study on hyperbolic geometry, two well-known Euclidean models of this geometry were considered: the upper half-plane and the Poincaré disc. These models provide a better visualization of the hyperbolic plane.*

Keywords: Hyperbolic geometry; hyperbolic plane models; regular tessellations.

Introdução

Tesselação é o recobrimento de um plano por polígonos, regulares ou não, de modo que não hajam sobreposições e nem espaços vazios entre eles. É também chamada de pavimentação ou mosaico. Desde os tempos mais remotos, esses padrões geométricos obtidos através de tesselações destacam-se por sua beleza e, assim, vêm sendo observados tanto na natureza, em colmeias e arranjos de escamas de peixes, por exemplo; como na prática humana, em recobrimentos de pisos e paredes e em decorações de objetos: vasos, tetos, painéis, entre outros. Porém, os primeiros registros sobre tesselações como estudo matemático foram associados a Johannes Kepler, matemático e físico alemão, por volta do século XVI (LEITÃO, 2015, p. 13).

Dentre os vários tipos de tesselações, uma classe de tesselações considerável é a classe de tesselações regulares, utilizadas principalmente em aplicações matemáticas, como problemas de empacotamento esférico, codificação de geodésicas, entre outros.

[†] Autora correspondente: akla_19@hotmail.com.

Uma tesselação regular é o recobrimento de um plano por polígonos regulares (lados e ângulos de medidas iguais) congruentes, e é denotada por $\{p, q\}$, em que p é o número de lados e q é o número de polígonos que se encontram em cada vértice (QUEIROZ, 2011, p. 41).

Existem apenas três tesselações regulares no plano euclidiano, as quais são formadas por triângulos equiláteros $\{3, 6\}$, por quadrados $\{4, 4\}$, ou por hexágonos $\{6, 3\}$. Entretanto, o estudo de tesselações vem ganhando destaque no âmbito na geometria hiperbólica e do plano hiperbólico, pois nessa geometria é possível obter infinitas tesselações (LEITÃO, 2015, p. 21).

O quinto postulado de Euclides, conhecido como Postulado das Paralelas, foi descrito por John Playfair (1748-1819) como: “*Por um ponto não contido em uma reta dada, pode ser traçada uma e apenas uma reta paralela à reta dada*”. Devido a várias tentativas de prová-lo a partir dos outros quatro postulados, o quinto postulado foi, depois de muito tempo, provado ser independente dos demais e assim muitos avanços foram feitos. Descobriu-se que, sem esse postulado, a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser menor ou maior que π , isto é, 180° (BRAZ, 2009, p. 14-15).

Desta forma, muitos matemáticos como Karl Friedrich Gauss (1777-1855), Nicolai Lobatchevsky (1793-1856) e János Bolyai (1802-1860) se dedicaram a estudar três situações distintas: dados uma reta e um ponto fora dela, por esse ponto é possível passar uma, nenhuma ou várias retas paralelas à reta dada. A partir dessa terceira suposição, desenvolveu-se a geometria hiperbólica (QUEIROZ, 2011, p. 33).

Mais tarde, por volta do século XIX, matemáticos como Félix Klein e Henri Poincaré criaram modelos euclidianos para representar a geometria hiperbólica, como por exemplo, o semi-plano superior e o disco de Poincaré (BRAZ, 2009, p. 29). Sendo assim, a criação desses modelos vinculou a consistência da geometria hiperbólica à consistência da geometria euclidiana, uma vez que qualquer contradição encontrada em uma implicaria em contradição na outra, isto é, ambas possuem o mesmo grau de consistência.

Diferentemente do plano euclidiano, há inúmeras tesselações hiperbólicas regulares no plano hiperbólico. Assim, estas tesselações têm sido muito estudadas devido ao número de aplicações, que estão relacionadas ao problema de empacotamento esférico, por exemplo. Além disso, tesselações hiperbólicas podem ser aplicadas na área de codificação de geodésicas - caminho de menor comprimento - e em estudos acerca de sistemas de comunicação digital de sinais (LESKOW, 2011, p. 1). Os resultados desses estudos, no que se refere à sistemas de comunicações digitais, principalmente relacionados à área de transmissões de sinais, tem mostrado ótimos resultados.

Modelos Plano Hiperbólico

Existem várias maneiras de se construir a geometria hiperbólica, e essas construções são feitas baseadas em modelos euclidianos. Nesta seção, serão apresentados dois modelos relativamente simples, o *semiplano superior* e o *disco de Poincaré*.

Uma vantagem do modelo do disco de Poincaré sobre o modelo do semiplano superior é que o disco é um subconjunto limitado do plano euclidiano. Assim, pode-se ver todo o plano hiperbólico facilmente em uma folha de papel. Por outro lado, a vantagem do modelo do semiplano superior sobre o modelo do disco é a facilidade com que podem ser utilizadas coordenadas cartesianas em cálculos. Ambos os modelos são equivalentes e, dessa forma, é possível trabalhar com o modelo mais adequado de acordo com a necessidade, ou seja, utilizar o que for mais conveniente.

Definição 1 *O semiplano \mathbb{H} é o conjunto de números complexos z , com a parte imaginária positiva, ou seja,*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}.$$

O círculo no infinito ou fronteira de \mathbb{H} é definido como o conjunto

$$\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Ou seja, $\partial\mathbb{H}$ é o eixo real em conjunto com o ponto ∞ .

Definição 2 O disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ é chamado de disco de Poincaré. O círculo $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ é chamado de círculo no infinito ou fronteira de \mathbb{D} .

Na geometria euclidiana um polígono de n lados é um subconjunto do plano euclidiano delimitado por linhas retas, ou seja, formado por segmentos de geodésicas euclidianas. Um polígono hiperbólico é definido de forma análoga.

Definição 3 Sejam $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$. Então, o polígono de n lados com vértices z_1, \dots, z_n é a região de \mathbb{H} delimitada pelos segmentos de geodésicas $[z_1, z_2], \dots, [z_{n-1}, z_n], [z_n, z_1]$.

Um resultado bastante importante da geometria hiperbólica é o Teorema de Gauss-Bonnet, descrito a seguir:

Teorema 1 (Teorema de Gauss-Bonnet para um triângulo)

Seja Δ um triângulo hiperbólico com ângulos internos α, β e γ . Então:

$$Area_{hip}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Como consequência desse teorema tem-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é estritamente inferior a π .

Tesselações

Tesselar significa recobrir um plano por figuras, de forma que não haja sobreposições e nem espaços vazios entre elas (ALBUQUERQUE, 2009, p. 87). Sendo assim, as tesselações - também conhecidas como pavimentações ou mosaicos - existem há muito tempo, desde quando o homem utilizou pedras para cobrir pisos e paredes de sua casa: suas peças mais antigas datam 5000 a.C., e foram encontradas no Egito (LEITÃO, 2015, p. 13).

Mais tarde, os romanos passaram a utilizar tesselações para retratar pessoas e os árabes, por sua vez, incluíram figuras geométricas em seus arabescos - desenhos com padrões geométricos vistos tradicionalmente em tapetes e na arquitetura.

Porém, mais tarde as tesselações deixaram de ter um caráter estético e começaram a servir de objeto para estudos matemáticos. Seu primeiro registro foi em 1600, com o matemático Johannes Kepler, pioneiro em estudos de pavimentações no plano (LEITÃO, 2015, p. 13).

Em uma tesselação pode-se chamar de nós todos os vértices dos polígonos utilizados e de arestas os segmentos de retas ligadas por dois nós consecutivos de um mesmo lado do polígono.

Há vários tipos de tesselações e elas podem ser classificadas a partir da forma como estão ordenadas (LEITÃO, 2015, p. 19-20).

- Lado a lado: Quando os polígonos tem lados comuns e cada nó é vértice de um polígono.
- Monoédricas: Tesselações com polígonos congruentes entre si.
- Regulares: Quando são lado a lado e monoédrica ao mesmo tempo, isto é, é utilizado um único polígono regular para tesselar o plano.
- Semirregulares: Tesselações feitas com dois ou mais polígonos regulares, porém com o mesmo tipo de nó, ou seja, o padrão em cada vértice deve ser o mesmo.
- Demirregulares: Composta por dois ou mais polígonos regulares, porém com diferentes tipos de nós.
- Irregulares: Tesselações que não são regulares, semirregulares ou demirregulares.

- Parciais: Quando apenas uma região do plano é tessellada.
- Ideais: Quando todo o plano é preenchido com uma quantidade enumerável de polígonos.
- Periódicas: Tesselações que não variam ao sofrer translações, ou seja, ao ser transladada uma cópia num determinado sentido, em algum momento a cópia coincidirá com a tesselação original.
- Não Periódicas: Também chamadas de aperiódicas, são tesselações as quais não há padrão de repetição ao sofrerem translações.

A Figura 1 apresenta alguns exemplos de tesselações lado a lado, enquanto a Figura 2 apresenta tesselações periódica e aperiódica, respectivamente. A Figura 3 apresenta tesselações demirregulares.

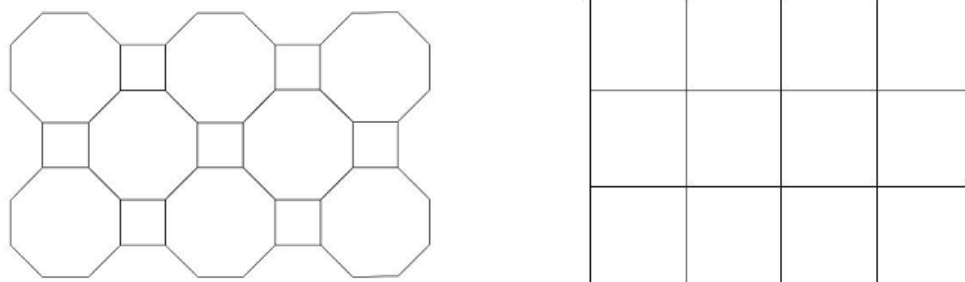


Figura 1: Tesselações lado a lado, sendo a primeira semirregular e a segunda regular.

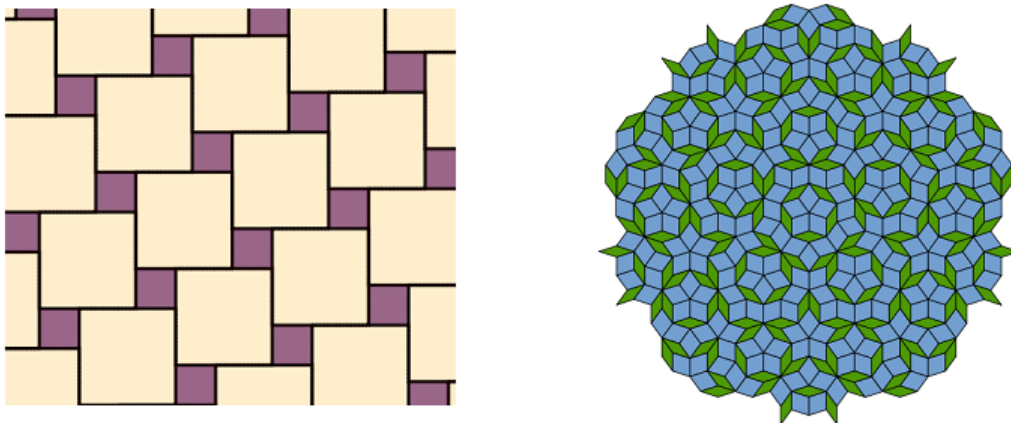


Figura 2: Tesselações periódica e aperiódica, respectivamente.
Fonte: <https://commons.wikimedia.org/>.

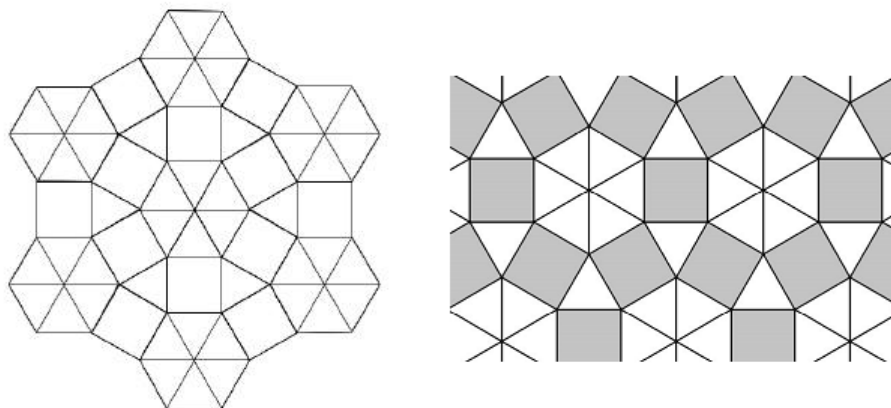


Figura 3: Tesselações demirregulares.
 Fonte: <https://commons.wikimedia.org/>.

Tesselações no Plano Euclidiano

Uma tesselação no plano euclidiano é o recobrimento do plano euclidiano por polígonos, regulares ou irregulares, sem sobreposições e espaços vazios entre eles.

Com o passar dos anos, descobriu-se diversas tesselações do plano euclidiano. Uma classe de tesselações que se destaca é a classe de tesselações regulares, uma vez que estas são mais utilizadas em aplicações matemáticas. Assim, tem-se que uma tesselação regular também consiste em recobrir o plano de forma que não tenha sobreposições e nem espaços vazios entre eles, porém com polígonos regulares congruentes.

Uma tesselação regular é denotada por $\{p, q\}$, onde q é o número de polígonos regulares, com p lados, que se encontram em cada nó (vértice). Uma tesselação $\{q, p\}$ é denominada tesselação dual e, em particular, se $p = q$, então é chamada auto-dual (ALBUQUERQUE, 2009, p. 106).

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π , então $\{p, q\}$ é uma tesselação regular se, e somente se,

$$\frac{2\pi}{p} + \frac{2\pi}{q} = \pi,$$

ou seja,

$$(p - 2)(q - 2) = 4.$$

Para esta equação existem três soluções e, assim, existem apenas três tesselações regulares no plano euclidiano, as quais são formadas por triângulos equiláteros $\{3, 6\}$, quadrados $\{4, 4\}$ e hexágonos $\{6, 3\}$.

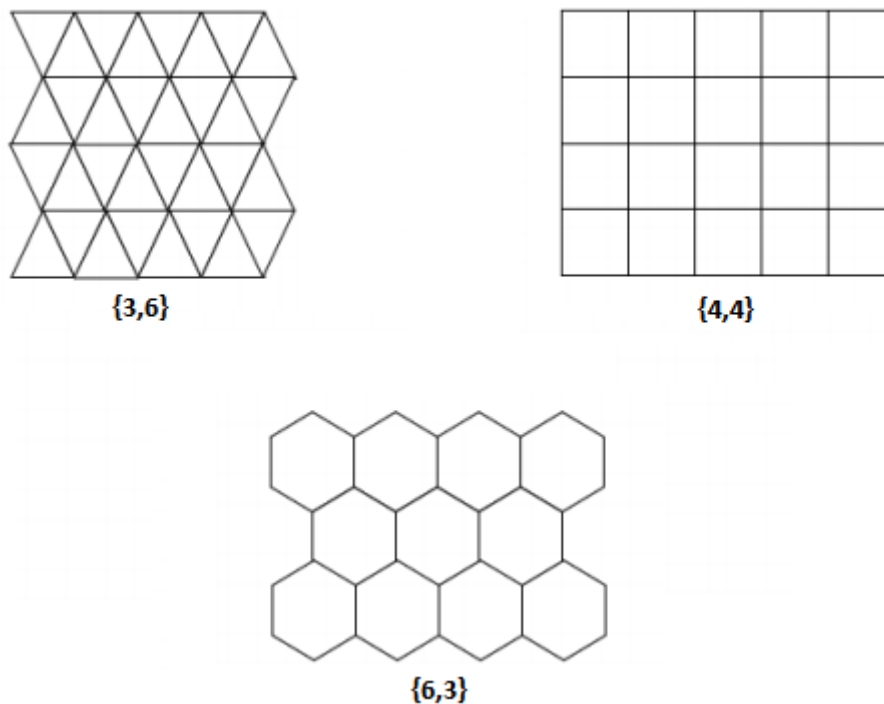


Figura 4: Tesselações regulares do plano euclidiano.

Tesselações no Plano Hiperbólico

As tesselações no plano hiperbólico também podem ser classificadas em *semirregulares*, *irregulares* e *regulares*:

- Semirregulares: Tesselações que utilizam dois ou mais polígonos regulares.
- Irregulares: Quando são usados polígonos irregulares, ou seja, com ângulos alternados.
- Regulares: Aquelas que utilizam apenas um polígono regular para tesselar o plano.

Assim como no plano euclidiano, as tesselações regulares também ganham destaque no plano hiperbólico.

A partir do Teorema de Gauss-Bonnet, sabe-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor que π (WALKDEN, 2012, Cap. 7, p. 2). Assim, a equação que satisfaz uma tesselação regular neste plano é:

$$\frac{2\pi}{p} + \frac{2\pi}{q} < \pi,$$

ou seja,

$$(p - 2)(q - 2) > 4.$$

Desta forma, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2 *Existe uma tesselação no plano hiperbólico com polígonos regulares de n lados, com q polígonos se encontrando em cada vértice, se:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}.$$

A inequação do teorema anterior possui infinitas soluções. Portanto, no plano hiperbólico não há restrições quanto ao número de tesselações regulares, como é o caso do euclidiano, ou seja, existem infinitas tesselações regulares no plano hiperbólico.

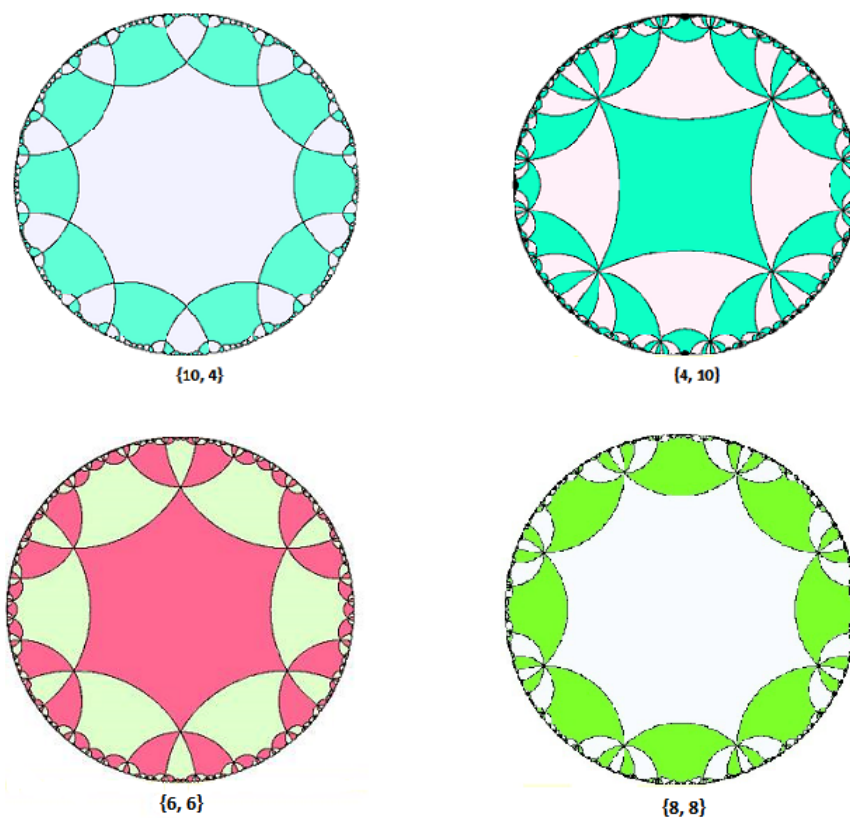


Figura 5: Tesselação regulares hiperbólicas.

Fonte: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/poincare/tilingsAp.html>.

Aplicações

Devido à grande possibilidade de aplicações, as tesselações hiperbólicas têm sido muito estudadas.

Uma de suas aplicações está relacionada à codificação de geodésicas. Os métodos de codificação de geodésicas se classificam em dois tipos principais: geométricos e aritméticos. Os aritméticos são específicos para um determinado grupo fuchsiano (chamado grupo modular), sendo o grupo fuchsiano um subgrupo das isometrias de \mathbb{H} . Além disso, sua natureza é aritmética. Os métodos geométricos, em geral, relacionam uma sequência de símbolos ao número de vezes que uma geodésica corta uma determinada região. O mais conhecido é o método de Morse (PILLA, 2005, p. 40).

Outra aplicação das tesselações hiperbólicas está relacionada à área de transmissão de sinais e às técnicas de processamento digital de sinais. Os resultados de suas aplicações têm se mostrado bastante satisfatórios (PILLA, 2005, p. 44).

Os sistemas de comunicação surgiram da necessidade de se transmitir dados de maneira confiável e rápida. Assim ao se falar em sistemas de comunicação, os principais objetivos a serem alcançados são uma menor probabilidade de erros, ou seja, um melhor desempenho e uma relação sinal-ruído pequena, uma vez que a informação transmitida através de um sistema de comunicação está sempre sujeita à interferências (ruídos) (LESKOW, 2011, p. 2).

Embora hajam várias maneiras de se realizar esse processo, uma que se destaca é o esquema de codificação, utilizando códigos corretores de erros. Os elementos desses códigos são

seqüências de símbolos que pertencem a um alfabeto, associadas a um conjunto de sinais. Assim, a informação é codificada e depois modulada para ser transmitida. Para isso são utilizadas estruturas algébricas e geométricas - colocadas diretamente no conjunto de sinais utilizados (QUEIROZ, 2011, p. 2).

Esses conjuntos podem ser obtidos através de tesselações regulares. Ao se usar tesselações no plano hiperbólico para obter conjunto de sinais, estas tesselações têm se mostrado uma ferramenta eficiente. Além disso, elas possuem um melhor desempenho em relação às tesselações euclidianas, tornando fundamentais em aplicações relacionadas à transmissão de sinais e sistemas de comunicação digital (QUEIROZ, 2011, p. 2).

No estudo de códigos reticulados de dimensão dois, sabe-se que para o reticulado \mathbb{Z}^2 a modulação do tipo QAM tem desempenho melhor que a modulação do tipo PSK, sendo a PSK representada geometricamente por um círculo e a QAM por um quadrado.

Fazendo o pareamento dessas figuras, as superfícies obtidas são uma esfera (para PSK) e um toro (para QAM), que possuem gêneros $g = 0$ e $g = 1$, respectivamente.

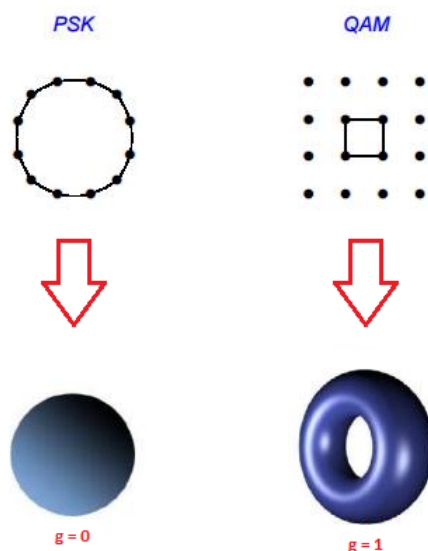


Figura: Pareamento de modulações PSK e QAM, respectivamente.

Assim, pode-se inferir que esses resultados acontecem devido ao invariante topológico gênero da superfície, obtido através do pareamento dos lados da figura ou da região da constelação de sinais (QUEIROZ, 2011, p. 2).

Nesta busca por constelações com melhor desempenho, aquelas com gênero $g \geq 2$, tem ganhado destaque. Tais superfícies podem ser obtidas como quocientes do plano hiperbólico, ou seja, deve-se usar a geometria hiperbólica, mais precisamente as tesselações hiperbólicas. Dessa forma, é essencial darmos uma atenção especial à essa nova geometria e, em particular, à essas tesselações.

Conclusão

Neste artigo foram apresentadas algumas tesselações regulares no plano hiperbólico, mais precisamente no disco de Poincaré. Visto que as tesselações passaram a ser estudadas matematicamente, descobriu-se diversas aplicações para as mesmas.

Ao se estudar tesselações regulares no plano euclidiano, nota-se que há um número finito de tesselações. Essas tesselações precisam satisfazer a equação $(p-2)(q-2) = 4$, onde q é o número de polígonos, e p é o número de lados. Logo, conclui-se que existem apenas três possibilidades de construí-las - com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos.

Em geral, as tesselações utilizadas em várias áreas de aplicação são as tesselações euclidianas. Porém, ao olharmos para a geometria hiperbólica, podemos ver uma geometria tão consistente quanto a própria geometria de Euclides.

No plano hiperbólico, a inequação que deve ser satisfeita é dada por $(p - 2)(q - 2) > 4$. Desta forma, há infinitas possibilidades para a resolução dessa inequação e, conseqüentemente, infinitas tesselações regulares nesse plano.

Assim, devido ao grande número de aplicações e estudos matemáticos acerca deste tema e por serem muito mais amplas do que as tesselações euclidianas, é fundamental dar uma atenção especial para as tesselações hiperbólicas.

Agradecimentos

À Profa. Dra. Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz pela disposição, paciência, carinho e compreensão.

Referências

- ALBUQUERQUE, C. D. *Análise e Construção de Códigos Quânticos Topológicos sobre Variedades Bidimensionais*. Campinas: UNICAMP. 2009. 139p.
- BRAZ, F. M. *História da Geometria Hiperbólica*. Universidade Federal de Minas Gerais. 2009. 34p.
- LEITÃO, M. R. *Tesselações no Ensino de Geometria Euclidiana*. Juazeiro do Norte: Universidade Federal do Ceará. 2015. 58p.
- LESKOW, L. H. A. *Tesselações Hiperbólicas Aplicadas a Codificação de Geodésicas e Códigos de Fonte*. Campinas: UNICAMP. 2011. 132p.
- PILLA, E. C. G. *Construções de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes Hiperbólicas*. Campinas: UNICAMP. 2005. 76p.
- QUEIROZ, C. R. Q. O. *Códigos Geometricamente Uniformes Derivados de Grafos sobre Anéis Quocientes de Inteiros e de Ordens dos Quatérnio*. Campinas: UNICAMP. 2011. 108p.
- WALKDEN, C. *Hyperbolic Geometry*. Manchester, Manchester University, 2012.