ISSN: 2317-0840

# Aplicação da programação convexa na determinação da melhor localização de uma torre de transmissão na cidade de Alfenas - MG

*Bruno César Moreira Tomaz*[1†], *Bruna Pires Rocha*[1], *Flaviane Silva de Souza*[1], *Maria Caruline Baquião*[1], *Natally Rodrigues Silva*[1], *Anderson José de Oliveira*[2]

[1] *Graduando em Matemática Licenciatura, Universidade Federal de Alfenas.*
[2] *Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas.*

**Resumo:** *A maioria dos modelos matemáticos que trata de problemas reais apresenta algum grau de não-linearidade. Deste modo, são necessários estudos acerca de métodos de resolução de tais problemas, muitos destes tratados por um ramo da Matemática Aplicada, chamado de Pesquisa Operacional (P.O). A P.O tem como um de seus objetivos utilizar métodos que visem a solução ótima de problemas de otimização. Um método que pode ser aplicado a este tipo de problema é a programação convexa. O objetivo deste artigo é aplicar o método da programação convexa na resolução de um problema de programação não-linear, cuja finalidade é minimizar a distância de uma torre de transmissão a três bairros da cidade de Alfenas-MG. Para a resolução do problema foi utilizada a ferramenta Solver*[i]*, presente na planilha Excel*[ii]*. Por fim, concluiu-se que o Solver foi eficiente na resolução do problema, permitindo a definição do ponto exato em que a torre de transmissão deve ser colocada, minimizando sua distância aos três bairros desejados.*

**Palavras-chave:** Programação não-linear; solver; modelagem matemática.

**Abstract:** *Most mathematical models dealing with real problems present some degree of non-linearity. Thus, studies on methods of solving such problems are required, many of which are treated by a branch of Applied Mathematics, called Operational Research (O.R). The O.R has as one of its objectives to use methods that aim at the optimal solution of optimization problems. One method that can be applied to this type of problem is convex programming. In this way, the aim of this article is to apply the convex programming method to solve a problem of nonlinear programming, whose purpose is to minimize the distance of a transmission tower to three neighborhoods of the city Alfenas-MG. For solving the calculations, the Solver tool was used, present in the Excel. Finally, it was concluded that the Solver was efficient in solving the problem, allowing the definition of the exact point where the transmission tower should be placed, minimizing its distance to the three desired neighborhoods.*

**Keywords:** Non-linear programming; solver; mathematical modeling.

## Introdução

O termo Pesquisa Operacional, de origem militar, é um ramo interdisciplinar da Matemática Aplicada, caracterizada por um campo de aplicações bastante amplo, o que justifica a existência de várias definições para a expressão Pesquisa Operacional. Um dos seus objetivos é buscar a solução ótima para problemas de otimização.

[†]Autor correspondente: brunowislei@hotmail.com.

[i]Solver: ferramenta do editor de planilhas Excel produzido pela Microsoft para computadores que utilizam o sistema operacional Microsoft Windows.

[ii]Excel: editor de planilhas produzido pela Microsoft para computadores que utilizam o sistema operacional Microsoft Windows.

Em alguns problemas, faz-se necessária a utilização de modelos matemáticos não-lineares, ou seja, usa-se a programação não-linear para encontrar a solução ótima. Sendo assim, de acordo com Cirilo (1997), a programação não-linear nasceu a partir do trabalho pioneiro de Kuhn e Tucker (1951), sendo as décadas de 50 e 60 relevantes para o grande desenvolvimento nessa área. A partir da década de 70, houve um grande avanço na quantidade de pesquisas, devido ao crescimento da capacidade de processamento dos computadores e, posteriormente, pelo desenvolvimento acelerado dos microcomputadores.

Os métodos de programação não-linear podem ser classificados em algoritmos diretos e indiretos (TAHA, 2008). Neste trabalho, será aplicado um método indireto, em que o problema original é substituído por um auxiliar com base no qual a solução ótima é determinada. Sendo assim, o propósito deste artigo é determinar o ponto de instalação de uma torre de transmissão entre os bairros Pinheirinho, Jardim Aeroporto III e Vista Grande, da cidade de Alfenas-MG, de modo que a torre fique no local que melhor atenda aos três bairros. Para isto, será utilizado o método de programação não-linear chamado programação convexa, com o auxílio da ferramenta Solver, disponível no *software* Excel.

# Preliminares

## Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional propõe cinco etapas para a resolução de problemas (MARINS, 2011). São elas:

- formulação do problema: analisar e sistematizar as situações do problema;
- construção do modelo matemático: modelar o problema, técnica que poderá ser utilizada na resolução do problema;
- obtenção da solução: cálculos matemáticos para chegar a uma solução viável do problema, em que devem ser utilizados alguns métodos;
- teste do modelo e da solução obtida: verificar se a solução obtida no item anterior é viável ou não ao problema suposto;
- implementação: preparação da equipe que colocará em prática o que foi estudado.

A Figura 1 apresenta um diagrama das relações entre as etapas envolvidas na resolução de problemas.

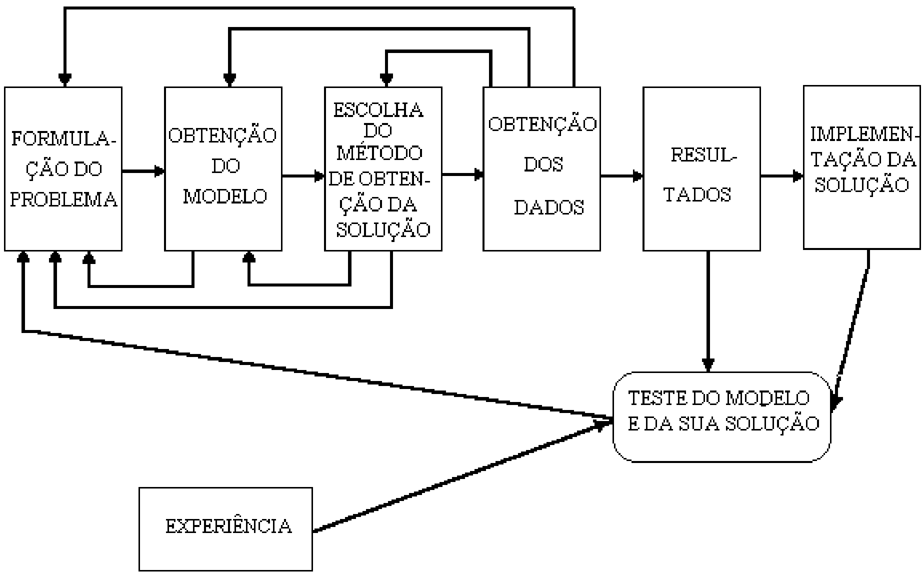



Figura 1: Relação entre as etapas para a resolução de problemas.
Fonte: (MARINS, 2011, p. 16).

A maioria dos modelos que trata de problemas reais, apresenta algum grau de não-linearidade (LACHTERMACHER, 2004). Assim, um Problema de Programação Não-Linear (PPNL) é um problema de otimização em que a função objetivo e/ou pelo menos uma das restrições envolvidas são funções não-lineares.

De forma geral, um PPNL pode ser representado da seguinte forma:

$$\left|\begin{array}{ll} \text{otimizar} & Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ & \\ \text{sujeito a} & \left\{\begin{array}{lll} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) & \sim_1 & b_1 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) & \sim_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) & \sim_m & b_m \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Em que $f$ é uma função não-linear, assim como $g_i$, para pelo menos algum valor de $i$, com $i = 1, 2, .., m$ e, "$\sim$" é qualquer das relações "$=$", "$\leq$", "$\geq$".

A aplicabilidade de um PPNL pode ser encontrada em:

- problemas de transporte, com custos variáveis de transporte que dependem da quantidade enviada;
- problemas de mix de produtos, em que a margem de lucro por produto varia com a quantidade vendida;
- problemas de distâncias, considerando as coordenadas no plano cartesiano.

Em relação à Programação Linear (PL), os PPNL's são mais complexos, pois obrigam os algoritmos de solução a pesquisar todas as soluções viáveis possíveis, em que estas podem estar na fronteira, no extremo ou em algum ponto interno da região viável, enquanto que, na PL, a solução ótima situa-se em um dos extremos do politopo, conjunto limitado obtido pela intersecção de semi-espaços.

Não há um algoritmo único que resolva todos os PPNL's e, somente em alguns casos é possível utilizar *softwares* como ferramenta para a resolução, tendo assim que fazer o uso de alguns métodos numéricos.

Quando se trata de PPNL, o objetivo é analisar se algoritmos eletrônicos, como Solver ou outros, encontrarão a solução ótima do problema.

O trabalho do algoritmo se realiza a partir de uma solução inicial. Em seguida, calcula-se passo a passo valores para as variáveis e verifica-se o comportamento da função objetivo. Se a função objetivo deixa de ser crescente e passa a decrescer (PPNL de maximização) ou deixa de decrescer e passa a crescer (PPNL de minimização), o algoritmo assume que encontrou um ponto ótimo (máximo ou mínimo) da função, que pode ser tanto um extremo local quanto um extremo global.

Entretanto, com esse procedimento, o algoritmo não garante que a solução encontrada seja a global, pois não há garantias de que a função não terá mais pontos de inflexão. Por exemplo, se o Solver for utilizado, é provável que o algoritmo encontre diversas soluções. Diante disso, é necessário saber se o tipo de modelo permite que a solução dada por ele seja assumida como a solução ótima do problema.

Para isso, serão apresentadas duas definições, disponíveis em (BERTSEKAS, NEDIĆ e OZDAGLAR, 2003)

**Definição 1.** Seja $I$ um intervalo não vazio de $\mathbb{R}$. Uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se para todos $x, y \in I$ e todo $\alpha \in [0, 1]$ valer

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \tag{1}$$

Uma maneira simples de verificar se a função é convexa é unir quaisquer dois pontos da função e analisar se o segmento de reta que os une está sempre acima do gráfico da função ou sobre ele, como mostra a Figura 2.

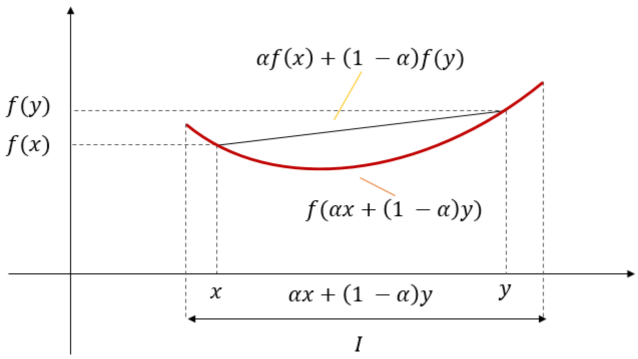



Figura 2: Função convexa.

**Definição 2.** Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se dados $x, y \in B$, então $p = \alpha x + (1 - \alpha)y \in B$ para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Em outras palavras, um conjunto é convexo se todos os pontos que formam o segmento de reta que une quaisquer dois pontos desse conjunto também pertencem a este, como representa a Figura 3.

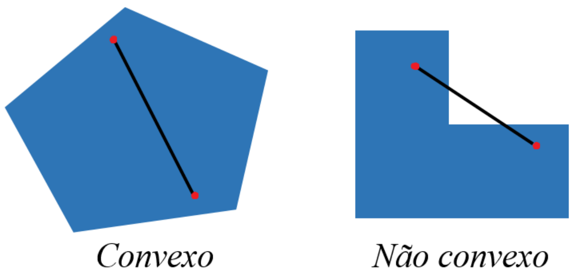



Figura 3: Conjunto convexo e não convexo.

A Definição 1 pode ser estendida para várias variáveis. Para isto, basta que $I \subset \mathbb{R}^n$ seja um conjunto convexo.

Dessa forma, quando o modelo não apresenta restrições, a análise é simples, pois o fato da função objetivo do PPNL ser convexa garante que o mínimo encontrado pelo algoritmo é global.

No caso em que o PPNL possui restrições, é necessário adicionar condições para garantir que a solução encontrada pelo algoritmo seja a solução ótima do problema. De acordo com Taha, Marques e Scarpel (2008), existem três tipos recorrentes de PPNL: a programação côncava, a programação convexa e a programação quadrática. Neste trabalho, será estudada a programação convexa.

## Programação Convexa

Um PPNL é chamado programação convexa se satisfaz as seguintes condições:

(i) é um problema de minimização;

(ii) a função objetivo é uma função convexa;

(iii) se a restrição é do tipo $g_i(x) \leq b_i$, então $g_i(x)$ é uma função convexa;

(iv) se a restrição é do tipo $g_i(x) \geq b_i$, então $g_i(x)$ é uma função côncava;

(v) se a restrição é do tipo $g_i(x) = b_i$, então $g_i(x)$ é uma função linear.

Neste tipo de modelo, o problema será eficientemente resolvido pelo algoritmo aplicado, pois, em problemas de programação convexa o mínimo local é sempre igual ao global.

As condições (iii) e (iv) garantem, que o conjunto de soluções viáveis de um PPNL com restrições (apenas inequações) é um conjunto convexo.

A condição (v) é importante, pois caso exista alguma restrição de igualdade em que a função é não-linear, haverá dificuldades em determinar se o conjunto das soluções viáveis é um conjunto convexo e, então não haverá garantias de que a solução encontrada pelo algoritmo é ou não global.

## Definição do Problema

O gerente de projetos da empresa fictícia B$^2$FMN Telefonia Cel. S. A., precisa localizar uma torre de transmissão para atender a três bairros da cidade de Alfenas - MG, os quais são Pinheirinho, Vista Grande e Jardim Aeroporto III. Devido a problemas técnicos, a torre não pode estar a mais de 8 km do centro de cada bairro. Dessa forma, o gerente deve tomar a decisão do melhor posicionamento para a torre. A Tabela 1 indica as localizações relativas de cada bairro, determinadas a partir de um ponto de origem qualquer estabelecido pelo mapa da cidade de Alfenas, como pode ser visto na Figura 4.

| Localidade | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| Pinheirinho | -8 | 2 |
| Vista Grande | -3 | 9 |
| Jardim Aeroporto III | 1 | -3 |

Tabela 1: Localizações dos três bairros da cidade de Alfenas.

Conforme mostra a Figura 5, essas coordenadas estão ilustradas no plano cartesiano, com o auxílio do programa Geogebra[iii].

[iii]Geogebra: programa de código livre que engloba recursos de geometria, álgebra e cálculo.

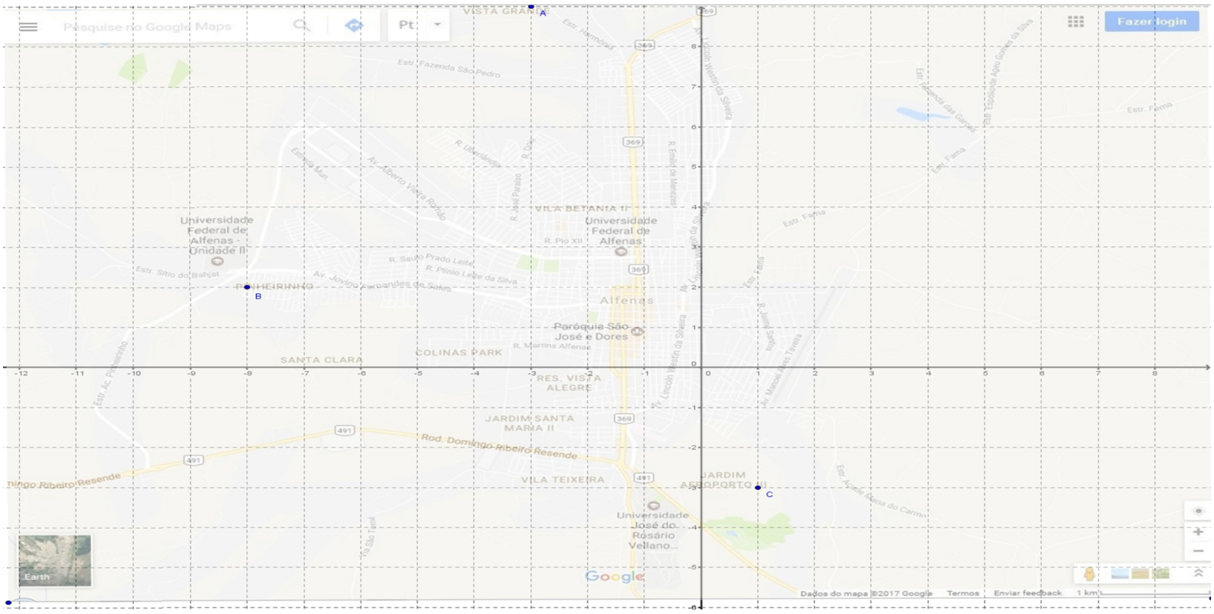



Figura 4: Mapa da cidade de Alfenas.

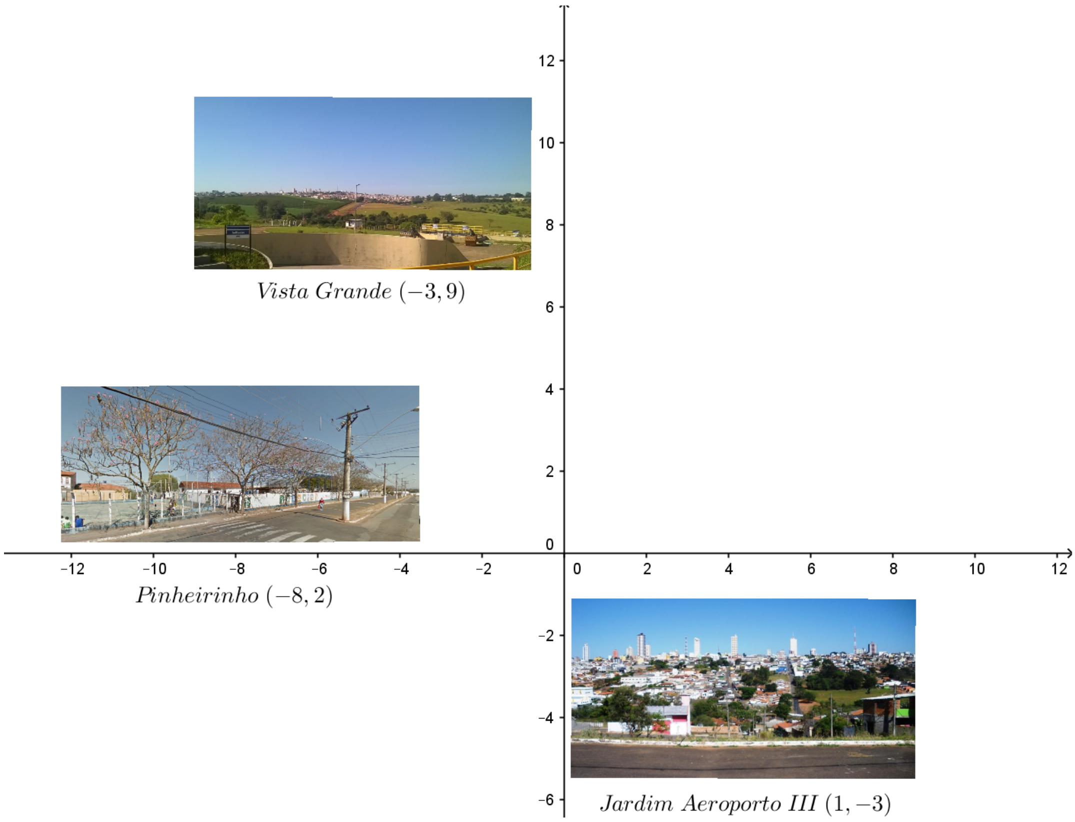



Figura 5: Diagrama esquematizado das localizações dos três bairros de Alfenas.

## Resultados e Discussões

A distância entre a torre e um bairro representada no plano cartesiano é a hipotenusa do triângulo retângulo obtido pelas diferenças entre as coordenadas $x_i$ e $X$ e as coordenadas $y_i$ e $Y$, em que $(x_i, y_i)$ representam as coordenadas dos bairros e $(X, Y)$ representa as coordenadas da torre de transmissão. No caso da localização do bairro Jardim Aeroporto III, a distância está ilustrada na Figura 6.

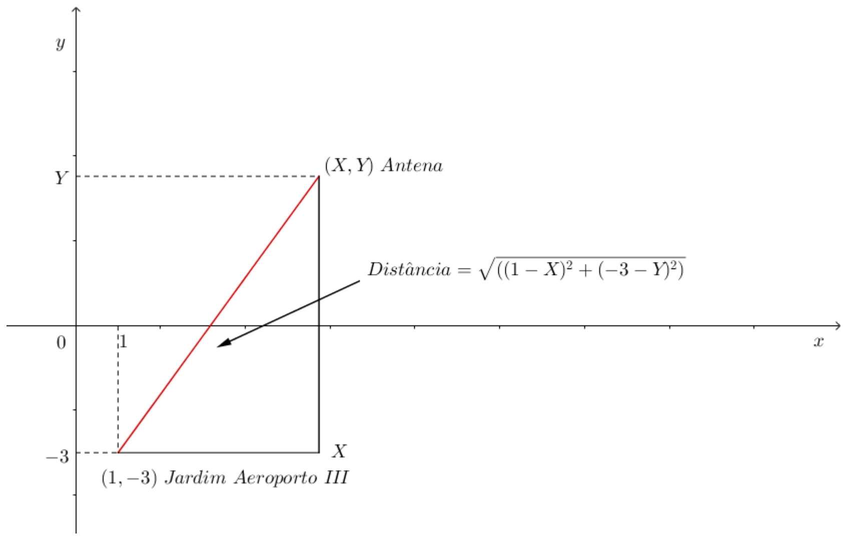



Figura 6: Distância entre dois pontos.

Ressalta-se que a mesma fórmula é válida para qualquer posição da torre, pois sempre haverá condições de formar um triângulo retângulo, e as diferenças das coordenadas é elevada ao quadrado, eliminando assim, os sinais negativos.

Dessa forma, a função objetivo do modelo é a minimização da soma das distâncias entre o centro de cada bairro e a torre de transmissão. Como são três bairros, a função objetivo é dada por:

$$\min D = \sum_{i=1}^{3} D_{i\to T} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2}.$$

Em que $D_{i\to T}$ denota a distância entre o bairro $i$ ($D_i$) e a torre ($T$). As coordenadas do plano cartesiano dos três bairros de Alfenas já foram encontradas, então a função objetivo do problema em questão é:

$$\min D = \sqrt{(-8-X)^2 + (2-Y)^2} + \sqrt{(-3-X)^2 + (9-Y)^2} + \sqrt{(1-X)^2 + (-3-Y)^2}.$$

O problema apresenta uma restrição de distância, pois a torre de transmissão não pode estar localizada a uma distância superior a 8 km do centro de cada bairro. Desse modo, tem-se as seguintes restrições:

$$\sqrt{(-8-X)^2 + (2-Y)^2} \leqslant 8.$$
$$\sqrt{(-3-X)^2 + (9-Y)^2} \leqslant 8.$$
$$\sqrt{(1-X)^2 + (-3-Y)^2} \leqslant 8.$$

O modelo do problema é apresentado a seguir:

$$\text{minimizar } D = \sqrt{(-8-X)^2 + (2-Y)^2} + \sqrt{(-3-X)^2 + (9-Y)^2} + \sqrt{(1-X)^2 + (-3-Y)^2}.$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{cases} \sqrt{(-8-X)^2 + (2-Y)^2} & \leqslant & 8 \\ \sqrt{(-3-X)^2 + (9-Y)^2} & \leqslant & 8 \\ \sqrt{(1-X)^2 + (-3-Y)^2} & \leqslant & 8 \end{cases}$$

Antes de resolver o problema, foi analisado o tipo de programação apresentado pelo modelo. Como é um problema de otimização do tipo minimização, as restrições são todas do tipo "$\leqslant$", e a função objetivo é uma função convexa, como mostra a Figura 7, foi utilizado o método da programação convexa, com o auxílio da ferramenta Solver. Para verificar que a função objetivo é convexa, basta tomar dois pontos quaisquer e mostrar que é válida a desigualdade apresentada na Definição 1.

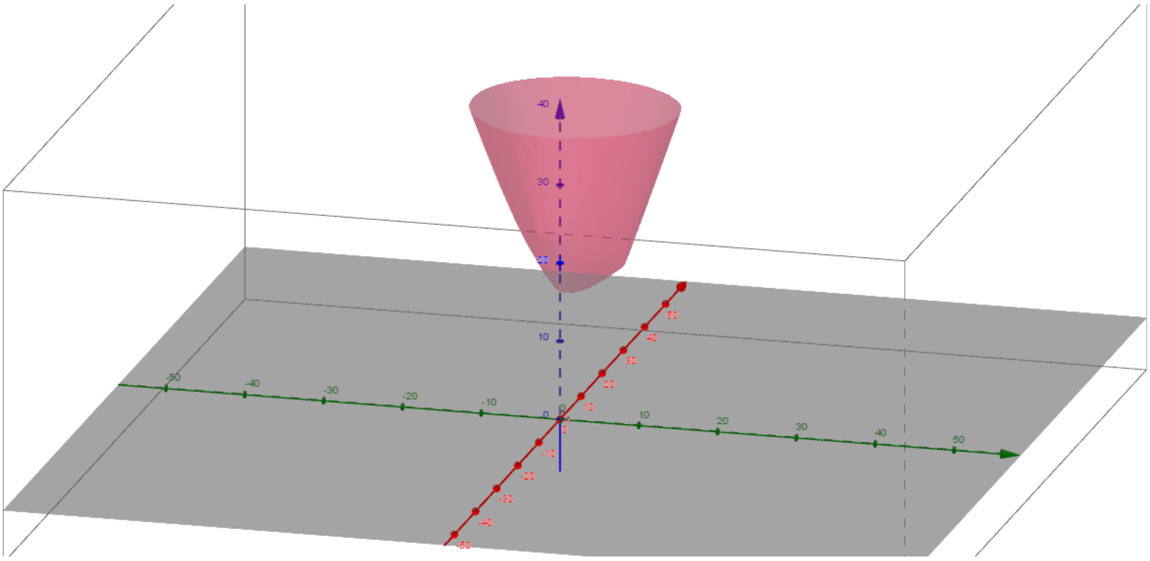
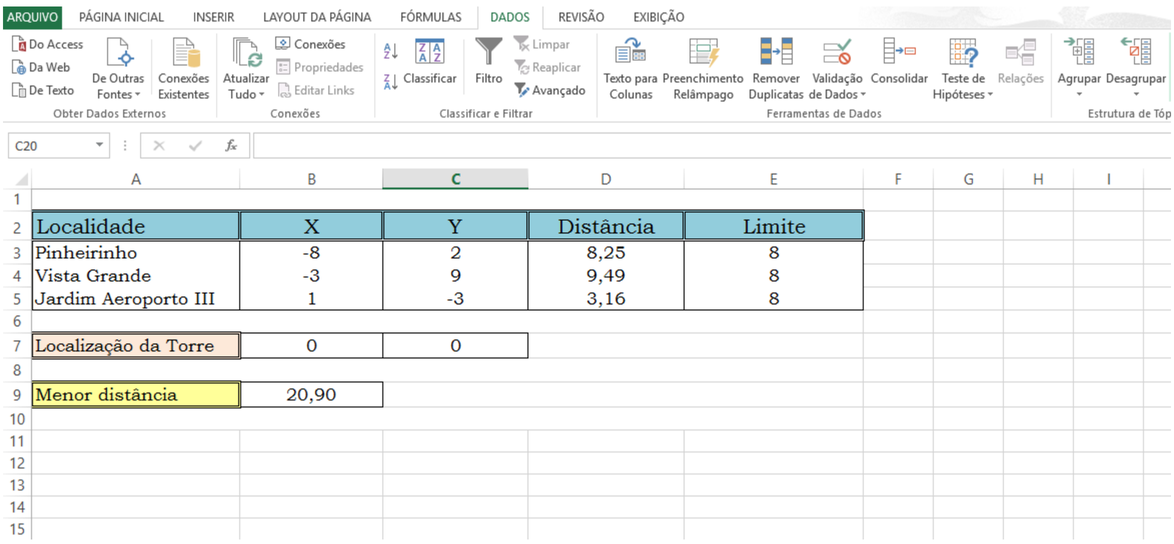


Figura 7: Gráfico 3D da função objetivo gerado pelo programa Geogebra.

A Figura 8 apresenta o modelo do problema inserido na planilha Excel, em que foi utilizada a solução inicial como sendo a localização da torre de transmissão, representada pelas coordenadas $X = 0$ e $Y = 0$.



| Localidade | X | Y | Distância | Limite |
|---|---|---|---|---|
| Pinheirinho | -8 | 2 | 8,25 | 8 |
| Vista Grande | -3 | 9 | 9,49 | 8 |
| Jardim Aeroporto III | 1 | -3 | 3,16 | 8 |
| | | | | |
| Localização da Torre | 0 | 0 | | |
| | | | | |
| Menor distância | 20,90 | | | |

Figura 8: Modelo do problema apresentado na planilha Excel.

Para encontrar a melhor localização da torre de transmissão, foi utilizada a ferramenta Solver, onde foram inseridos os parâmetros e as condições de otimização, como mostra a Figura 9.

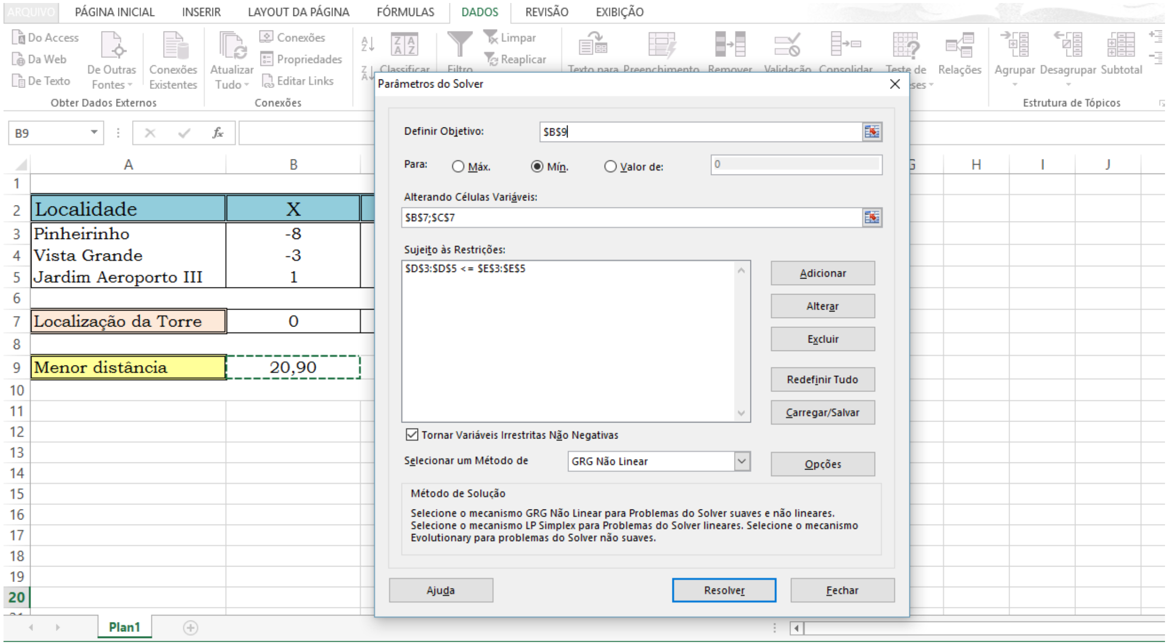
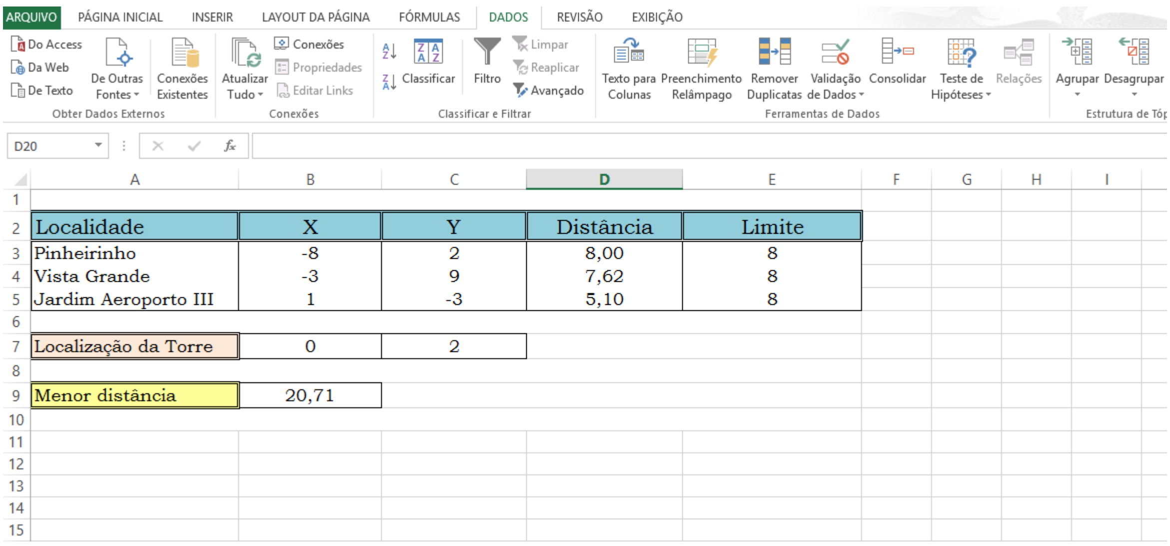



Figura 9: Inserção dos parâmetros e condições de otimização do problema no Solver.

A solução ótima do problema apresentada pelo Solver é a localização para a torre de transmissão dada pelo ponto $X = 0$ e $Y = 2$, conforme Figura 10. Ou seja, a localização no ponto $(0, 2)$ minimiza a distância total entre a torre e os três bairros, que foi de 20,71 unidades de distância. Logo, como utilizamos uma escala em que cada unidade equivale a 0,5 km, a distância total minimizada foi de aproximadamente $10,355$ km.



| Localidade | X | Y | Distância | Limite |
|---|---|---|---|---|
| Pinheirinho | -8 | 2 | 8,00 | 8 |
| Vista Grande | -3 | 9 | 7,62 | 8 |
| Jardim Aeroporto III | 1 | -3 | 5,10 | 8 |
| Localização da Torre | 0 | 2 | | |
| Menor distância | 20,71 | | | |

Figura 10: Resultados obtidos no Solver.

Assim, com o resultado obtido pelo Solver, a localização da torre de transmissão e dos três bairros estão representados no plano cartesiano, como ilustra a Figura 11.

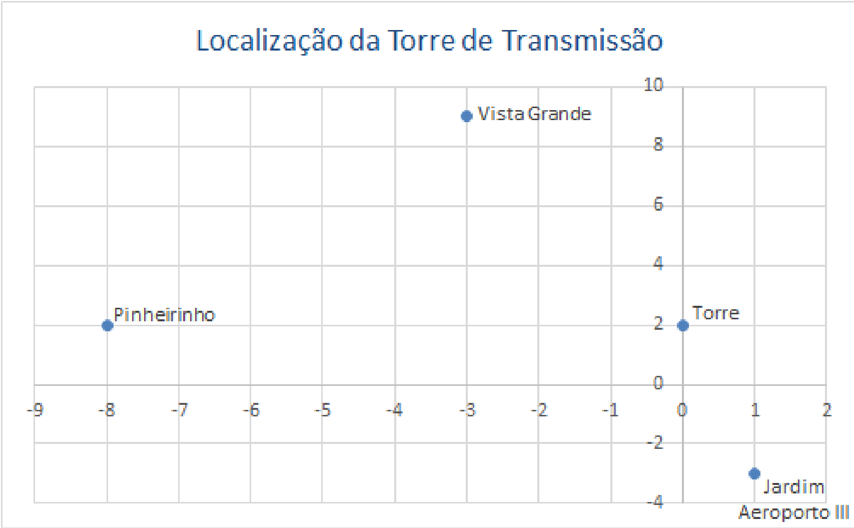



Figura 11: Gráfico com a melhor localização da torre.

## Conclusões

A maioria dos modelos que trata de problemas reais apresenta algum grau de não-linearidade, justificando assim, a importância de se estudar a programação não-linear, dando ênfase ao método da programação convexa, pois o problema em estudo é caracterizado por este tipo de programação. Sendo assim, foi possível encontrar a solução ótima do problema por meio da ferramenta Solver, embora esta não explicite o uso da programação convexa, pois as únicas opções fornecidas são programação simplex, evolutionary e não-linear. Dessa forma, ressalta-se a importância de se estudar a teoria matemática envolvida na modelagem de problemas, mesmo existindo softwares com capacidade de resolução, permitindo assim, uma análise mais refinada da solução apresentada pelo software.

## Referências

BERTSEKAS, D.; NEDIĆ, A.; OZDAGLAR, A. E. *Convex Analysis and Optimization.* Athena Scientific, USA, 2003.

CIRILO, J. A., Programação Não Linear Aplicada a Recursos Hídricos. In: PORTO, R. L.L. et al., *Técnicas Quantitativas para o Gerenciamento de Recursos Hídricos.* ABRH, 1. ed, p. 305-356, Editora da Universidade - UFRGS, 1997.

KUHN, H. W., TUCKER, A. W. Nonlinear Programming. In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistcs and Probability.* Berkeley and Los Angeles? California: Neyman (ed), University of California Press, p. 481-492, 1951.

LACHTERMACHER, G. *Pesquisa operacional na tomada de decisões:* modelagem em Excel. Elsevier, 2004.

MARINS, F. A. S. Introdução à Pesquisa Operacional. *São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista*, 2011.

TAHA, H. A.; MARQUES, A. S.; SCARPEL, R. A. *Pesquisa operacional.* Pearson Education do Brasil, 2008.