ISSN: 2317-0840

A Resolução de Problemas e Sistemas Lineares: um estudo de caso no ensino médio envolvendo um método de escalonamento simplificado

Edna Maura Zuffi

Professora do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da USP de São Carlos

Resumo: *Neste artigo, apresenta-se um estudo de caso para o desenvolvimento do conteúdo de sistemas lineares, através da resolução de problemas, em aulas de Matemática no Ensino Médio. A relevância do caso configurou-se devido aos ganhos de formação da professora e de seus alunos, principalmente no que diz respeito aos aspectos metacognitivos envolvidos no processo. Também se apresenta um método simplificado de escalonamento para a resolução e discussão de sistemas de equações lineares, o qual permite ao professor dar maior ênfase aos processos de aprendizagem, ao invés de focar em técnicas para tais resoluções.*

Palavras-chave: Resolução de problemas; sistemas lineares; método simplificado; metacognição; matemática.

Abstract: In this paper, one presents a case study of Mathematics teaching through problem solving, for the development of the content of linear systems, in High School. The relevance of the case was due to the training gains for the teacher and the development of her students, especially regarding the metacognitive aspects involved in the process. A simplified method, instead of Gauss elimination or other similar ones, for solving and discussing systems of linear equations is also presented, which allows the teacher to put more emphasis on the learning processes, rather than on those techniques.

Keywords: Problem solving; linear systems; simplified method; metacognition; mathematics.

1. Introdução

Em 1750, o suíço Gabriel Cramer (1704-1752) publicou sua teoria, hoje reconhecida no meio escolar brasileiro como "Regra de Cramer"[i], o que fez com que os matemáticos passassem a analisar sob novo ângulo, a resolução de sistemas lineares com iguais números de equações e de incógnitas e a discutir a consistência dos mesmos, relacionando-a ao cálculo de determinantes. (BOYER, 2003, p.297, 321). Com o teorema de Rouché-Capelli (TOLOTTI, 2015), foi possível estender esse estudo para sistemas lineares em que o número de equações se diferenciava do número de incógnitas. Mais tarde, o método de Gauss (1777-1855), ou do escalonamento (POOLE, 2004), buscou o mesmo objetivo e vários outros métodos derivaram-se destes.

É notável se observar que, ainda hoje, muitas escolas brasileiras de Ensino Médio ensinam a resolução de sistemas de equações lineares somente pelo Método de Cramer, o que gera muitas dificuldades para os estudantes, através de uma abordagem de memorização de procedimentos, sem a construção de significados, com o cálculo de determinantes e com a limitação a situações e problemas em que este determinante é não-nulo, ou em que o número de incógnitas é igual ao número de equações, não dando abertura para explorar os casos em que isso não acontece.

Já no final do século XX, com os estudos de doutorado desta autora para a temática do ensino de funções no Ensino Médio (ZUFFI, 1999), constatou-se que esse importante conteúdo – funções - não trazia uma abordagem com a resolução de problemas e nem para o desenvolvimento de uma linguagem matemática mais formal, ainda que a Proposta Curricular no Estado de São Paulo (São Paulo, 1986) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999) recomendassem fortemente essas abordagens para esse nível de ensino. À época, a ênfase dada para esse assunto ainda recaía sobre técnicas de cálculos e pouco cuidado com definições e significados para a linguagem matemática.

A partir dessas experiências, foi proposto, no período de 2000 a 2005, um projeto[ii] em parceria com uma escola pública na cidade de São Carlos, cujo ensino de Matemática foi abordado através da metodologia de Resolução de Problemas (RP), e cujos objetivos gerais eram proporcionar oportunidade de ingresso dos alunos daquela escola nas universidades públicas da região e a formação de professores para essa metodologia, que era ainda desconhecida por eles.

O presente artigo tem, então, o propósito de apresentar um breve relato sobre os resultados desse projeto e um processo alternativo sugerido para resolução de problemas que envolviam sistemas de equações lineares, *o método de triangulação (ou escalonamento) simplificado*, e que fornece, simultaneamente, o estudo da consistência desse sistema e sua resolução.

Acredita-se que, assim como no método de escalonamento de Gauss, esse processo cria um modelo uniforme para o estudo da consistência de qualquer tipo de sistemas com *m* equações lineares e *n* incógnitas, sendo *m* e *n* quaisquer números naturais não-nulos, com a vantagem de que os cálculos nele envolvidos ocupam menor espaço e de que, em geral, usa uma linha de raciocínio mais simples, sem necessidade de memorizações, deixando aos estudantes um tempo maior para analisar questões mais profundas a respeito dos problemas envolvendo esses sistemas.

2. O projeto: resolução de problemas e tarefas intelectualmente exigentes

A metodologia de ensino através da Resolução de Problemas (RP)[iii], aqui proposta, consistiu em apresentar aos estudantes do Ensino Médio, nos momentos anteriores à introdução de um conceito matemático desconhecido por eles, uma situação-problema desafiadora, em que deveriam usar de todos os seus conhecimentos prévios na tentativa de resolvê-la, através de discussões em grupos de três ou quatro alunos. Após um tempo dado para essas discussões, o professor chamava à lousa as propostas que fossem alcançadas até então e que eram relatadas (usando a lousa) pelos grupos correspondentes. Após uma plenária de discussão sobre esses resultados, o professor passava a conduzir uma sistematização do novo conhecimento emergente, que depois seria usado para resolver o problema, caso isso não tivesse sido possível, ou então para elucidar soluções para novas situações.

A seguir, destaca-se a situação-problema que foi passada para uma sala da segunda série do Ensino Médio, na escola participante do projeto, antes de começarem a estudar sobre sistemas de equações lineares:

1) *Uma criança se interessa por comer apenas dois alimentos: sorvete e quindim. A mãe, preocupada, consultou um nutricionista e este lhe forneceu a seguinte tabela ...* (Foram fornecidas quantidades de proteínas e gorduras em cada porção de alimento e necessidades diárias desses nutrientes). *Quantos sorvetes e quantos quindins a criança poderá comer para atingir as necessidades básicas diárias desses nutrientes? Com que quantidades a criança estará ultrapassando essas necessidades? Quando ela estará ingerindo proteínas e gorduras abaixo delas?*

2) *O problema acima é conhecido como "problema da dieta". Considere agora um animal que precisa de proteínas, gorduras, vitaminas e sais minerais equilibrados em sua dieta e que ele coma quatro alimentos: leite, ovos, mamão e alface.* (Forneceu-se outra tabela com as quantidades). *Pergunta-se: Quantas unidades ingerir de cada alimento, para se atingir as necessidades nutricionais diárias? Analise o que significam as respostas encontradas.*

A primeira parte foi colocada inicialmente e os alunos puderam discutir em grupos, por cerca de 20 minutos (alguns um pouco mais). A maior dificuldade enfrentada, nessa etapa, foi com a interpretação dos dados da tabela e a montagem de um sistema de duas equações e duas incógnitas (2x2). Após isso, os alunos relembraram do método de substituição aprendido nas séries anteriores e puderam resolvê-lo. Mas o problema também trouxe o desafio adicional de interpretarem as respostas obtidas. Com o apoio da professora, que ia fazendo perguntas aproximativas durante as discussões nos grupos, a maioria deles foi capaz de solucionar essa parte.

Na sequência, foi-lhes apresentada a parte (2) da situação-problema e, com a experiência da interpretação dos dados da tabela anterior, com poucas pistas da professora, a maioria dos grupos foi capaz de montar rapidamente um sistema linear, agora com quatro equações e quatro incógnitas (4x4). Imediatamente, os alunos tentaram aplicar sua experiência prévia de isolar uma incógnita e substituir nas outras equações, mas isso se mostrou infrutífero. Ficaram por vários minutos tentando resolver por esse método, até que passaram a solicitar da professora a ajuda para descobrirem como resolveriam esse sistema maior.

Isso evidenciou que o desafio proposto foi importante para desencadear a necessidade e a vontade de buscarem novos conhecimentos acerca da resolução de sistemas lineares. A aula terminou com a discussão dos grupos em uma rápida plenária, mostrando que não conseguiram seu intento pelo método conhecido e a professora passou, na aula seguinte, a sistematizar novos conhecimentos sobre o método de escalonamento (ou triangulação) para a resolução de sistemas lineares de ordens quaisquer. Após terem aprendido o método, os alunos voltaram ao problema (2) e encontraram a solução. Porém, esta fornecia um valor negativo para o consumo de um certo alimento. A professora parceira, na escola, havia feito essa resolução anteriormente aos alunos e imediatamente procurou orientação para que os valores da tabela fossem alterados pela coordenação do projeto, a fim de que isso não ocorresse. Porém, foi-lhe explicado que havia um propósito pedagógico na obtenção desse resultado negativo, que era desafiar os alunos para interpretarem os resultados obtidos fora de um padrão esperado (o consumo de cada alimento era esperado em quantidades maiores ou iguais a zero, como geralmente acontecia nos problemas usuais das aulas de Matemática). Isto posto, a professora manteve os dados e os alunos foram chamados à plenária para interpretarem o que seria uma boa solução para esse problema, já que não era possível ingerir uma quantidade negativa de alimentos.

2.1. Tarefas intelectualmente exigentes e metacognição

Esta forma de abordar os problemas busca adequar-se ao que González (1998) chama de *tarefas intelectualmente exigentes* (TIE). Segundo este autor, estas são tarefas que propiciam um esforço racional e que não são realizadas com mero exercício de memória, nem usando esquemas algorítmicos mecânicos, nem com a aplicação de receitas pré-concebidas; pelo contrário, devem encorajar o cumprimento de determinado esforço intelectual. Sua solução implica em compreender os dados num problema, estabelecer relações, tomar decisões para resolvê-los, ser capaz de utilizar técnicas conhecidas e saber comunicar os resultados.

González (1998) considera que as habilidades cognitivas dos alunos se distinguem em dois níveis: um de ordem inferior, envolvendo processos associados à codificação, armazenamento, recuperação e processamento da informação, e os processos mentais de ordem superior (metacognitivos e auto-reguladores), utilizados para planejar, permitir ou ativar, monitorar, avaliar e modificar os processos de nível inferior. Estes podem apoiar os estudos do desempenho humano em tarefas complexas.

A prática repetida de TIE, segundo este autor, oferece maiores oportunidades para o exercício desses processos e isto será uma experiência generalizável e transferível, quando se realizar uma série de tarefas desse tipo e com a conscientização do que foi feito.

Isto favorece, então, a *metacognição*, a qual é estabelecida quando o executor toma consciência dos seus objetivos, reconhece se há mais de uma maneira de resolver tais tarefas, ou se não tem nenhuma, ou se a maneira como sabe não é aplicável, ou se foi considerada inadequada, ou ainda, quando identifica aspectos da estratégia que favorecem ou bloqueiam a solução, estabelece condições para sua aplicabilidade, cria bases para a generalização e/ou transferência para outra situação.

Concordando com Gonzalez (1998), acredita-se que o desempenho em Matemática está associado à ativação de processos intelectuais de ordem superior, exigidos por tarefas desta disciplina (especialmente a resolução de problemas não usuais aos alunos), e a conscientização de tais processos. Foi com esse intuito que se propuseram as atividades anteriormente citadas.

Deve-se destacar que os estudantes que participaram desta etapa já se encontravam no segundo ano do referido projeto (ZUFFI, BARREIRO e MASCARENHAS, 2003) e haviam realizado várias experiências anteriores com a RP, no sentido aqui apresentado (ZUFFI e ONUCHIC, 2007). Apesar das dificuldades com que se defrontaram ao iniciar a resolução das tarefas citadas, acredita-se que as práticas reiteradas com esse tipo de atividade tenham lhes proporcionado confiança para seguir com as tentativas e maior conscientização pela busca de conhecimentos prévios relaionados a esses problemas, estimulando-os em seus processos reguladores e metacognitivos. Isto foi constatado pela filmagem e análise de algumas falas e intervenções dos estudantes durante esses processos (REIS e ZUFFI, 2007).

3. O método de escalonamento simplificado

Nesta seção, abre-se um parêntesis para discutir a proposta de um método de resolução de sistemas lineares que se baseia no *escalonamento* (ou *triangulação*) proposto por Gauss, mas que foi simplificado a partir de uma experiência da prática pedagógica de um professor de Matemática do Ensino Médio, e que foi empregado por esse docente por cerca de vinte anos de sua carreira, e com o qual a autora deste trabalho teve a oportunidade de estudar e aprender[iv].

Definição 1. Diz-se que duas matrizes *M* e *M´* são ***equivalentes por linha*** se a matriz *M´* for obtida de *M* por intermédio de uma série finita de transformações chamadas operações elementares sobre linhas. São elas:

O1 – Troca de posição de duas linhas entre si.
O2 – Multiplicação de uma linha por um número real **não nulo**.
O3 – Soma de uma linha a outra, previamente multiplicada por um número real.

Definição 2. Diz-se que uma matriz *B* está na forma escalonada (denota-se por "*Be*"), se o número de zeros à esquerda do primeiro elemento não nulo de cada linha aumenta, de uma linha para a seguinte, até que apareça, eventualmente, apenas linhas nulas.

As matrizes abaixo estão na forma escalonada:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dado um sistema linear com *m* equações e *n* incógnitas x_1, x_2, ..., x_n, do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$, com a_{ij}, b_i números reais, para $i=1, ..., m$ e $j=1,...,n$,

ele pode ser representado pela equação matricial: $AX=B$, onde:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ é a matriz de coeficientes;

$$X_{n\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ é a matriz de incógnitas e $$B_{m\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ é a matriz dos termos independentes.

O objetivo, aqui, será aplicar a triangulação simplificada, que consiste em escalonar simultaneamente as matrizes *A* e *B*. Para isto, deve-se seguir os seguintes passos:

(i) A **matriz de coeficientes, aumentada com a matriz dos termos independentes (*Ab*)**, ocupará um andar superior e deverá estar *ordenada por zeros* à esquerda (obtendo-se *Aob*), usando-se a operação elementar O1. Esta é a que será escalonada (A e B simultaneamente, já ordenadas por zeros à esquerda). De preferência, colocar-se-ão os elementos da primeira coluna em ordem crescente.
(ii) Usando as operações elementares O2 e O3, encontram-se as matrizes dos andares inferiores, num processo de triangulação da matriz *Aob*, através de **multiplicações cruzadas e subtrações**.
(iii) Ao primeiro elemento não nulo, da primeira linha de cada andar, a contar da esquerda para a direita, dá-se o nome de *pivô* e este será colocado entre colchetes. **O pivô nunca será nulo.**
(iv) Abaixo do pivô, ou à sua esquerda, nos andares inferiores, aparecem somente zeros.
(v) Cada andar tem sempre uma linha a menos que o andar imediatamente superior.
(vi) O processo de escalonamento termina quando, em um dos andares, aparece apenas uma linha de elementos, nulos ou não, ou quando todos os elementos de um andar forem nulos.
(vii) Em todos os andares, as matrizes devem estar ordenadas por zeros à esquerda, para que o peão nunca seja nulo.
(viii) A primeira linha de cada andar irá compor a matriz *aumentada escalonada* (*Aeb*), obtida a partir da matriz *A* aumentada da coluna de termos independentes, completando-a com as linhas nulas do último andar, se for o caso.

Todos esses procedimentos se justificam pelo fato de que um sistema linear não tem suas soluções alteradas mediante as operações O1, O2 e O3, assim como no método de escalonamento ou eliminação de Gauss (POOLE, 2004, p.67-70).

A seguir, serão apresentados alguns exemplos para ilustrar o método simplificado.

Exemplo 1: resolver o sistema: $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+y+2z=3 \\ 3x+3y+z=1 \end{cases}$

Matriz *A=Ao*					Matriz *B*	
	[1]	2	−1	5		
	2	1	2	3		
	3	3	1	1		
	0	[−3]	4	−7		[1].1-2.2=-3; [1].2-2.(-1)=4; [1].3-2.5= -7
	0	−3	4	−14		[1].3-3.2= -3; [1].1-3.(-1)=4; [1].1-3.5= -14
	0	0	0	21		[-3].4-(-3).4=0; [-3].(-14)-(-3).(-7)=21

Observação: Nestas transformações foi usado o processo de **multiplicações cruzadas com subtrações**. Por exemplo, a linha 4 é obtida por zerar a coluna abaixo do pivô ($a_{11}a_{21}-a_{21}a_{11}=0$) e depois multiplicar em cruz, subtraindo-se na diagonal secundária: $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=-3$; $a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}=4$; $a_{11}a_{24}-a_{21}a_{14}=-7$. Em termos das operações elementares, isso significa que se multiplica a segunda linha pelo pivô da primeira (a_{11}) e a primeira linha pelo oposto do primeiro elemento da seguinte ($-a_{21}$) e somam-se os resultados. Como o pivô a_{11} não é nulo, isso fica bem posto. O mesmo raciocínio se aplica para a obtenção das linhas abaixo desta.

Assim, obtem-se a matriz *Aeb*, conforme o item (viii): $\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{array}\right.$

Vê-se que o sistema é inconsistente (ou incompatível), pois a última linha resulta na equação $0x+0y+0z=21$. Voltando a Rouché-Capelli, pode-se visualizar com clareza em *Ae*, que a característica *p* da matriz dos coeficientes é 2 e a característica q da matriz completa (aumentada) é 3 e, como $p \neq q$, o sistema é inconsistente.

Exemplo 2: resolver o sistema: $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+y+z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} [1] & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & [3] & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}$$

[1].1-1.(-2)=3; [1].1-1.0=1; [1].1-1.(-1)=2

[1].(-1)-2.(-2)=3; [1].1-2.0=1; [1].0-2.(-1)=2

[1].2-1.(-2)=4; [1].2-1.0=2; [1].1-1.(-1)=2

[3].1-3.(1)=0; [3].2-3.2=0

[3].2-4.(1)=2; [3].2-4.2=-2

$$Aeb = \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\boxed{p=q=n=3}$

Reordenando as duas últimas equações, já se tem a matriz escalonada *Aeb* aumentada, sendo a última linha somente formada por zeros e, portanto, desprezível. Assim, da última linha significativa, vem: $2z = -2 \Rightarrow z = -1$. Pode-se escolher substituir este valor na 7ª linha que representa o sistema no segundo bloco, de onde vem: $4y + 2z = 2 \Rightarrow 4y - 2 = 2 \Rightarrow y = 1$. (Poder-se-ia usar, mais facilmente, a matriz completa escalonada *Aeb*, na segunda linha, obtendo-se o mesmo valor. Isto foi feito para mostrar que as equações são equivalentes). E tomando a equação da 1ª linha do primeiro bloco, tem-se: $x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1$. Assim, a solução do sistema será a tripla ordenada (1, 1, -1).

Exemplo 3: resolver: $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+3y-2z=4 \\ 4x+5y=10 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} [1] & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 10 \\ \hline 0 & [-1] & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 12 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

← [1].1-1.2=-1; [1].1-1.(-3)=4; [1].3-1.1=2

← [1].3-2.2=-1; [1].(-2)-2.(-3)=4; [1].4-2.1=2

← [1].5-4.(-2)=-3; [1].0-4.(-3)=12; [1].10-4.1=6

← [-1].4-(-1).4(1)=0; [-1].2-(-1).2=0

← [-1].12-(-3).0=2; [-1].6- (-3).2=0

$$Aeb = \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Vê-se, em *Ae*, que *p=q=2* e *n=3* e, portanto, tem-se um sistema consistente e indeterminado, com *n-p=1* variável livre. Resolvendo-o, tem-se o conjunto solução $S = \{(5-5z, 4z-2, z) / \ z \ \text{é}\ real\}$.
Observação: através dos exemplos anteriores, nota-se que a característica de uma matriz *A* se obtém diretamente em seu escalonamento e é dada pelo número de linhas **não-nulas** de *Ae*. Sendo *p* a característica da matriz *A* dos coeficientes do sistema e q a característica da respectiva matriz aumentada com os termos independentes (*Ab*), tem-se: (i) se *p=q=n*, o sistema será consistente e determinado; (ii) se *p=q < n* (*n* = número de incógnitas), o sistema será consistente e indeterminado, com grau de liberdade *n-p*; (iii) se *p≠q*, (aparecendo uma linha que represente uma equação inconsistente), o sistema será também inconsistente.

Exemplo 4: Discutir o sistema, em função de a e b: $\begin{cases} 2x + y = b \\ 4x - ay = 12 \end{cases}$

$$\begin{array}{cc|c} [2] & 1 & b \\ 4 & -a & 12 \\ \hline 0 & -2a-4 & 24-4b \end{array}$$

[2].(-a)-4.1=-2a-4; [2].12-4.b=24-4b

Analisando as expressões, tem-se:

- Se $-2a - 4 \neq 0$, ou seja, se $a \neq -2$, o sistema será consistente e determinado, para qualquer valor de *b*.
- Se $a = -2$ e se $b = 6$, o sistema será consistente e indeterminado e, neste caso, pode-se exibir seu conjunto solução. No entanto, se $b \neq 6$, o termo independente não se anula e o sistema será inconsistente.

Convida-se o leitor a aplicar o método de triangulação simplificado para sistemas com maior número de equações e incógnitas, como os abaixo, a fim de verificar sua maior eficiência que o método de escalonamento tradicional. Estes casos não foram aqui detalhados, pela restrição de espaço deste texto:

$$\text{I: } \begin{cases} x + 2y + 3z - t = 1 \\ 2x - y + 2z + 2t = 5 \\ x + 3y + z - 3t = -2 \\ x + y + 4z + 2t = 8 \\ y + 3z + t = 1 \end{cases}; \ \text{II: } \begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ 2x + y - 4z + 2t = 0 \\ 2x + 3y - t = -1 \\ 4y + 5z - 2t = 4 \\ 3y + 3z + t = 9 \\ 2z - 3t = -5 \end{cases}; \ III: \begin{cases} x + 2y + z + t = 3 \\ 3x - y + 2z - t = 6 \\ 2x - y + z - 2t = 3 \\ x - 3y - 3t = 0 \\ 2x + 4y + 2z + 2t = 6 \\ -5y - z - 4t = -3 \end{cases}$$

Soluções: I) S. Inconsistente; II) S={(1,0,2,3)}; III) S={(3t,0,-4t+3,t)/ t é real}

4. Alguns resultados do estudo de caso

A segunda parte dos problemas envolvendo sistemas lineares, aqui apresentados, mostrou-se uma novidade para os alunos, pois a interpretação gráfica de sistemas com duas equações e duas incógnitas (2x2) e também a necessidade de resolução de sistemas 4x4 foram tentadas por eles com grande dificuldade. Entretanto, a busca por modelos prévios que lhes permitissem prosseguir na atividade, apesar de ter-lhes gerado frustração por não ser suficiente para chegar à solução do problema, foi importante na regulação da própria aprendizagem e para o desenvolvimento da metacognição.

Notou-se que os grupos trabalhavam em tempos distintos de resolução, mas houve o engajamento e interesse de todos. Como essa experiência com tarefas intelectualmente exigentes não era desconhecida dos estudantes, os quais já haviam trabalhado com algo similar no ano anterior, houve menor número de problemas com a aceitação do desafio de pensar criticamente (a desistência e a falta de interesse mostrou-se mais frequente em alunos que estavam iniciando suas experiências com TIE).

No final do ano letivo, foi aplicado um questionário aos estudantes que participaram do projeto nessa sala e vinte (20), dentre trinta (30) participantes totais, responderam ter tido alto grau de satisfação com a atividade.

Um outro resultado marcante neste estudo de caso de aplicação da RP refere-se ao desenvolvimento profissional da professora colaboradora da escola parceira. Observando suas práticas no início do projeto e depois, contatou-se que ela estabeleceu um novo *contrato didático* (BROUSSEAU, 1988) em suas salas de aula. De início, ela se mostrava ansiosa para fornecer as respostas rapidamente aos alunos, mas depois passou a lhes dar tempo para se dedicarem sozinhos à resolução e a não fornecer respostas, mas ir aproximando-os da solução com perguntas intermediárias, compreendendo que isto fazia parte de um processo de desenvolvimento de raciocínio crítico e autônomo pelos estudantes. Também passou a perceber que o momento de chamada para a socialização dos processos enfrentados pelos grupos, na resolução de um problema, era muito importante, mesmo que nem todos tivessem alcançado o mesmo nível de compreensão para ele, pois compartilhar as ideias diferentes suscitadas, conflitos e dificuldades era uma forma de construir e solidificar mais significados junto aos alunos.

Salienta-se que um acompanhamento relativamente longo dos professores parceiros, com discussões e trocas de experiências, por cerca de três anos, é que talvez tenha garantido o êxito deste projeto, pois nem sempre uma formação ligeira a respeito da RP assegura uma mudança real em seus métodos de ensino. Desta forma, constatou-se reais alterações nas atitudes didáticas dos professores e em seu *conhecimento pedagógico do conteúdo* (SHULMAN, 1987). Depoimentos da professora que participou por mais tempo deste projeto revelam que ela também admitiu ter tido uma ampliação de seu *conhecimento do conteúdo da disciplina* (SHULMAN, 1987), isto é, ela percebeu que o uso da RP a fez conhecer mais profundamente os conceitos, resultados e propriedades da Matemática envolvida nas atividades propostas aos alunos, além de fazê-la repensar sobre as formas de ensinar tais conteúdos.

Quanto ao desenvolvimento dos alunos, a grande maioria apresentava dificuldades iniciais ao tentar resolver os problemas propostos, mas ao mesmo tempo, passou a ter grande envolvimento com sua própria aprendizagem. Em gral, ampliaram seus conhecimentos de Matemática com maior compreensão, o que foi atestado em depoimentos da professora, pais e avaliações comparativas durante o projeto (ZUFFI, BARREIRO e MASCARENHAS, 2003). Com as observações e filmagens realizadas nas aulas que envolviam a RP, constatou-se que foram capazes de levantar discussões de alto nível de sofisticação.

5. Conclusões

O método simplificado de triangulação de sistemas lineares foi aplicado em escolas do Ensino Médio, pelo seu idealizador, por pelo menos vinte anos. No tocante à resolução e estudos de sistemas lineares, ele se revelou objetivo e direto, permitindo uma linha uniforme e sistemática de conduta, que facilita a assimilação por parte dos alunos. Ele permite uma visão geral dos sistemas equivalentes que surgem naturalmente nos “andares inferiores” do escalonamento, sem a necessidade de repetição das linhas já escalonadas, o que propicia menor incidência de erros. Além disso, mostra-se vantajoso em relação aos demais pela redução do número de cálculos e passos na escrita, que se acentua à medida em que os sistemas se tornam mais sofisticados, isto é, com maior número de equações e/ou incógnitas. A simplificação aqui apresentada também se mostrou muito efetiva para a discussão de sistemas lineares com termos literais, agilizando, assim, os processos de cálculos em todas as ocasiões.

Espera-se, com este artigo, que outros professores possam usufruir dessa abordagem pedagógica no estudo de sistemas de equações lineares, tanto no que diz respeito à metodologia de ensino deste conteúdo através da resolução de problemas, quanto com a utilização do método de triangulação simplificado, propiciando maior rapidez aos seus alunos, ganhando tempo para estimulá-los a refletir mais sobre problemas que envolvam tais sistemas, num enfoque mais aprofundado e significativo desse tópico.

Agradecimento

Registro que o referido método simplificado foi proposto por meu professor do Ensino Médio, *Lúcio de Oliveira Falleiros*, aposentado da Rede Oficial de Ensino de São Joaquim da Barra, SP, hoje aos 93 anos, a quem deixo minhas homenagens, com imensa admiração e respeito, por todo o seu amor e dedicação ao ensino de Matemática. Agradeço também à FAPESP, pelo financiamento parcial do estudo de caso realizado em 2005.

Referências Bibliográficas

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad. Elza Gomide. 2ª.ed. São Paulo: Edgar Blucher, 2003.

BROUSSEAU, G. Le Contrat Didactique: le milieu. *Rechèrches en Didactique des Mathématiques*, vol.9, n.3, 1988.

GONZÁLEZ, F.E. Metacognición y tareas intelectualmente exigentes: el caso de la resolución de problemas matemáticos. *Zetetiké*, CEMPEM-FE/UNICAMP, v.6, n.9, p. 59-87, 1998.

POOLE, D. *Álgebra Linear*. Trad. Martha Salerno Monteiro (coord.). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

REIS, M.M.V.; ZUFFI, E.M. Estudo de um Caso de Implantação da Metodologia de Resolução de Problemas no Ensino Médio. *BOLEMA*, Rio Claro (SP), Ano 20. no. 28, p.113-137, 2007.

SHULMAN. L. S. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review***,** [S.l.], v. 57, p. 1-22, 1987.

TOLOTTI, M. *Ranks of matrices and the Rouché-Capelli Theorem*. Disponível em http://venus.unive.it/~tolotti/RoucheCapelli_GSEM.pdf . Acessado em outubro de 2015.

ZUFFI, E.M.; BARREIRO, A.C.M. e MASCARENHAS, Y.P. Desenvolvimento e avaliação de uma pedagogia universitária participativa no Ensino Médio: atividades com ênfase em matemática, ciências e comunicação. *Anais do XI CIAEM* (CD-ROM), Blumenau, SC, 13-17/julho/2003.

ZUFFI, E.M., *O tema 'funções' e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio:* por uma aprendizagem de significados. 307p. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 1999.

ZUFFI, E.M.; ONUCHIC, L. L. R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, FISEM, v. 11, p. 79-97, 2007.

ZUFFI, E.M.; JACOMELLI, C.V. O uso de aspectos sócio-culturais para a motivação da aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental. Anais do *X Encontro Nacional de Educação Matemática* **-** Educação Matemática, Cultura e Diversidade, Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010, Comunicação Científica T16_CC1374, (CD-R) 11p.

---

[i] Essa regra provavelmente era conhecida por MacLaurin, que a teria publicado dois anos antes de Cramer (Boyer, 2003, p. 297.

[ii] FAPESP - *Melhoria do Ensino Público* – coordenação geral pela Profa. Dra. Yvonne P. Mascarenhas (IFSC/ICMC/USP). Coordenação da área de Matemática com colaboração desta autora.

[iii] Outra experiência com a RP para o Ensino Fundamental pode ser encontrada em Zuffi e Jacomelli (2010).

[iv] Vide nota de agradecimento.