

Aplicação da Teoria de Filas Markovianas no Controle de Fluxo de Usuários

Ednário B. Mendonça^{1†}, Divanilda M. Esteves²

¹Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, Brasil.

²Departamento de Estatística, Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, Brasil.

Resumo: Um sistema de filas pode ser definido como um sistema onde “usuários” chegam a um posto de atendimento, buscando algum serviço. Tanto o tempo entre chegadas, quanto o tempo para realizar o serviço são variáveis aleatórias. Tal caráter aleatório torna impossível saber como estará exatamente o sistema em um dado instante de tempo. Claramente, vários aspectos vão influenciar no funcionamento de um sistema de filas, como por exemplo o número de postos de atendimento e se o cliente que chega ao sistema deve retornar depois ou se pode esperar. Esses são aspectos básicos das filas, mas essas estruturas podem ser mais complexas, considerando outras situações como sistemas com uma capacidade finita de espera ou com clientes que desistem do serviço quando demoram a ser atendidos. Um dos objetivos do estudo das filas é estimar os parâmetros envolvidos no modelo e calcular algumas medidas de seu desempenho, como por exemplo, tempo médio que o usuário fica na fila e tamanho médio da fila, considerando as particularidades de cada caso. Uma vez que se conhece tais medidas, é possível buscar sistemas que atendam eficientemente às necessidades de quem procura o serviço sem que o sistema fique ocioso por muito tempo. Neste estudo, aplicou-se a teoria das filas markovianas ao fluxo de pessoas em uma casa lotérica da cidade de Cubati-PB, com o objetivo de comparar as medidas de desempenho em dias que há pagamento do benefício Bolsa Família com os dias normais, ou seja, em que não há pagamento do benefício.

Palavras-chave: Filas markovianas; medidas de desempenho; casa lotérica.

Abstract: A queuing system can be defined as a system where “users” reach a Consultation Service, seeking some service. Both the interarrival time, as the time to perform the service are random variables. Such randomness makes it impossible to know exactly how will the system at a given time. a goal of the study is to estimate the rows of parameters involved in the model and calculate some measures of performance, such as average time that the user is in the queue and mean queue length, considering the particularities of each case. once you know these measures, it is possible to search efficiently systems that meet the needs of those looking for the service until the system is idle for long. present study, we applied the theory of Markov queues to flow of people in a town house lottery Cubati -PB, with the aim of comparing the performance measures on days that there is benefit payment Bolsa Família with normal days, that is, where there is no payment of money.

Keywords: Random variables; measures of performance; queuing system.

Introdução

As filas de espera por serviços fazem parte do dia-a-dia das pessoas na sociedade e, como não podem ser evitadas, tendem a ser toleradas, apesar dos atrasos e das inconveniências que causam. Entretanto, os processos geradores de filas podem ser estudados e dimensionados de forma a aliviar os prejuízos em tempo e produtividade, assim como as perdas financeiras que elas acarretam. Entre essas medidas, podem-se citar: número médio de elementos na fila, tempo de espera pelo atendimento e tempo ocioso dos prestadores de serviço.

[†]Autor correspondente: eddybarbosa92@gmail.com.

Segundo Fogliatti e Mattos (2007), a Teoria de Filas consiste na modelagem analítica de processos ou sistemas que resultam em espera e tem como objetivo determinar e avaliar quantidades, denominadas medidas de desempenho, que expressam a produtividade e/ou operacionalidade desses processos. O estudo dessas quantidades é importante na tomada de decisão quanto à modificação ou manutenção da operação do sistema no seu estado atual, facilita também o dimensionamento racional da infraestrutura, de recursos humanos e financeiros, de equipamentos e instalações, visando um melhor desempenho no geral. Dessa forma, os conceitos e a teoria básica de Filas são fundamentais para a gerência e a administração de sistemas produtivos.

Fundamentação Teórica

Segundo Hillier e Lieberman (1974), a Teoria de Filas estuda a espera em diversas formas de filas. Tal teoria busca definir maneiras de lidar mais eficientemente com sistemas de filas. Esta definição é possível a partir da determinação da maneira como o sistema de filas funcionará e o tempo médio de espera nas mesmas a partir da utilização de modelos de filas para diversas situações reais. Fogliatti e Mattos (2007) definem um Sistema com Fila como qualquer processo onde usuários oriundos de uma determinada população chegam para receber um serviço pelo qual esperam, se for necessário, saindo do sistema assim que o serviço é completado. Essa espera acontece quando a demanda é maior do que a capacidade de atendimento oferecida, em termos de fluxo.

Um sistema com fila é composto por usuários, por canais ou postos de serviço/atendimento e por um espaço designado para a espera. Os usuários chegam segundo um determinado comportamento que caracteriza o **processo de chegadas**, para serem atendidos em **canais ou postos de serviço** (que funcionam em paralelo) segundo um padrão de atendimento. Enquanto os postos estão ocupados, os usuários aguardam numa única fila em um espaço designado para tal. Assim que um canal de serviço fica livre, um dos usuários da fila é chamado para atendimento segundo um critério estabelecido pela gerência. Uma vez completado o serviço, o usuário é liberado do sistema. O meio pelo qual os clientes são atendidos é chamado **disciplina de atendimento**.

O processo de chegadas dos usuários é especificado pelo comportamento do fluxo de chegadas dos mesmos ao sistema. Segundo Fogliatti e Mattos (2007), se são conhecidos o número de chegadas e os instantes de tempo em que elas acontecem, esse processo é denominado determinístico, caso contrário, tem-se um comportamento aleatório constituindo um processo estocástico caracterizado por uma distribuição de probabilidade. O caso mais comum e simples, é quando se considera que os clientes chegam segundo um processo de Poisson. O processo de atendimento é especificado pelo comportamento do fluxo de usuários e a sua caracterização é análoga à do processo de chegadas. Os canais ou postos de serviço são os locais onde são atendidos os usuários. O número de postos de um sistema pode ser finito ou infinito. A capacidade do sistema é o número máximo de usuários que o mesmo comporta (incluindo fila e atendimento) e pode ser finita ou infinita. Quando a capacidade é finita, os clientes que chegam ao sistema após a capacidade máxima ser atingida são rejeitados.

A disciplina de atendimento consiste na maneira pela qual os usuários que estão na fila são selecionados para serem atendidos. Os tipos de disciplinas de atendimento mais utilizados são:

- *FIFO (first in - first out)*: os usuários são atendidos na ordem das chegadas. Essa disciplina de atendimento é a mais comumente adotada.
- *LIFO (last in - first out)*: o primeiro usuário a ser atendido é o que chegou por último.
- *PRI (priority service)*: o atendimento aos usuários segue uma ou mais prioridades preestabelecidas pela gerência do sistema.
- *SIRO (service in random order)*: o atendimento aos usuários segue uma ordem aleatória.

Vale salientar que há outros tipos de disciplinas de atendimento, inclusive considerando aspectos como atendimento prioritário e desistências. No entanto, como este é apenas um estudo introdutório, tais modelos não foram vistos.

A notação utilizada neste trabalho para descrever um sistema com fila é a notação encontrada em boa parte da literatura clássica de estudo de filas e foi proposta por Kendall (1953). Considera-se a forma $A/B/C/D/E$, onde A e B denotam, respectivamente, as distribuições dos tempos entre chegadas sucessivas e de atendimento, C e D denotam o número de postos de atendimento em paralelo e a capacidade física do sistema, respectivamente e E , uma das siglas que representam as disciplinas de atendimento. Para simplificar a notação, frequentemente as letras D e E são omitidas. Quando tais “parâmetros” não aparecem, considera-se que o sistema tenha capacidade infinita e disciplina de atendimento *FIFO*.

Uma vez que fixada o tipo de fila que representa o objeto do estudo, o próximo passo é avaliar o processo. Para isto, são usadas as medidas de desempenho.

Segundo Fogliatti e Mattos (2007), a utilização da Teoria de Filas permite avaliar a eficiência de um sistema por meio da análise de suas características utilizando medidas de operacionalidade/desempenho. Essas características, na maioria das vezes, mudam ao longo do tempo, sendo então representadas por variáveis aleatórias, cujos valores esperados podem ser utilizados como medidas de desempenho do sistema no regime estacionário. Dentre essas medidas, podem-se citar:

- Número médio de usuários na fila (L_q) e no sistema (L).
- Tempo médio de espera de um usuário qualquer na fila (W_q).
- Tempo médio de permanência de um usuário qualquer no sistema (W).

Outras medidas de desempenho que caracterizam o comportamento do sistema são:

- Probabilidade de se ter no máximo um número n_0 pré-fixado de usuários no sistema, $P(N \leq n_0)$.
- Probabilidade de um usuário qualquer ter que aguardar mais do que um determinado tempo t na fila, $P(T_q > t)$.
- Probabilidade de se ter algum servidor ocioso em um sistema com c postos de atendimento, $P(N < c)$.

A seguir, serão descritos os modelos de fila usados neste trabalho. Além dos parâmetros do modelo, também serão listadas algumas medidas de desempenho associadas a cada modelo.

Modelo $M/M/1/\infty/FIFO$

O modelo $M/M/1/\infty/FIFO$, como foi dito anteriormente, pode ser representado como $M/M/1$ para simplificar a notação. Este modelo é caracterizado por:

- tempos entre chegadas sucessivas e os tempos de atendimento seguem distribuições exponenciais;
- existe um único posto de atendimento;
- não há limitação para o espaço reservado para a fila de espera;
- a ordem de acesso de usuários ao serviço segue a ordem das chegadas dos mesmos ao sistema.

As chegadas e os atendimentos caracterizam um processo de nascimento e morte, lembrando que somente um único evento pode acontecer em períodos pequenos de tempo. As taxas de chegada (ingresso) ao sistema e de atendimento são constantes e dadas respectivamente por:

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0$$

e

$$\mu_n = \mu \quad \forall n \geq 1.$$

No regime estacionário, para qualquer processo markoviano

$$P_n(t) = P_n \quad \forall n \geq 0.$$

Para um processo representado pelo modelo $M/M/1$, as probabilidades do sistema estar no estado n e no estado 0 são respectivamente

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n} P_0, \quad \forall n \geq 1$$

e

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1},$$

onde a soma geométrica só converge se $\frac{\lambda}{\mu} < 1$.

O parâmetro ρ definido como

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

é denominado taxa de ocupação/utilização do sistema.

Serão apresentadas a seguir algumas medidas de desempenho correspondentes ao modelo $M/M/1$:

- **Número médio de usuários na fila:** $L_q = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$.
- **Número médio de usuários no sistema:** $L = \frac{\rho}{1-\rho}$
- **Tempo médio de espera na fila:** $W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$
- **Tempo médio de permanência no sistema:** $W = \frac{1}{\mu-\lambda}$
- **Probabilidade de se ter mais do que k elementos no sistema:** $P(N \geq k) = \rho^k$.
- **Probabilidade do tempo de espera na fila ser maior do que um tempo $t > 0$:**

$$P(T_q > t) = 1 - W_q(t) = \rho e^{-(\mu-\lambda)t}.$$

Modelo $M/M/c/\infty/FIFO$

No modelo $M/M/c/\infty/FIFO$, os tempos entre chegadas sucessivas seguem distribuições exponenciais de parâmetro λ e há c servidores, cada um dos quais com tempos de atendimento que seguem distribuições exponenciais, de parâmetro μ . Como as chegadas e os atendimentos neste caso caracterizam um processo de nascimento e morte, logo as taxas de chegadas e de atendimento respectivamente são dadas por:

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0$$

e

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{se } 1 \leq n < c, \\ c\mu, & \text{se } n \geq c. \end{cases}$$

Denotando $r = \frac{\lambda}{\mu}$, a taxa de utilização do sistema é dada por:

$$\rho = \frac{r}{c} = \frac{\lambda}{c\mu}.$$

Daí, obtém-se que:

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{r^n}{n!}, & \text{se } 1 \leq n < c, \\ P_0 \frac{r^n}{c^{n-c} c!}, & \text{se } n \geq c \end{cases}$$

e

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{cr^c}{c!(c-r)} \right)^{-1}$$

Serão apresentadas a seguir algumas medidas de desempenho correspondentes ao modelo $M/M/c$.

- **Número médio de usuários na fila:** $L_q = \frac{P_0 cr^{c+1}}{c!(c-r)^2}$.
- **Número médio de usuários no sistema:** $L = r + \left[\frac{r^{c+1}c}{c!(c-r)^2} \right] P_0$.
- **Tempo médio de espera na fila:** $W_q = \frac{r^c \mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} P_0$.
- **Tempo médio de permanência no sistema:** $W = \frac{1}{\mu} + \left[\frac{r^c \mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} \right] P_0$.
- **Função de distribuição acumulada do tempo de espera na fila:**

$$W_q(t) = 1 - P_0 \frac{r^c}{c!(1-\rho)} e^{-(c\mu-\lambda)t}$$

Metodologia

Várias aplicações foram cogitadas, mas descartadas pela dificuldade de se colher os dados. Por fim, decidiu-se modelar os atendimentos em uma casa lotérica localizada na cidade de Cubati-PB. O estabelecimento utilizado foi uma casa lotérica constituída por dois postos de atendimento, a qual se encaixa no modelo de fila $M/M/2/\infty/FIFO$. O estabelecimento era motivo de constantes reclamações por parte de seus clientes, devido à demora até que os mesmos fossem atendidos em dias de pagamento do benefício Bolsa Família do governo federal. Com a definição do problema, foram escolhidos dois dias considerados pela gerência representativos do comportamento do sistema para a coleta dos dados. O primeiro dia é referente ao funcionamento do sistema em situação normal, já no segundo dia, havia pagamento do Bolsa Família, o que logicamente causa aumento na fila de espera pelo serviço. Foram observados os tempos entre chegadas sucessivas dos clientes e os tempos que cada um levava em atendimento. Após o colhimento dos dados, foram calculadas as taxas de chegadas sucessivas e de atendimento referentes aos dois dias e suas respectivas medidas de desempenho, no intuito de compará-las para se obter conclusões sobre o funcionamento do sistema e conseqüentemente propôr melhorias ao mesmo.

Uma vez que os dados foram coletados, foi feito o teste Qui-Quadrado de aderência para saber se era plausível o uso de filas markovianas, ou seja, se o número de chegadas e os atendimentos eram satisfatoriamente modelados por uma distribuição de Poisson. Isso é equivalente a se ter tempos de chegadas e de atendimentos exponenciais.

É importante que se comente sobre o quanto o estudo da Teoria de Filas é complexo e sobre a dificuldade encontrada na coleta dos dados, já que às vezes, pessoas ou entidades não têm interesse que um estudo dessa natureza seja feito, por receio de resultados insatisfatórios.

Resultados e Discussão

Modelagem do Sistema em Situação Normal de Funcionamento

Como foi dito, a casa lotérica considerada, tinha dois caixas, o que nos leva a considerar o modelo com dois postos de atendimento. Quanto à limitação do sistema, qualquer cliente que chegue antes do horário de fechamento poderia ficar esperando para ser atendido e além disso, a casa lotérica, tendo uma “fila única” atende primeiro quem chega primeiro (FIFO). Assim, a ideia é considerar um modelo $M/M/2$, mas para tanto, precisamos ver a adequabilidade de se considerar que as chegadas e os atendimentos ocorrem segundo um processo de Poisson. Para verificar se tal suposição era plausível, propôs-se

o uso de um teste Qui-quadrado de aderência, cuja descrição pode ser encontrada em livros de estatística, tais como Bussab e Morettin (2002).

Primeiramente as hipóteses formuladas para a execução deste teste foram:

$$\begin{cases} H_0 : & \text{As chegadas do clientes se adequa a uma distribuição de Poisson.} \\ H_1 : & \text{As chegadas do clientes não se adequa a uma distribuição de Poisson.} \end{cases}$$

As frequências do número de chegadas por minuto foram calculadas e apresentadas na Tabela 1, no intuito de calcular-se a estatística $\chi^2 = \frac{(O_i - O_e)^2}{O_e}$ e compará-la com o quantil de uma $\chi^2_{(1;95\%)}$.

Tabela 1: Frequências observadas e esperadas do número de chegadas por minuto e cálculo da estatística χ^2 para um dia normal.

Nº de chegadas por minuto	Frequência observada O_i	Frequência esperada O_e	$\frac{(O_i - O_e)^2}{O_e}$
0	305	307,67	0,02317
1	76	69,66	0,57703
2	6	7,74	0,39116
Total	387	385,07	0,99136

Tivemos que $\chi^2_{(1;95\%)} = 3,841$ e como temos $\chi^2_{calculado} < \chi^2_{tabelado}$, logo aceitamos a hipótese nula, portanto não há evidências significativas para não se levar em consideração que o número de chegadas por minuto segue uma distribuição de Poisson ao nível de 95% de confiança.

Uma vez que foi estabelecido o modelo de fila que será utilizado, serão estimados os parâmetro do modelo (λ e μ) e calculadas as medidas de desempenho para o mesmo. As medidas de desempenho para dias normais de funcionamento do estabelecimento foram calculadas e são mostradas na Tabela 2. Podemos ver, entre outras coisas, que a taxa de chegadas é menor que a taxa de atendimento e também que a probabilidade de formação de fila é baixa. Outro ponto que vale a pena ser destacado é que $\rho < 1$, o que é uma condição frequentemente considerada no desenvolvimento da teoria apresentada.

Tabela 2: Estimativas e Medidas de desempenho para um dia normal de funcionamento.

Medidas de desempenho	valores calculados
Taxa de chegadas (λ)	0,23 clientes/min
μ_1	0,55 clientes/min
μ_2	0,45 clientes/min
Taxa de atendimento (μ)	0,5 clientes/min
$c\mu$	1 cliente/min
ρ	0,23
P_0	0,63
L_q	0,03 clientes
L	0,49 clientes
W_q	0,12 min
W	2,12 min
Probabilidade de haver fila $P(N \geq 2)$	0,08 (8%)

Tendo em vista a observação das medidas de desempenho apresentadas na tabela 2, foi feita uma simulação do sistema com apenas um posto de atendimento para o caso de dias normais de funcionamento. As medidas de desempenho para este caso são apresentadas na Tabela 3.

Comparando com os resultados apresentados anteriormente na Tabela 2, vemos que há um aumento considerável da probabilidade de se formar uma fila. Além disso, o número esperado de usuários no sistema quase duplicou e o tempo médio de espera aumentou em torno de 74%.

Tabela 3: Estimativas e Medidas de desempenho para um dia normal de funcionamento, considerando que existisse apenas um posto de serviço.

Medidas de desempenho	valores
Taxa de chegadas (λ)	0,23 clientes/min
Taxa de atendimento (μ)	0,5 clientes/min
ρ	0,46
P_0	0,54
L_q	0,39 clientes
L	0,85 clientes
W_q	1,7 min
W	3,7 min
Probabilidade de haver fila $P(N \geq 1)$	0,46=46%

Sistema em Dias de Pagamento do Bolsa Família

Agora as análises feitas na seção anterior serão refeitas para o caso em que os dados foram colhidos em dia de pagamento do benefício concedido pelo governo federal a algumas famílias de baixa renda, o Bolsa Família. Também aqui será considerado um modelo $M/M/2$, pelas mesmas razões consideradas anteriormente.

Como feito na seção anterior as hipóteses formuladas para a execução deste teste foram:

$$\begin{cases} H_0 : & \text{As chegadas do clientes se adequa a uma distribuição de Poisson} \\ H_1 : & \text{As chegadas do clientes não se adequa a uma distribuição de Poisson} \end{cases}$$

As frequências do número de chegadas por minuto foram calculadas e apresentadas na Tabela 4, no intuito de calcular-se a estatística $\chi^2 = \frac{(O_i - O_e)^2}{O_e}$ e compará-la com o quantil de uma $\chi^2_{(2;95\%)}$.

Tabela 4: Frequências observadas e esperadas do número de chegadas por minuto e cálculo da estatística χ^2 para dias de pagamento do Bolsa Família.

Nº de chegadas por (min)	Freq. observada O_i	O_i	Freq. esperada O_e	$\frac{(O_i - O_e)^2}{O_e}$
0	88	88	80,58	0,00417
1	46	46	53,72	1,10943
2	15	15	17,38	0,32591
3	6	9	4,74	3,82861
4	3			
Total	158	158	156,42	5,26812

Tivemos que $\chi^2_{(2;95\%)} = 5,991$ e como temos $\chi^2_{calculado} < \chi^2_{tabelado}$, logo aceitamos a hipótese nula, portanto não há evidências significativas para não se levar em consideração que o número de chegadas por minuto segue uma distribuição de Poisson ao nível de 95% de confiança.

Após aceitarmos que o modelo $M/M/2$ é adequado para modelar os dados, devemos estimar seus parâmetros (λ e μ) e calcular as medidas de desempenho associadas ao mesmo. Tais medidas, calculadas para dias de funcionamento do estabelecimento com pagamento do Bolsa Família, foram calculadas e são mostradas na Tabela 5.

Podemos ver, pelos valores apresentados na tabela 5 que, como era de se esperar, o número médio de clientes aumentou em relação aos dias em que não há pagamento do benefício. Obviamente, também aumentou consideravelmente o tempo médio de permanência no sistema. Podemos também observar

Tabela 5: Medidas de desempenho para dias de pagamento do Bolsa Família

Medidas de desempenho	valores
Taxa de chegada de clientes (λ)	0,67 clientes/min
μ_1	0,67 clientes/min
μ_2	0,57 clientes/min
Taxa média de atendimento em cada posto (μ)	0,62 clientes/min
$c\mu$	1,24 clientes/min
ρ	0,54
P_0	0,30
L_q	0,45 clientes
L	1,53 clientes
W_q	0,68 min
W	2,29 min
Probabilidade de haver fila $P(N \geq 2)$	0,624

que a razão entre a taxa de chegadas e de atendimento (ρ) permanece abaixo de 1, o que é uma condição fundamental para o bom funcionamento do sistema.

Devido à grande frequência de assaltos contra agências bancárias - correspondentes bancários, agências dos Correios e casas lotéricas - que tem acontecido nas cidades do interior do estado da Paraíba, a casa lotérica considerada no estudo contava com uma quantidade relativamente reduzida de dinheiro. Assim, muitas vezes, faltava dinheiro em um dos caixas de atendimento do estabelecimento em dias de pagamento do Bolsa Família. Portanto, foi feita uma simulação do sistema com apenas um posto de atendimento. Foram calculadas as taxas de chegadas (λ) e de atendimentos (μ) e neste caso observou-se que $\rho = \frac{\lambda}{\mu} > 1$. Tal fato torna impossível o cálculo das medidas de desempenho, pois a soma geométrica usada no cálculo dessas medidas não converge. O que acontece neste caso, é que o sistema sofre uma super lotação, pois chegam mais usuários do que o sistema pode atender, daí um dos motivos das constantes reclamações referentes ao estabelecimento.

Conclusões

O que os dados considerados apontaram, como já era de se esperar, é que há uma diferença significativa no comportamento do sistema na a situação normal de funcionamento e na situação onde há pagamento do Bolsa Família. Isto é reforçado pelo estudo, pois aumenta-se consideravelmente o tempo médio que o usuário fica no sistema, o número médio de usuários no sistema e a probabilidade de formação de fila.

Podemos concluir que o sistema se comporta muito bem nas duas situações, mas se levarmos em consideração que o estabelecimento só opera com apenas um posto de serviço na maioria das vezes em dias de pagamento do Bolsa Família, que é o que realmente acontece, o sistema fica super lotado e se torna impossível controlar o congestionamento de clientes no estabelecimento, neste caso, portanto, os clientes têm razão em reclamar a respeito da espera pelo atendimento.

Em dias normais de atendimento, tendo em vista que o número médio de usuários na fila é 0,03 clientes, logo se torna dispensável um posto de atendimento para este caso, já que na simulação feita com o funcionamento de um só caixa de serviço, o sistema também se comporta muito bem, levando-se em consideração o tempo médio de permanência no sistema para este caso que é de 3,7min, que é um tempo tolerável de espera. Já em dias de pagamento do Bolsa Família o ideal seria que o sistema operasse com sua capacidade máxima, ou seja, com o funcionamento dos dois postos de atendimento, logo, para que isso ocorra foi sugerido a gerência do sistema a correção do problema da falta de dinheiro nos caixas de serviço, com isso o sistema atenderia com qualidade as necessidades de seus usuários além de gerar

lucros maiores para a gerência, pois quanto mais clientes atendidos, mais movimentações financeiras são feitas.

De maneira geral, o problema da casa lotérica não está no atendimento, e sim em questões internas como: falta de dinheiro nos caixas de serviço e a rede de computadores fora de conexão. Com a correção desses problemas é possível controlar o fluxo de usuários que entram e saem do estabelecimento, evitando assim perda de clientes e declínio nos lucros da entidade.

Pôde-se concluir também neste trabalho que a Teoria de filas é uma importante ferramenta tratando-se de controle de fluxos de usuários em sistemas com fila, já que através deste estudo pode-se observar detalhadamente o comportamento desses sistemas e ainda propor melhorias para um bom funcionamento do mesmo.

Referências

BUSSAB, W.; MORETTIN, P. *Estatística Básica*. 5a. ed. [S.l.]: Editora Atual, 2002.

FOGLIATTI, M. C.; MATTOS, N. M. C. *Teoria das Filas*. [S.l.]: Editora Interciência, 2007.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introduction to Operations Research*. 12a. ed. [S.l.]: Holden-Day Inc., 1974.

KENDALL, D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chains. *Ann. Math. Statist.*, v. 24, p. 338-354, 1953.