

Análise Teórica Sobre a Equação das Ondas

Lucas O. Quintino^{1†}, Evandro Monteiro²

¹ Professor Substituto do Instituto de Ciências Exatas da UNIFAL.

² Professor Adjunto do Instituto de Ciências Exatas da UNIFAL.

Resumo: *O objetivo central deste trabalho é o estudo do problema da equação das ondas, primeiramente como uma motivação física e posteriormente com uma análise mais cautelosa da questão, enfatizando aspectos matemáticos da física teórica, e, desta forma, enriquecendo-a com maior rigor matemático, clareza de raciocínio e limpeza de argumentos e premissas. Tal situação nos conduz a um problema em que o valor da solução em uma variável espacial ou de suas derivadas é especificado na fronteira do conjunto. Para a resolução desses problemas de valores iniciais ou de fronteira, será utilizado o método de Fourier, que consiste em duas etapas. Na primeira, utiliza-se a separação de variáveis, para que com isso adquiramos problemas de autovalor para equações diferenciais ordinárias que estão relacionadas com as equações diferenciais parciais em estudo. Nessa etapa, obtém-se uma gama de soluções da equação diferencial parcial que satisfaz parte das condições de fronteira. A segunda etapa, chamada de Análise de Fourier, possui como ideia principal utilizar a solução do problema como uma série cujos termos são produtos dessas soluções por coeficientes adequadamente escolhidos.*

Palavras-chave: Equação das Ondas, Equação diferencial parcial, Energia da corda vibrante, Vibrações forçadas, Séries de Fourier.

Abstract: *The main aim of this work is to study the problem of wave equation, first as a physical motivation and then with a careful analysis of the problem, emphasizing mathematical aspects of theoretical physics, enriching it with greater mathematical rigor, clarity of thought and cleaning of arguments and assumptions. This situation leads us to a problem in which value of a spatial variable or its derivative is specified by boundary conditions. In order to obtain solutions to these initial problems or boundary values, the Fourier resolution method is used, which consists in two steps. The first uses the separation of variables so that it can obtain eigenvalue problems for ordinary differential equations which are closely related to partial differential equations under study. On this step, we obtain a range of solutions of partial differential equation that satisfies part of the boundary conditions. The second step, called Fourier analysis, which main idea is using the solution of the problem as a series whose terms are products of these solutions by appropriately chosen coefficients.*

Keywords: Wave equation, Partial differential equation, Energy of a vibration string, Forced vibration, Fourier Series.

[†]Autor correspondente: lucas.quintino@unifal-mg.edu.br.

Introdução: Modelagem da Equação das Ondas

Considere uma corda elástica com dimensões pequenas em relação ao seu comprimento e presa em suas extremidades. Para o instante $t = 0$ a corda está completamente em repouso, estendida entre dois pontos fixos 0 e c . A partir desse instante, por algum estímulo externo, a corda passa a oscilar. Para simplificar, iremos supor que a corda permaneça sempre no plano xy . Devido ao seu movimento, a corda fica sujeita a uma tensão de restauração $\vec{\vartheta}$. Essa tensão aparece como uma força tangente à corda, possuindo uma componente horizontal \vec{h} e uma vertical \vec{v} , tal que: $\vec{\vartheta} = \vec{v} + \vec{h}$. Em um dado instante t e em um ponto x , a amplitude da oscilação da corda é dada por $y(x, t)$ e o ângulo alfa entre a tangente e a horizontal é $\tan\alpha = |\vec{v}|/|\vec{h}| = v(x, t)/h(x, t) = \partial y/\partial x$ (MAIA, 2000). Denotaremos a derivada parcial de y em relação x por y_x , logo podemos escrever $v(x, t) = hy_x$.

Considere um elemento infinitesimal da corda de comprimento Δx . Supondo que os deslocamentos infinitesimais são muito menores que a extensão da corda, $y(x, t) \ll c$, uma variação no comprimento da corda será proporcional a uma variação no eixo x . Sendo ρ a densidade linear da corda, então a massa do elemento será $\rho\Delta x \approx \rho\Delta x$. (MAIA, 2000) Aplicando a segunda lei de Newton, obtemos:

$$\rho\Delta x\vec{\gamma} = \vec{F}(x, t) = \vec{\vartheta}(x + \Delta x, t) - \vec{\vartheta}(x, t), \quad (1)$$

sendo desprezada qualquer força externa. $\vec{F}(x, t)$ representa a força resultante das tensões no elemento e $\vec{\gamma}$ o vetor aceleração que possui a mesma direção e sentido que $\vec{F}(x, t)$. Da hipótese que \vec{h} da tensão é constante, o movimento de oscilação da corda ocorre somente na direção vertical. Isso significa que $\vec{\gamma}$ terá direção vertical e será igual a $\partial^2 y/\partial x^2$. Comparando as componentes verticais, temos

$$\rho\Delta x y_{tt} = v(x + \Delta x, t) - v(x, t) = hy_x(x + \Delta x, t) - hy_x(x, t). \quad (2)$$

Ou seja,

$$y_{tt} = \frac{h}{\rho} \left(\frac{y_x(x + \Delta x, t) - y_x(x, t)}{\Delta x} \right)$$

Tomando o limite para quando $\Delta x \rightarrow 0$, pela definição de derivada, obtemos

$$y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t) \quad (3)$$

sendo $h/\rho = a^2 > 0$. Esta equação é uma equação diferencial linear, de segunda ordem, com derivadas parciais e descreve as oscilações da corda elástica para as condições adotadas. Como por hipótese, quando em posição de repouso, a corda está com as extremidades fixas, temos duas condições básicas

$$y(0, t) = 0, \quad y(c, t) = 0$$

Adicionaremos também uma velocidade inicial, obtendo o problema de contorno

$$\begin{cases} y_{tt} = a^2 y_{xx} \\ y(0, t) = 0 \\ y(c, t) = 0 \\ y_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (4)$$

onde $g(x)$ é uma função dada.

Resolução da Equação das Ondas por Séries de Fourier

O método de separação de variáveis e a teoria das séries de Fourier são utilizados para resolver o problema de contorno da corda vibrante com extremidades fixas:

$$\begin{cases} y_{tt} = a^2 y_{xx}, & \text{em } \mathfrak{R}, \\ y(0, t) = y(c, t) = 0, & \text{para } t \geq 0, \\ y(x, 0) = f(x), \quad y_t(x, 0) = g(x), & \text{para } 0 \leq x \leq c. \end{cases} \quad (5)$$

Onde fora designado por \mathfrak{R} a semifaixa $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < c\}$ e supomos a constante. Inicialmente, iremos usar a separação das variáveis para determinar as funções $y(x, t) = F(x)G(t)$ que satisfaçam à equação das ondas e às condições de fronteira, e usar essas funções para compor uma função que satisfaça também às condições iniciais. Substituindo na equação das ondas temos

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{a^2 G}. \quad (6)$$

Podemos observar em (6) que o lado esquerdo depende somente de x , e o lado direito somente de t . Implicando em um parâmetro σ (independente de x e de t), o qual é determinado de modo que satisfaça as condições de fronteira por $y(x, t) = F(x)G(t)$ (FIGUEIREDO, 1977). Logo, de (6), temos:

$$F'' - \sigma F = 0, \quad (7)$$

$$G'' = \sigma a^2 G. \quad (8)$$

As condições de fronteira implicam $F(0) = F(c) = 0$, pois de outro modo, $G(t) = 0, \forall t$. Para essas condições, acarretaria $y(x, t) = 0$, para todo x e t , o que não interessa. Dessa forma, chegamos ao seguinte problema de autovalores: determinar os valores σ , para os quais o problema

$$\begin{cases} F'' - \sigma F = 0, & 0 < x < c, \\ F(0) = F(c) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

tenha soluções $F(x) \neq 0$

Antes de seguirmos em frente, agora procedemos no sentido de analisar quais os valores de σ que conduzem a soluções $F(x)$ do problema dado em (9). Não estamos interessados em obter $y \equiv 0$, portanto queremos apenas soluções F não identicamente nula. Há três possibilidades para σ (BUTKOV, 1968), conforme segue.

i) Para $\sigma > 0$, a solução geral de (9) é

$$F(x) = k_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + k_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

Portanto, o par (k_1, k_2) de constantes deverá ser solução do sistema

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 e^{\sqrt{\sigma}c} + k_2 e^{-\sqrt{\sigma}c} = 0. \end{cases}$$

A única solução desse sistema é $k_1 = k_2 = 0$. Implicando $F \equiv 0$, o que não interessa.

ii) Se $\sigma = 0$, a solução de (9) é da forma

$$F(x) = k_1 x + k_2,$$

e, para satisfazer às condições, devemos ter

$$k_2 = 0 \quad e \quad k_1 c + k_2 = 0,$$

implicando $k_1 = k_2 = 0$ e, portanto, $F \equiv 0$.

iii) Se $\sigma < 0$, fazemos $\sigma = -\lambda^2$, e a solução geral de (9) será da forma

$$F(x) = k_1 \cos(\lambda x) + k_2 \operatorname{sen}(\lambda x).$$

Tal que, devemos ter

$$k_1 = 0 \quad e \quad k_2 \operatorname{sen}(\lambda c) = 0.$$

Não queremos $k_2 = 0$, portanto $\operatorname{sen}(\lambda c) = 0$, o que implica $\lambda c = n\pi$, onde n é um inteiro não-nulo ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Os valores de $-\sigma = \lambda^2$:

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{c^2} \quad (10)$$

são denominados os valores próprios ou autovalores do problema dado em (9), e as funções

$$F_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \quad (11)$$

são chamadas as funções próprias ou autofunções do problema dado em (9). Não é necessário considerar os valores negativos de λ_n , pois assim conduziria apenas a uma autofunção diferindo apenas no sinal de outra obtida para um λ_n positivo.

Temos que, para cada σ_n , a solução geral de (8) é

$$G_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi at}{c} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{c},$$

onde a_n e b_n são constantes arbitrárias. Portanto, as funções

$$y_n(x, t) = a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi at}{c} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{c} \quad (12)$$

satisfazem às condições de fronteira e são soluções para a equação da onda. Prosseguindo com o método de Fourier, o próximo passo é a determinação das constantes a_n e b_n , de forma que a solução $y(x, t)$ do problema de valor inicial e de fronteira (5) seja

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi at}{c} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{c} \right) \quad (13)$$

Implicando, primeiramente, que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \quad (14)$$

e, para que isso ocorra, é necessário que

$$a_n = \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx \quad (15)$$

Derivando a série (13) termo a termo, podemos determinar os b_n de modo formal. Utilizando-se então, da segunda condição inicial

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{c} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \quad (16)$$

Logo,

$$\frac{n\pi a}{c} b_n = \frac{2}{c} \int_0^c g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx$$

de onde obtemos

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^c g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx \quad (17)$$

É importante salientar que nenhuma hipótese fora feita sobre f e g . O método utilizado foi elegante, porém incauto em relação ao rigor. Prosseguiremos nesta seção colocando e demonstrando as seguintes questões:

- i) a série (13) converge?;
- ii) (13) é definida como uma função contínua em $\overline{\mathfrak{R}}$?
- iii) define ela uma função de classe C^2 em \mathfrak{R} , que seja solução do problema de valor inicial e de fronteira?;
- iv) quais as condições sobre f para ocorrer (14)?
- v) quais as condições sobre g para que (16) ocorra?

Teorema 1 *Supondo f e g funções dadas em $[0, c]$ tais que $f, f', f'', g, g',$ sejam contínuas e f''' e g'' são seccionalmente contínuas. Iremos supor também que $f(0) = f(c) = f''(0) = f''(c) = g(0) = g(c) = 0$. À vista disso: i) a_n e b_n estão bem definidas por (15) e (17), respectivamente; ii) as igualdades (14) e (16) ocorrem; iii) (13) define uma função contínua em $\overline{\mathfrak{R}}$ e de classe C^2 em \mathfrak{R} , satisfazendo à equação das ondas.*

Demonstração

i) é consequência direta do fato de f e g serem contínuas em $[0, c]$, implicando que as integrais em (15) e (17) existem. A parte ii) deriva das hipóteses de f e g serem de classe C^1 em $[0, c]$ e de que $f(0) = f(c) = g(0) = g(c) = 0$. Assim, f e g podem ser estendidas continuamente a toda a reta de modo a serem ímpares e periódicas de período $2c$. Antes de seguirmos em frente com as demonstrações, introduziremos o Teorema de Fourier.

Teorema 2 *TEOREMA DE FOURIER. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2c$. Então a série de Fourier da função f dada, converge em cada ponto x para*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{c} + b_n \sin \frac{n\pi x}{c} \right)$$

Demonstração

Para provar que (13) define uma função contínua em $\overline{\mathfrak{R}}$, basta mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ converge, pois está é uma majorante da série (13). Sendo assim, a integração por partes, três vezes, e as hipóteses $f(0) = f(c) = f''(0) = f''(c) = 0$ nos dão

$$a_n = -\frac{2c^2}{n^3\pi^3} \int_0^c f'''(x) \cos \frac{n\pi x}{c} dx. \quad (18)$$

Analogamente,

$$\frac{n\pi a}{c} b_n = -\frac{2c}{n^2\pi^2} \int_0^c g''(x) \sin \frac{n\pi x}{c} dx \quad (19)$$

De (18) e (19) segue

$$|a_n| \leq \frac{k}{n^3} \quad e \quad |b_n| \leq \frac{k'}{n^3}$$

onde k e k' são constantes. Dessa forma, as séries $\sum (|a_n| + |b_n|)$ e $\sum (n|a_n| + n|b_n|)$ convergem, mostrando que y é contínua em $\overline{\mathfrak{R}}$ e de classe C^1 em \mathfrak{R} . Foi mostrado, também, que as derivadas primeiras de y podem ser obtidas derivando-se (13) termo a termo:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{n\pi}{c} \cos \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi at}{c} + b_n \frac{n\pi}{c} \cos \frac{n\pi x}{c} \sin \frac{n\pi at}{c} \right), \quad (20)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \frac{n\pi a}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{c} + b_n \frac{n\pi a}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi at}{c} \right) \quad (21)$$

De (18) e (19), obtemos

$$|a_n| \leq \frac{k''}{n^3} |c_n|, \quad |b_n| \leq \frac{k'''}{n^3} |d_n|, \quad (22)$$

sendo c_n e d_n denominados coeficientes de Fourier de f''' e g'' , respectivamente. Logo, utilizando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ em (22), tem-se

$$n^2 |a_n| \leq \frac{k''}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n|^2 \right), \quad n^2 |b_n| \leq \frac{k'''}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |d_n|^2 \right)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 |a_n| + n^2 |b_n|) \leq \frac{k'' + k'''}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 \right) \quad (23)$$

Em virtude da Desigualdade Bessel, as duas últimas séries em (23) convergem. Logo, a convergência do primeiro membro de (23), implica que y seja de classe C^2 em \mathfrak{R} e as derivadas segundas de y podem ser obtidas derivando (20) e (21), termo a termo. À vista disso, verificar-se-á, que y satisfaz à equação da onda. C.Q.D.

Aplicação: Corda Vibrante

Energia da corda vibrante

Seja $y(x, t)$ uma solução da equação

$$\rho(x)y_{tt} = \tau y_{tt} + h_1(x, t, y) \quad (24)$$

onde fora designado por $h_1(x, t, y)$ a densidade linear de forças externas ao longo da corda. Adicionaremos a hipótese de que $\tau(t) = t$ seja independente do tempo. Fazendo a suposição de que y satisfaça à equação da onda em \mathfrak{R} , e seja uma função de classe C^1 em $\overline{\mathfrak{R}}$, sendo $\overline{\mathfrak{R}}$ a aderência, e de classe C^2 em \mathfrak{R} . Multiplicando (24) por y_t e integrando com relação a x entre 0 e c , temos

$$\int_0^c \rho(x)y_{tt}y_t dx = \int_0^c \tau y_{tt}y_t dx + \int_0^c h_1(x, t, y) dx. \quad (25)$$

Atentando-se ao fato de que $y_{tt}y_t = \frac{1}{2}(y_t^2)_t$ e realizando integração por partes na segunda integral de (25), tem-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^c \rho(x)y_t^2 dx = \tau y_x y_t \Big|_0^c - \int_0^c \tau y_x y_{tx} dx + \int_0^c h_1(x, t, y) y_t dx$$

que pode ser reescrito da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^c \rho(x)y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^c \tau y_x^2 dx \right] = \tau y_x y_t \Big|_0^c + \int_0^c h_1(x, t, y) y_t dx. \quad (26)$$

A expressão dada pela equação (26) é chamada *equação da energia*. A relação abaixo

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_0^c \rho(x)y_t^2 dx \quad (27)$$

é a *energia cinética* da corda e

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^c \tau y_x^2 dx \quad (28)$$

representa a *energia potencial* da corda e $E(t) = K(t) + V(t)$ é a *energia total* da corda. Supondo que y seja solução de (5); nesse caso, $h_1 = 0$ e $y_t(0, t) = y_t(c, t) = 0$. Desse modo, (26) reduz-se a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_0^c \rho(x) y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^c \tau y_x^2 dx \right], \quad (29)$$

implicando que a energia $E(t)$ seja constante no tempo (FIGUEIREDO, 1977). Portanto, sem a ação de forças externas, tem-se o princípio da conservação da energia para o fenômeno de vibração da corda com extremidades fixas. Quando isso ocorre, diz-se que o sistema é *conservativo* (NUSSENZVEIG, 1996). Para o caso de vibração da corda, sem ação de forças externas, com condições de fronteira semelhante, pode-se tirar igual conclusão. A energia inicial de corda vibrante é

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^c \rho(x) g(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^c \tau f'(x)^2 dx, \quad (30)$$

e o princípio de conservação de energia nas condições dadas em (5) diz que essa energia é mantida.

Teorema 3 *A solução do problema de valor inicial e de fronteira, caso exista, é única*

$$\begin{cases} \rho(x) y_{tt} = \tau y_{xx} + k_1(t, x), & \text{em } \mathbb{R} \\ y(0, t) = h_1(t), \quad y(c, t) = h_2(t), & t > 0 \\ y(x, 0) = f(x), \quad y_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < c. \end{cases} \quad (31)$$

Demonstração:

Suponha que (31) tenha duas soluções y_1 e y_2 , de classe C^2 em \mathfrak{R} e contínua em $\overline{\mathfrak{R}}$. À vista disso, as seguintes relações de compatibilidade entre os dados iniciais e os de fronteira serão: $h_1(0) = f(0)$, $h_2(0) = g(c)$. A função $y = y_1 - y_2$ é de classe C^2 em \mathfrak{R} , contínua em $\overline{\mathfrak{R}}$ e satisfaz ao seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} \rho(x) y_{tt} = \tau y_{xx}, \\ y(0, t) = y(c, t) = 0, \\ y(x, 0) = y_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

A energia inicial $E(0)$ é 0. Então, de (29), conclui-se

$$\frac{1}{2} \int_0^c \rho(x) y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^c \tau y_x^2 dx = 0,$$

implicando $y_t(x, t) = y_x(x, t) = 0$, constante, para (x, t) em \mathfrak{R} . Utilizando-se da continuidade de y em $\overline{\mathfrak{R}}$, e as condições iniciais, podemos concluir que $y = 0$ em $\overline{\mathfrak{R}}$, ou seja, $y_1 = y_2$. Tem-se assim, a unicidade de solução para (31). C.Q.D.

Vibrações forçadas

Estudaremos agora o problema de vibração de uma corda com extremidades fixas e sujeita a forças externas. O deslocamento $y(x, t)$ é a solução para o problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} y_{tt} = a^2 y_{xx} + g(x, t), & \text{em } \mathbb{R}, \\ y(0, t) = y(c, t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ y(x, 0) = f_0(x), & \text{para } 0 \leq x \leq c, \\ y_t(x, 0) = f_1(x), & \text{para } 0 \leq x \leq c, \end{cases} \quad (33)$$

Procederemos informalmente, como feito anteriormente, para descobrir um candidato à solução na forma

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c}, \quad (34)$$

com coeficientes $c_n(t)$ a determinar. Para cada t , iremos supor que a função $g(x, t)$ possa ser escrita como uma série de Fourier

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \quad (35)$$

Utilizando-se da derivação termo a termo, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'' \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{c^2} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c}$$

Segue-se então, que

$$a_n'' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{c^2} = g_n(t),$$

ou seja,

$$a_n'' + (2\pi\omega_n)^2 a_n = g_n, \quad \forall t > 0 \quad (36)$$

onde $\omega_n = na/2c$ é a frequência do n -ésimo harmônico da corda livre, conforme veremos na próxima secção. Usando as condições iniciais de (33), pode-se concluir que

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c}, \quad (37)$$

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c}, \quad (38)$$

portanto, devemos ter

$$a_n(0) = \frac{2}{c} \int_0^c f_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx, \quad (39)$$

$$a_n'(0) = \frac{2}{c} \int_0^c f_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx, \quad (40)$$

Logo, $c_n(t)$ será solução de um problema de valor inicial para a equação dada em (36), (39) e (40). A solução geral de (36) é da seguinte forma

$$a_n(t) = K_1 \cos 2\pi\omega_n t + K_2 \operatorname{sen} 2\pi\omega_n t + \hat{a}_n(t)$$

onde $\hat{a}_n(t)$ é uma solução particular de (36) e K_1 e K_2 são constantes arbitrárias que podem ser encontradas de acordo com as condições iniciais, satisfazendo (39) e (40).

Omitiremos a discussão das hipóteses sobre a diferenciabilidade de g , f_0 e f_1 , para provar que a série (34) converge e que define uma solução (33), pois já fora feito argumentos semelhantes anteriormente.

Harmônicos, frequência, amplitude

Na resolução de (5) pelo método de Fourier, encontramos funções

$$y(x, t) = a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi at}{c} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{c}$$

que são soluções e satisfazem às condições de fronteira da equação $y_{tt} = a^2 y_{xx}$. Essas funções representam *ondas estacionárias*, pela razão de que para x , tal

que $n\pi x/c = k\pi$, isto é, $x = kc/n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, tem-se $\text{sen}(n\pi x/c) = 0$. Então esses pontos, e somente esses, permanecem parados se a vibração da corda for descrita pela função y_n , correspondendo ao caso de vibração com as extremidades da corda fixas e condições iniciais $y(x, 0) = a_n \text{sen}(n\pi x/c)$ e $y_t(x, 0) = (n\pi a/c)b_n \text{sen}(n\pi x/c)$. Esses pontos são denominados de *nós* da onda estacionária. Os pontos médios entre os nós consecutivos são os *ventres* ou *antinós*. O dobro da distância entre dois nós é o *comprimento de onda*, dessa forma o comprimento de onda da onda estacionária y_n é $2c/n$ (NUSSENZVEIG, 1996). A figura a seguir ilustra tais conceitos.

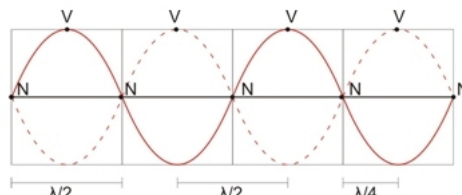


Figura 1: Onda estacionária

A função y_n é também chamada de o n -ésimo harmônico ou a n -ésima tônica. A primeira tônica recebe a nomenclatura de *tônica principal* ou *harmônico fundamental*, e as sucessoras são as *supertônicas*. Fazendo $\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e $\theta_n = \text{arctg}(a_n/b_n)$, tem-se y_n da seguinte forma

$$y_n(x, t) = \alpha_n \text{sen} \left(\frac{n\pi at}{c} + \theta_n \right) \text{sen} \frac{n\pi x}{c} \quad (41)$$

sendo θ denominado fase. A corda possui uma configuração descrita por uma senóide para cada t fixo. Para valores de t tais que $(n\pi at/c) + \theta_n = k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, a corda passa pela posição de equilíbrio, e nesses momentos a velocidade é máxima. A velocidade será nula para os valores de t tais que $\text{sen}[(n\pi at/c) + \theta_n] = \pm 1$, onde a corda tem seus desvios máximos da posição de equilíbrio. O movimento de cada ponto x da corda é regido pela lei senoidal de amplitude $\alpha_n \text{sen}(n\pi x/c)$, período $T_n(2c/na)$ e frequência $\omega_n = T_n^{-1} = (na/2c)$. À vista disso, todos os elementos da corda oscilam com a mesma frequência de vibração e constante de fase, ou seja, tem a mesma dependência temporal, caracterizando-se como os modos normais de vibração. Então

$$\omega_n = \frac{na}{2c}$$

e

$$\alpha_n \text{sen} \frac{n\pi x}{c}$$

recebem o nome de, respectivamente, *frequência* ou *frequência natural* e *amplitude* do n -ésimo harmônico. Pode-se concluir também que as frequências das supertônicas são múltiplos da frequência da tônica.

A energia do n -ésimo harmônico. Consideremos o n -ésimo harmônico y_n , de uma corda vibrante com suas extremidades fixas. Da expressão (41), segue

$$\frac{\partial y_n}{\partial t}(x, t) = \alpha_n \frac{n\pi a}{c} \cos \left(\frac{n\pi at}{c} + \theta_n \right) \text{sen} \frac{n\pi x}{c},$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial t}(x, t) = \alpha_n \frac{n\pi}{c} \text{sen} \left(\frac{n\pi at}{c} + \theta_n \right) \cos \frac{n\pi x}{c}.$$

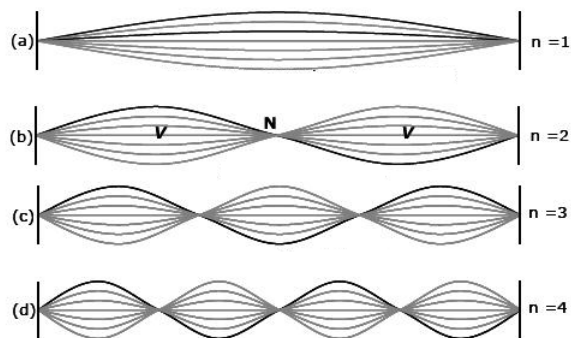


Figura 2: Modos normais de vibração nos quatro primeiros harmônicos de uma corda fixa nos extremos.

Usaremos as expressões (27) e (28) para calcularmos a energia de y_n

$$E_n = \frac{1}{2} \int_0^c \rho(x) \alpha_n^2 \frac{n^2 \pi^2 a^2}{c^2} \cos^2 \beta \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\pi x}{c} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^c \tau(x) \alpha_n^2 \frac{n^2 \pi^2}{c^2} \operatorname{sen}^2 \beta \cos^2 \left(\frac{n\pi x}{c} \right) dx,$$

onde $\beta_n = n\pi ac^{-1}t + \theta_n$. Fazendo a suposição de que ρ e τ são constantes, temos

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2}{4c} \alpha_n^2 (\rho a^2 \cos^2 \beta_n + \tau \operatorname{sen}^2 \beta_n)$$

fazendo $c^2 = \tau \rho^{-1}$, temos que

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2}{4c} \rho a^2 \alpha_n^2 = M \pi^2 \alpha_n^2 \omega_n^2, \quad (42)$$

onde $M = c\rho$ é a massa da corda, ω_n é a frequência do n -ésimo harmônico e α_n é a amplitude máxima desse harmônico.

A energia da corda é a soma das energias dos vários harmônicos (FIGUEIREDO, 1977). A energia E da corda é calculada por

$$E = \frac{1}{2} \int_0^c \rho [g(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^c \tau [f'(x)]^2 dx.$$

Utilizando as expressões (14) e (16) juntamente com as relações de ortogonalidade, tem-se

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \rho \frac{n^2 \pi^2 a^2}{c^2} b_n^2 \frac{c}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \tau \frac{n^2 \pi^2}{c^2} a_n^2 \frac{c}{2},$$

ou seja,

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{4c} \rho^2 a^2 \alpha_n^2,$$

mostrando que

$$E = \sum E_n.$$

Então, como foi mostrado, basta calcular a energia no instante $t = 0$, uma vez que a corda vibrante, com extremidades fixas, forma um sistema conservativo.

Conclusão

A Física Matemática se estende a praticamente todas as áreas da Física, se fazendo presente nas atividades cuja principal finalidade é a compreensão dos conteúdos físicos de modelos e teorias estudadas, gerando assim uma aproximação maior da Matemática com a Física.

As Séries de Fourier permitem a representação matemática de funções periódicas e é uma ferramenta matemática essencial para a resolução de problemas físicos. À vista disso, se tornou uma técnica muito poderosa com uma vasta aplicação em todos os campos da ciência.

Tomando como base o Método de Fourier, resolvemos com êxito o problema que propusemos a estudar, exibindo, de forma didática, a utilidade das teorias matemáticas aplicadas em problemas físicos, como e por que foram criadas. Tal análise mostrou-se de grande valia para melhor compreensão do estudo da equação da onda, pois utilizamos um certo grau de rigor matemático implicando diretamente na clareza de raciocínio, limpeza de premissas e argumentos.

Referências

BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1968.

FIGUEIREDO, D. G. de *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 1977.

MAIA, M. D. *Introdução aos Métodos da Física-Matemática*. Brasília: Editora UnB, 2000.

NUSSENZVEIG, H. M. *Física Básica - Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.