

Torre de Hanói nas aulas de Matemática: Contribuições para o ensino de progressão geométrica

Vanessa N. Oliveira¹, Rafaela de O. Alves¹, Rafael Pablo F. Cardoso¹, Breno Aparecido S. dos Reis¹, Ronaldo André Lopes^{2†}, Andréa Cardoso³, José Carlos de Souza Júnior³

¹ Universidade Federal de Alfenas; Instituto de Ciências Exatas; Discente do Curso de Matemática; Alfenas – Minas Gerais, Brasil.

² Universidade Federal de São Carlos; Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE); Discente do Doutorado em Educação e Professor da Educação Básica (SEE/MG); São Carlos – São Paulo, Brasil.

³ Universidade Federal de Alfenas; Instituto de Ciências Exatas; Docente do Departamento de Matemática; Alfenas – Minas Gerais, Brasil.

Resumo: A Torre de Hanói é um material manipulável que pode favorecer a aprendizagem de conteúdos matemáticos, incluindo sequências e progressão geométrica. O objetivo deste artigo é relatar os resultados de uma intervenção didática realizada na E.E. Samuel Engel, parceira no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) Matemática. Com o intuito de relacionar o jogo com progressões geométricas, os bolsistas realizaram uma atividade investigativa com estudantes do ensino médio, explorando os movimentos dos discos e possíveis padrões. Por meio de desafios em grupo, os estudantes foram incentivados a encontrar soluções com diferentes números de discos na Torre de Hanói. Observou-se que, nas cinco turmas, os estudantes identificaram padrões nos movimentos necessários para resolver o jogo através da exploração. Além disso, eles determinaram o número mínimo de movimentos e, em alguns casos, generalizaram matematicamente o cálculo para qualquer quantidade de discos, por meio de fórmulas e algoritmos. Em geral, os estudantes acolheram positivamente a abordagem investigativa, considerando-a mais interessante do que as aulas convencionais. Contudo, alguns grupos apresentaram dificuldades para formalizar o raciocínio e associar diretamente a Torre de Hanói às progressões geométricas, sendo auxiliados pelos bolsistas do PIBID. A intervenção, portanto, possibilitou aos estudantes estabelecerem conexões entre a teoria das progressões geométricas e o jogo, contribuindo para a consolidação do conteúdo. Destaca-se, assim, a importância de atividades que envolvam materiais manipuláveis, jogos e investigação matemática como impulsionadores do aprendizado no ensino médio.

Palavras-chave: Torre de Hanói; Jogos na Educação; Educação Matemática; Investigação Matemática.

Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) é um documento norteador que define as principais aprendizagens a serem desenvolvidas na Educação Básica, considerando todos os ciclos de ensino. Em seus objetivos, preconiza a promoção da igualdade, visando a formação integral do estudante, na busca por uma sociedade justa e inclusiva.

Para o Ensino Médio, a BNCC propõe um aprofundamento dos conteúdos abordados no Ensino Fundamental, com foco no *amadurecimento matemático*. O documento, ademais, prevê a integração da matemática à realidade dos estudantes, favorecendo a criticidade e a aplicação da matemática em situações do cotidiano. Em consonância com a BNCC, os estados brasileiros elaboraram currículos específicos, que abrangem as demandas locais, como é o

† Autor correspondente: ronaldo.lopes@sou.unifal-mg.edu.br

Manuscrito recebido em: 18/11/2024; Revisado em: 28/12/2024; Aceito em: 08/01/2025

caso do Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG) (Minas Gerais, 2020), que se apresenta como um currículo baseado em outros documentos oficiais e a partir do reconhecimento e valorização dos povos, culturas e tradições existentes no estado.

Com foco na formação integral do estudante, tais documentos destacam que, no contexto escolar, devem ocorrer pesquisas envolvendo conhecimentos já consolidados pelas ciências, possibilitando a vivência de procedimentos e o desenvolvimento de habilidades de investigação, construção de modelos e de resolução de problemas (Brasil, 2018).

Dentre as competências para o Ensino Médio, a BNCC e o CRMG apresentam na Competência Específica 5 a ideia de investigar e estabelecer conjecturas sobre diferentes conceitos e propriedades matemáticas, com recursos e estratégias que envolvem, por exemplo, a observação de padrões, dentre outros aspectos.

Neste contexto, destaca-se a habilidade EM13MAT508, cujo objetivo é identificar e associar sequências numéricas – progressões geométricas (PG) – a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (Brasil, 2018, p.533).

Tendo em vista a demanda escolar pela abordagem dessa competência e habilidade no ensino médio, realizamos uma intervenção envolvendo progressões geométricas, utilizando o material denominado Torre de Hanói, por meio da investigação matemática com turmas do 2º ano e 3º ano do ensino médio de uma escola pública. A ideia central, em concordância com os documentos oficiais, foi mobilizar os estudantes a raciocinar, representar, argumentar e validar conjecturas a respeito do tema abordado, com o aprendizado do conceito e dedução de fórmulas para representar progressões geométricas (Brasil, 2018, p. 519).

Para abordar a temática proposta, consideramos como principal tendência a investigação matemática, com a utilização de um cenário para investigação (Skovsmose, 2000). Essa abordagem favorece a descoberta e a exploração de materiais e conteúdos pelos estudantes, contribuindo diretamente para a compreensão dos temas abordados e contrapondo as aulas tradicionais de matemática, tendo o estudante como protagonista do processo de ensino e aprendizagem.

Tradicionalmente, o ensino de matemática tem sido desenvolvido por meio da metodologia do paradigma do exercício, que envolve a resolução de uma bateria de exercícios como processo central da aprendizagem. Neste caso, os estudantes são submetidos a diversos problemas, com diferentes níveis de complexidade progressiva. Assim, o professor apresenta exemplos, com regras e uma espécie de receita para a resolução. Posteriormente, o estudante apenas reproduz aquilo que foi dito pelo professor, de forma passiva, de modo exaustivo. Essa metodologia, ainda que apresente pontos positivos, como a memorização e fixação dos conteúdos, não deve ser a única utilizada em sala de aula, mas ainda predomina nas escolas de educação básica (Skovsmose, 2014).

Em alternativa ao paradigma do exercício, Skovsmose (2000) propõe os cenários para investigação, que é uma metodologia centrada no estudante. Nela, o estudante assume o protagonismo das aulas, de forma ativa, sendo desafiado a descobrir padrões, formular conjecturas e socializar suas ideias com a turma. Os cenários para investigação, além disso, favorecem a construção de argumentos matemáticos, a dedução de fórmulas e a visualização da aplicabilidade do conteúdo em um contexto real, por exemplo.

Nessa perspectiva, surge o seguinte questionamento: Como o uso da Torre de Hanói na abordagem de progressões geométricas por meio da investigação matemática pode favorecer a

compreensão desse conteúdo em turmas de 2º ano e 3º ano do ensino médio de uma escola pública? Para tanto, o objetivo deste trabalho é relatar os resultados de uma intervenção didática realizada na Escola Estadual Samuel Engel, parceira do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) Matemática.

O Programa PIBID e as aulas de matemática

O Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) representa uma iniciativa crucial no contexto da Política Nacional de Formação de Professores do Ministério da Educação, desempenhando um papel fundamental no aprimoramento da formação de docentes em nível superior e na elevação da qualidade da educação básica pública no Brasil. Seu objetivo central é promover a iniciação à docência, integrando a educação superior com a educação básica. O PIBID contribui para o aperfeiçoamento da formação de docentes em nível superior e para a melhoria da qualidade da educação básica pública brasileira. O programa visa facilitar a inserção dos discentes no cotidiano das escolas públicas durante a primeira metade dos cursos de licenciatura, concedendo bolsas aos licenciandos, professores da rede pública e professores das Instituições de Ensino Superior (IES). Essa sinergia entre teoria e prática, proporcionada pelo PIBID, fortalece não apenas a formação dos futuros professores, mas também impacta positivamente a educação básica por meio de ações colaborativas e experiências educacionais enriquecedoras (CAPES, 2023).

Na Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG), o PIBID se desdobra em diversos subprojetos que abrangem áreas como Matemática, Letras (Espanhol e Português), História, Ciências Biológicas, Ciências Sociais, Geografia, Física, Pedagogia e Química. Esses subprojetos visam não apenas aprimorar a formação dos licenciandos, mas também têm impacto significativo nas escolas da região sul mineira, atuando em municípios como Alfenas, Fama, Serrania, Poço Fundo, dentre outros. Especificamente no subprojeto de Matemática da UNIFAL-MG, a equipe de trabalho é composta dois coordenadores de área, dois professores supervisores de Matemática, além de dezesseis bolsistas de Iniciação à Docência (ID), divididos em dois grupos, cada um acompanhando um supervisor que leciona em uma escola parceira, sendo elas E. E. Samuel Engel e E. E. Professor Levindo Lambert, ambas situadas em Alfenas-MG. Cada grupo é responsável pelo planejamento e execução de intervenções, atividades e observações em sala de aula. Neste texto, iremos relatar uma experiência desenvolvida na escola parceira E. E. Samuel Engel, na qual os bolsistas de ID acompanharam turmas de Ensino Médio, sendo quatro do 2º ano, uma do 3º ano e uma turma do 1º ano, todas pertencentes ao Novo Ensino Médio, implementado desde 2022 em Minas Gerais.

A parceria entre a UNIFAL e as escolas é regida pelo edital 31/2022 publicado em 07/10/2022 e que teve sua vigência até março de 2024. Durante esse período, diversas ações colaborativas puderam ser realizadas, incluindo observações de aula, interações entre licenciandos, professores das escolas e professores da instituição de ensino superior. Essas

ações não apenas beneficiaram os estudantes das escolas, proporcionando-lhes experiências educacionais enriquecedoras, mas também enriqueceram a formação dos licenciandos, criando uma ponte sólida entre teoria e prática.

Considerando a percepção dos estudantes das escolas em relação ao PIBID e a visão dos discentes da UNIFAL sobre o programa, é relevante explorar a interação em sala de aula, a ocorrência de dúvidas e a participação em atividades diferenciadas. Posteriormente, buscou-se oferecer uma reflexão sobre como ambos os grupos percebem os benefícios do programa para o processo de aprendizagem e formação docente, proporcionando percepções valiosas sobre o impacto real do PIBID na educação básica e no desenvolvimento profissional dos futuros professores.

Cenários para investigação nas aulas de matemática

Segundo Skovsmose (2000), a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício, marcada pelo papel central do professor, que apresenta ideias e técnicas matemáticas para resolução de problemas sobre determinado conteúdo. Depois, são exibidos alguns exemplos e, em seguida, os estudantes solucionam vários exercícios, comumente retirados do livro didático ou apostila. Em geral, os estudantes aceitam os dados dos exercícios sem questioná-los e as informações do enunciado são suficientes para a resolução.

Já os cenários para investigação se apresentam como uma metodologia em que os estudantes são convidados a explorar e argumentarem sobre o conteúdo. Trata-se de um espaço para dialogar e, por vezes, trabalhar em equipe, conjecturando sobre o tema proposto pelo professor. Nele, os estudantes formulam questões e buscam explicação para determinados resultados. Tal convite pode ser simbolizado por perguntas como “o que acontecerá se...”? e o aceite ao convite é demonstrado na fala dos estudantes pelo “sim, acontece isso se...” (Skovsmose, 2000, p. 6). Por exemplo, no uso da Torre de Hanói, o professor pode perguntar: “O que acontece se movermos os discos da torre para a esquerda? Será que utilizaremos um número menor de movimentos?” O aceite ao convite do professor pode ser os estudantes tentando manipular o material para descobrir o número de movimentos, dizendo quantos movimentos fizeram, ou respostas orais, como: “Sim, professor, vamos tentar.”

Claramente, em um contexto de sala de aula, não há apenas uma metodologia correta ou adequada. Assim, não pretendemos esgotar as possibilidades metodológicas neste texto, mas apresentar uma intervenção didática envolvendo investigação matemática e que obteve êxito em sua execução.

Nesta direção, Skovsmose (2000) destaca a formação de seis diferentes ambientes de aprendizagem, que envolvem o paradigma do exercício e cenários para investigação. Para tal, considera que existem três diferentes tipos de referência existentes, com atividades que fazem referência à matemática pura, à semi-realidade, e à situação da vida real. Os ambientes de aprendizagem são exibidos na Quadro 1:

Quadro 1: Ambientes de aprendizagem

	Paradigma do exercício	Cenário para investigação
Referências à matemática pura	1	2
Referências à semi-realidade	3	4
Referências à realidade	5	6

Fonte: Skovsmose (2000).

Os ambientes de aprendizagem descritos possuem características específicas, que podem ser exemplificados da seguinte forma:

Os ambientes de aprendizagem 1 e 2 se referem à matemática pura. O ambiente 1, com atividades voltadas para o paradigma do exercício, diz respeito a exercícios de aplicação dos conceitos e nenhum tipo de contexto, sendo exemplificados por atividades para efetuar operações algébricas, calcular e qualquer outro tipo de atividade que não exija nada além da matemática pura. Por outro lado, mesmo tendo a mesma referência, as atividades que representam o ambiente 2 também tem como objetivo a aplicação de conceitos, porém de forma investigativa, em que a aplicação não é direta. Como exemplo, podemos citar a identificação de padrões e propriedades da multiplicação, como a comutatividade, em uma Tabela Pitagórica, que se trata de uma diferente representação da tabuada ou ainda uma atividade de investigação de relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo usando o Teorema de Pitágoras e o seno, cosseno e tangente.

Os ambientes 3 e 4 fazem referência à semi-realidade, que é caracterizada por uma simulação da realidade. No ambiente 3, as atividades são contextualizadas nessa “realidade artificial” mas ainda sem o objetivo de compreender e questionar esse contexto, como, por exemplo, problemas que apresentam dados que não são possíveis na realidade, apenas para que sejam identificados e utilizados pelo aluno, como, por exemplo, em resoluções de problemas hipotéticos, em que os dados não são questionados. Em cenários para investigação no ambiente 4, são realizadas atividades também não reais, mas investigativas, que levam o aluno a questionar e compreender esse contexto, de maneira a abrir espaço para maiores discussões. Exemplos de atividades desse ambiente são problemas em que são necessários a elaboração de conjecturas, inferências e explorações da semi-realidade pelos alunos.

Por fim, os ambientes 5 e 6 se referem à realidade. Dessa forma, em atividades do ambiente 5, são utilizadas situações-problema com dados reais, mas sem nenhuma discussão sobre esses dados, sendo o objetivo aplicar conceitos com dados da realidade, como em dados estatísticos de órgãos de pesquisas por amostragem. Já os cenários para investigação no ambiente 6 são atividades investigativas em contextos reais, que podem ser realizados através do trabalho com projetos, que levam o aluno a investigar. Diferentemente do ambiente 5, um exemplo de atividade é também utilizando dados estatísticos, porém observados e realizados pelos próprios alunos, aplicando os conceitos matemáticos planejados pelo professor e outros

necessários. Atividades desse ambiente levam maior envolvimento dos estudantes e um tempo maior de execução.

Metodologia

Com a presença do PIBID-Matemática na Escola Estadual Samuel Engel, o professor supervisor apresentou a demanda de abordar o conteúdo de progressão geométrica (PG) com turmas do 2º ano e 3º ano do ensino médio. Com isso, organizamos uma intervenção didática envolvendo o tema, considerando como pressupostos a BNCC (Brasil, 2018) e o Currículo Referência de Minas Gerais (Minas Gerais, 2020). Adotamos como metodologia os cenários para investigação de Ole Skovsmose (2000), que envolve a tendência de investigação matemática.

A atividade foi desenvolvida por quatro bolsistas do subprojeto de Matemática da Universidade Federal de Alfenas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), que tem como escola parceira a Escola Estadual Samuel Engel, em Alfenas, Minas Gerais. O planejamento das intervenções realizadas na escola fez parte de reuniões entre o professor supervisor e os bolsistas de iniciação à docência, que juntos discutiram o processo de construção e execução das atividades visando promover o contato com a docência, favorecer a aplicação e a reflexão sobre as experiências vivenciadas na universidade em um contexto escolar.

Participaram da atividade três turmas do 2º ano e uma turma do 3º ano, envolvendo aproximadamente 140 estudantes. Todas as turmas tiveram contato com as progressões aritméticas anteriormente, mas nem todas as turmas tinham conhecimento sobre as progressões geométricas (PG). Com a intenção de realizar uma atividade dinâmica, com maior interação dos estudantes e visualização das progressões geométricas na prática, optou-se por utilizar o material manipulável conhecido como Torre de Hanói.

A Torre de Hanói é um material manipulável baseado em uma lenda indiana e criado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883. A lenda em que o jogo se apoia diz que, durante a criação do mundo havia uma bandeja com três agulhas de diamante fixadas e Deus colocou 64 discos de ouro puro, de tamanhos cada vez menores, sobre uma das agulhas, sendo que todos estavam dispostos em ordem crescente. Após dispor os discos, os sacerdotes seguiam as leis imutáveis de Brahma, que estabelecia que o sacerdote do turno não poderia mover mais de um disco por vez, e que o disco fosse colocado na outra agulha, de maneira que o de baixo nunca fosse menor do que o de cima. Quando todos os 64 discos tivessem sido transferidos da agulha colocada por Deus no dia da Criação para outra agulha, o mundo deixaria de existir (COSTA, 2010).

Desta forma, com base na lenda, as regras do jogo são iguais, isto é, só se pode mover um disco de cada vez para outra haste, um maior nunca pode sobrepor um menor e o jogo se encerra quando todos os discos iniciais estiverem em uma haste diferente da inicial, destacamos que o número de discos pode variar conforme o objetivo. A partir disso, utilizamos o material manipulável conforme a Figura 1 para realizar a intervenção didática:

Figura 1: Torre de Hanói.



Fonte: dos autores (2025).

Para o planejamento da intervenção foi criado pelos bolsistas um plano de aula baseado em Costa (2010), em que o autor relata sua experiência de utilização da Torre de Hanói em uma escola no sul do país. No plano de aula, os bolsistas planejaram em conjunto cada parte da aplicação, destacando os principais pontos, tem-se: Objetivos, Habilidades, Desenvolvimento e Anexos. Como objetivo central da intervenção, pretendia-se que os estudantes relacionassem o menor número de movimentos da Torre de Hanói com a ideia de progressão geométrica, generalizando os resultados. Na ocasião, uma bolsista ficou responsável por realizar anotações durante a intervenção, incluindo os acertos, erros e os comentários dos alunos, para uma análise específica dos resultados da atividade.

A atividade foi pensada e aplicada para uma aula de 50 minutos em cada turma, com o seguinte desenvolvimento: a sala foi dividida em grupos de 4 a 5 pessoas, e no primeiro momento os alunos tinham o desafio de passar os 5 discos de uma haste para outra. Caso não conseguissem, o número seria reduzido para 4 discos, mantendo o desafio. Ao concluírem, os grupos foram premiados com brindes elaborados pela equipe. Nesse primeiro momento, o objetivo foi permitir que os alunos observassem como funcionava o jogo proposto e a Torre de Hanói, se existiam estratégias para completar o desafio, sem se importar com o menor número de movimentos. Em seguida, foi entregue o caderno de acompanhamento (Figura 2) para auxiliar na exploração do menor número de movimentos possíveis, também denominado como desafio, em que os alunos teriam que colocar os resultados do “seu menor número de movimentos” e, posteriormente, verificar se acertaram ou não. Nesse momento, os bolsistas induziram o questionamento da existência de um padrão nos resultados encontrados, e caso existisse, que fosse registrado na coluna “raciocínio”. Para além da exploração do material na primeira etapa, nesta segunda etapa, o objetivo era realizar uma investigação matemática conforme propõe Skovsmose (2000). Por fim, haveria uma socialização dos resultados, e com a tabela montada, os bolsistas apresentariam uma possível solução. Caso os alunos não tivessem detectado o padrão, mostraria-se a fórmula geral do menor número de movimentos, relacionando com Progressão Geométrica (PG).

Figura 2: Caderno de acompanhamento

Torre de Hanoi

História:

A criação da Torre de Hanoi foi inspirada por uma lenda Hindu, a qual falava de um templo em Benares, cidade Santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo, cuja função era melhorar a disciplina mental dos jovens monges. De acordo com a lenda, no grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante. Em uma dessas hastes, o deus Brama, no momento da criação do mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo. A atribuição que os monges receberam foi de transferir a torre formada pelos discos, de uma haste para outra, usando a terceira como auxiliar com as restrições de movimentar um disco por vez e de nunca colocar um disco maior sobre um menor. Os monges deveriam trabalhar com eficiência noite e dia e, quando terminassem o trabalho, o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria.

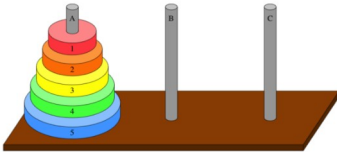
Fonte: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre_de_hanoi.pdf

Peças do Jogo:

- 3 pilares de madeira fixos em uma plataforma;
- 6 discos de madeira de tamanhos diferentes, formando uma torre;

Regras do Jogo:

- Não deve sobrepor um disco maior sobre o menor
- Deve-se mover um disco de cada vez
- O objetivo será colocar toda a torre em um dos extremos A ou C



Para a realização da atividade, utilize a tabela seguinte para organizar as suas investigações e encontrar uma possível fórmula para a quantidade mínima de movimentos para completar o jogo.

Nº de discos	Seu nº de movimentos	Nº mínimo de movimentos	Raciocínio

Fonte: dos autores (2025).

Resultados e Discussões

Os resultados obtidos durante a intervenção revelaram uma recepção positiva por parte dos estudantes em relação à abordagem investigativa, sendo percebida como mais cativante em comparação às aulas tradicionais. Este resultado corrobora o estudo de Lopes e Ferreira

(2024), em que os autores identificaram maior atratividade e participação dos estudantes ao propor aulas com materiais manipuláveis para o ensino de matemática.

No que diz respeito à participação e engajamento dos estudantes, foram exploradas durante o planejamento e aplicação das atividades em sala de aula atividades envolvendo competição entre grupos de alunos em sala de aula. Com esse incentivo, de investigação envolvendo um pouco de competição, foi possível fazer com que mais alunos participassem, envolvendo também aqueles que normalmente não concluem as atividades das aulas que seguem o modelo “tradicional” de aulas de matemática, que Skovsmose (2000) denomina como paradigma do exercício.

Dessa forma, no planejamento envolvendo a Torre de Hanói, foi proposto que a primeira etapa da atividade já trouxesse a competição como atrativo para o restante da atividade, que demandava as investigações além da manipulação do material. A partir do interesse dos alunos, foi possível que eles entendessem a ideia e as regras do jogo, o que auxiliou na execução dos outros desafios propostos, que envolviam manipulação para investigação para a identificação de padrões.

Para que fosse possível a investigação matemática, foi necessário que, em alguns momentos houvesse a intervenção dos bolsistas de modo a incentivar a investigação e o “aceite do convite”. Dessa forma, para o desafio sobre o menor número de movimentos, os alunos eram questionados: “será que esse é o menor número de movimentos?”, “como vocês chegaram a esse resultado?” e, a partir disso, era possível fazer com que eles pensassem na busca de um raciocínio para uma quantidade qualquer de discos, sendo então os alunos questionados: “o que acontece se o número de discos for par? E ímpar?”, “existe um padrão?”, “como você escreveria esse raciocínio usando a matemática?”, “existe uma fórmula?”, “com qual conteúdo isso se relaciona?”. Todas essas perguntas fizeram parte da intervenção dos professores (nesse caso, dos bolsistas do programa) para que os alunos investigassem e chegassem mais perto possível do resultado esperado.

Em alguns casos foi necessária uma maior intervenção, o que aconteceu em algumas turmas na identificação da quantidade de movimentos mínimos, em que uma das bolsistas ensinou uma estratégia do jogo que relaciona a paridade do número de peças com o próximo movimento que deve ser feito. Entretanto, isso não impediu a investigação matemática, pois em todas as turmas houve aceite ao convite e os estudantes se engajaram na busca por resultados. A partir das investigações feitas, muitos grupos conseguiram chegar a uma fórmula para encontrar o número mínimo de movimentos. Em média, 100 estudantes, ou seja, cerca de 20 grupos, alcançaram êxito na busca por uma fórmula que descrevesse os resultados encontrados.

Para realizar a formalização dos resultados, consideramos importante que os alunos compreendessem a proposta, para além de uma atividade focada apenas na matemática. Isso porque, em atividades desse tipo, é comum que os alunos apresentem dificuldades em “traduzir” seus pensamentos para a linguagem algébrica. Assim, ainda que os alunos entendam a proposta e formalizem verbalmente os resultados encontrados, fez-se necessária a apresentação de uma fórmula, que descrevesse o resultado obtido, já que essa era parte da proposta da atividade.

Com intuito de manter a investigação matemática e potencializar a busca por uma fórmula, questionamos os alunos sobre possíveis letras que utilizariam para representar o número de discos e os seus resultados. Os alunos optaram por utilizar n para o número de discos e A_n para o resultado obtido. Com isso, ficou mais fácil “traduzir” o pensamento dos estudantes para a linguagem algébrica. A partir dessa experiência, seria interessante que os alunos tivessem aulas sobre Algoritmos, de modo que esse pensamento algébrico pudesse ser explorado em outros problemas. Essa é uma sugestão para novas abordagens dessa temática em sala de aula.

Após o auxílio dos bolsistas na organização do raciocínio de cada grupo, comumente, as fórmulas eram relacionadas ao resultado anterior, como por exemplo a fórmula $2A_{n-1} + 1$ onde n representa o número de discos e A_{n-1} o resultado obtido no número de discos anterior. O grande empecilho desta fórmula é justamente o fato de ser necessário sempre saber o resultado anterior para obter um novo, sendo isto um problema para quando se tem um número maior de discos. Porém, com o auxílio e incentivo dos bolsistas os alunos chegaram na fórmula geral que envolve um número n de discos, sendo $2^n - 1$.

Apesar da maioria dos grupos terem chegado a uma fórmula que representa o número mínimo de movimentos, foi possível observar a dificuldade em generalizar o pensamento matemático ou encontrar um padrão entre os discos. Além disso, o fato de tentarem encontrar este número a partir da exploração também dificultou a identificação de um padrão, já que na maioria dos casos chegavam a um número incorreto. Com isso, após os alunos tentarem efetuar esta parte do desafio, os bolsistas auxiliaram a partir da exploração em conjunto o encontro do número correto.

Mesmo com a ajuda dos bolsistas é notória a dificuldade dos alunos em escrever matematicamente o raciocínio e que, na maioria das vezes, a fórmula do menor número de movimentos vinha da socialização e um aluno ou um grupo se destacava em ajudar os bolsistas na construção da fórmula. Em geral, a fórmula encontrada foi: $2(n-1) + 1$; e mesmo chegando nessa fórmula, os bolsistas apresentavam a fórmula $2^n - 1$ que também pode ser relacionada ao menor número de movimentos.

Com isso, percebeu-se mais uma dificuldade dos estudantes, o conteúdo de potência. Em uma das anotações de um bolsista, um comentário destacado foi que “ $2^3=12$ ”, não só isso, mas em três salas foi necessário que os bolsistas voltassem no conceito de potência para ajudá-los a entender o motivo das fórmulas encontradas estavam corretas. Isso reforça a importância de que mais atividades sejam realizadas com estudantes do ensino médio, de forma que abordem conceitos matemáticos que serão amplamente utilizados no ensino superior. De modo geral, as dificuldades com matemática básica têm persistido e aparecem, também, no ensino superior, o que pode acarretar em dificuldades e reprovações futuras em disciplinas de graduação, ou ainda, na atuação profissional destes estudantes (Lopes; Queiroz, 2024).

A intervenção desempenhou um papel significativo na capacitação dos estudantes para estabelecerem ligações entre a teoria das progressões geométricas e o desafio apresentado pelo jogo da Torre de Hanói. Este enlace entre a prática lúdica e conceitos matemáticos contribuiu para a consolidação do conteúdo, evidenciando a eficácia da abordagem de Skovsmose (2000). Além disso, esses resultados sugerem que atividades envolvendo elementos práticos e lúdicos não apenas despertam o interesse dos alunos, mas também facilitam a compreensão e aplicação de conceitos matemáticos complexos. Portanto,

recomenda-se a continuidade e a ampliação de práticas pedagógicas similares, visando promover uma aprendizagem mais envolvente e efetiva no âmbito do ensino médio.

Visto que os alunos apresentam dificuldades com o conteúdo matemático, podemos observar por outros parâmetros os exercícios feitos em sala. Além da aprendizagem da matemática como ciência, podemos perceber como a educação matemática pode ser representada de forma mais significativa, reflexiva, engajada e socialmente ativa, como propõe Skovsmose (2014). Como a atividade se diferenciou do padrão tradicional de ensino, ela integrou os alunos que possuem desinteresse e dificuldade, pois motivou-os a resolverem o jogo e a interagirem socialmente, tornando a aprendizagem mais sólida e significativa.

Em relação à atuação dos bolsistas de iniciação à docência, destacamos que a execução de atividades como essa favorece o aprendizado e formação inicial, potencializando a didática e reconhecimento da sala de aula como um espaço de atuação futura. Enquanto professores de matemática em formação, o PIBID e o contato com a sala de aula, se apresentaram como oportunidades de desenvolvimento pessoal e familiaridade com o ensino de matemática, com novas metodologias de ensino e o contato direto com docentes e estudantes.

Considerações finais

A utilização da Torre de Hanói numa intervenção didática por meio de uma investigação matemática demonstrou ser uma abordagem eficaz para melhorar a aprendizagem de conteúdos matemáticos, especificamente progressões, no contexto do ensino médio. Dessa forma, foi possível identificar que houve maior interesse e participação por parte dos alunos, se comparado com as atividades rotineiras, que tem como principal característica a repetição de exercícios, ou seja, o paradigma do exercício. Além disso, os cenários para investigação possibilitaram para os professores em formação explorarem uma atividade não usual, aumentando, assim, o repertório em metodologias de ensino e alinhando a teoria com a prática em sala de aula.

Em consonância, a execução do PIBID nas escolas públicas têm apresentado um impacto importante no ensino e aprendizagem, pois com a participação de professores em formação é possível explorar aspectos atuais da educação e das metodologias de ensino. Outro aspecto importante que podemos observar é a proximidade dos alunos, pois tais atividades possibilitam um maior interesse no ensino e o contato com a realidade dos estudantes de graduação.

Além disso, consideramos importante a realização de outras atividades baseadas nos cenários para investigação e/ou a utilização de materiais manipuláveis, como potencializadoras para uma aprendizagem significativa de conteúdos matemáticos e como alternativa ao paradigma do exercício de modelos tradicionais.

Em oportunidades futuras, esperamos que os estudantes de graduação, juntamente aos professores supervisores atuantes nas escolas e aos docentes da universidade, realizem outras atividades com materiais manipuláveis e com abordagens que envolvam a investigação matemática. Assim, com um maior repertório de atividades e a abordagem de outros conteúdos matemáticos em sala de aula, será possível investigar os desdobramentos e avanços

em relação ao aprendizado matemático dos estudantes com o uso de diferentes metodologias e atividades.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CAPES. PIBID. 2023. Disponível em: <<https://www.gov.br/capes/pt-br/aceso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/pibid/pibid>>. Acesso em: 11 jan. 2024

COSTA, A. Torre de Hanói, uma proposta de atividade para o ensino médio. In: XVI Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul. **Anais [EREMATSUL]**, Porto Alegre: EdiPUCRS, 2010. Disponível em: Acesso em: 18 ago. 2023.

LOPES, R. A.; FERREIRA, J. C. O que pode o Triângulo de Sierpinski em salas de aula do Novo Ensino Médio? **SIGMAE**, v. 13, p. 1-21, 2024.

LOPES, R. A.; QUEIROZ, C. R. O. Q. Influências e desdobramentos da monitoria acadêmica em disciplinas de Matemática em uma universidade federal: um olhar para as percepções dos estudantes. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 10, p. e2001, 2024.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais - CRMG**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/curriculos_estados/documento_curricular_mg.pdf. Acesso em: 04 jan. 2024.

PIBID - PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSA DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA. **gov.br**, 2013. Disponível em: <https://www.gov.br/capes/pt-br/aceso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/pibid/pibid>. Acesso em: 11 jan. 2024

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. v.13. Rio Claro: **Bolema**, 2000. [1]

SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**. Brasil: Papyrus Editora, 2014.