

## Uma possibilidade de discussões sobre o Teorema Fundamental da Álgebra em disciplinas de Cálculo de Várias Variáveis

Marcílio José Dantas Santos<sup>1</sup>, José Claudinei Ferreira<sup>2†</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal de Alfenas; Curso de Especialização em Educação Matemática na Contemporaneidade; Alfenas – Minas Gerais, Brasil.

<sup>2</sup> Universidade Federal de Alfenas; Instituto de Ciências Exatas; Departamento de Matemática; Alfenas – Minas Gerais, Brasil.

**Resumo:** O Teorema Fundamental da Álgebra é de significativa importância na Matemática, seja na formação de professores ou em programas de graduação, bem como no ensino de Matemática nos níveis fundamental e médio. Esse resultado garante que todo polinômio não constante com coeficientes complexos tenha uma raiz complexa. No entanto, não é comum que tal resultado, ou sua demonstração, esteja presente em cursos de programas de formação de professores de Matemática. Por esse motivo, propomos uma abordagem para incluir esse tópico em discussões ao lado de conceitos abordados em cursos de Cálculo Multivariável, para incentivar a apresentação desse resultado e ampliar o repertório cultural dos envolvidos, sem a necessidade de alterar os programas dos cursos. Em particular, a ideia envolve analisar polinômios complexos por meio de funções reais de duas variáveis e curvas de nível para demonstrar graficamente a existência das raízes.

**Palavras-chave:** Equações polinomiais; Ensino de Cálculo; Repertório cultural de professores

### The Fundamental Theorem of Algebra for Calculus of Several Variables

**Abstract:** The Fundamental Theorem of Algebra is of significant importance in mathematics, whether in teacher training or undergraduate programs, as well as in mathematics teaching at the elementary and secondary levels. This result guarantees that every non-constant polynomial with complex coefficients has a complex root. However, it is not common for such a result, or its proof, to be present in courses in mathematics teacher training programs. For this reason, we propose an approach to include this topic in discussions alongside concepts covered in Multivariable Calculus courses, to encourage the presentation of this result and to expand the cultural repertoire of those involved, without the need to change the course syllabi. In particular, the idea involves analyzing complex polynomials by means of real functions of two variables and level curves to demonstrate graphically the existence of the roots.

**Keywords:** Polynomial equations; Teaching Calculus; Cultural repertoire of teachers Alfenas, 2024.

---

† Autor correspondente: [jose.ferreira@unifal-mg.edu.br](mailto:jose.ferreira@unifal-mg.edu.br)

Manuscrito recebido em: 25/10/2024

Manuscrito revisado em: 11/12/2024

Manuscrito aceito em: 13/12/2024

## Introdução

Este trabalho é uma continuação ou uma versão do trabalho anterior (FERREIRA, 2021). Vamos resumir a teoria sobre as equações polinomiais, buscando responder duas perguntas fundamentais. Dada uma equação polinomial: Como podemos encontrar uma raiz para essa equação (ou seja, se existem fórmulas resolutivas)? E será que toda equação polinomial possui solução? Essas questões têm sido objeto de estudo por diversos matemáticos ao longo da história, levando a desenvolvimentos significativos na Matemática.

A busca por fórmulas resolutivas, especialmente para equações de grau superior, resultou em descobertas notáveis, como as fórmulas de Bhaskara para equações quadráticas e os métodos de Newton e Lagrange para graus mais altos (muitos resultados são descritos em Ferreira (2020); Ferreira e Silva (2019); Laubenbacher; McGrath e Pengelley (2001), por exemplo). Além disso, a investigação sobre a existência de soluções levou à formulação do Teorema Fundamental da Álgebra, que garante que toda equação polinomial de grau  $n$  possui exatamente  $n$  raízes, contando com multiplicidades, no conjunto dos números complexos. Essas questões moldaram a teoria dos polinômios e influenciaram outras áreas da Matemática, como a teoria dos números e a análise complexa. A compreensão das raízes das equações polinomiais é essencial para a resolução de problemas em áreas como física, engenharia e ciências computacionais, tornando esse tema um pilar central na formação Matemática de qualquer estudante. Por este motivo, acreditamos que o tema deve surgir em discussões durante a formação de docentes, mesmo que não esteja explícito da dinâmica do curso, seguindo a linha de que é possível tratarmos de diversos temas em uma disciplina, sem alterar sua ementa, conforme proposto por Júlio e Ferreira (2018).

A maioria das demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra (usaremos TFA para nos referir ao teorema) apresentadas nos cursos de bacharelado em Matemática decorre facilmente do Teorema de Liouville. Por outro lado, para entender o Teorema de Liouville, o aluno precisa ter cursado uma disciplina de análise complexa ou funções analíticas, como preferirem chamar. É importante ressaltar que, embora o TFA seja um tema obrigatório no ensino médio, muitos professores de Matemática nunca tiveram a oportunidade de ver, durante seus cursos de licenciatura, uma demonstração desse resultado fundamental. Isso pode levar a uma lacuna no repertório cultural do professor e refletir no ensino, dificultando a compreensão mais profunda do assunto. De fato, a ideia e a demonstração que serão apresentadas aqui são baseadas essencialmente nas noções de continuidade, máximos e mínimos de funções; conceitos que são fundamentais para diversas áreas da Matemática e suas aplicações, que estão presentes na ementa das disciplinas de Cálculo. Essa conexão entre os teoremas e os conceitos básicos é crucial para formar uma base sólida para os estudantes, permitindo-lhes explorar tópicos mais avançados com confiança e clareza.

Ao iniciar a discussão sobre álgebra, antes mesmo dos cursos de graduação, é fundamental abordar os polinômios, pois eles constituem um conceito básico para o estudo das disciplinas na área de exatas, especialmente álgebra e cálculo. Além disso, alguns resultados, mesmo aqueles estudados no ensino médio, são de suma importância para o desenvolvimento do discente ao longo do curso. Por exemplo, o uso de polinômios é importante para determinar autovalores em álgebra linear e para lidar com limites em cálculo, utilizando a fatoração para eliminar indeterminações, entre outras aplicações. Ademais, a compreensão dos polinômios permite que os alunos desenvolvam habilidades analíticas e de resolução de problemas, são cruciais em várias áreas da Matemática e suas aplicações práticas. O domínio desses conceitos facilita a transição para tópicos mais avançados e proporciona uma base sólida para a compreensão de fenômenos em diversas áreas. Portanto, enfatizar a importância dos polinômios desde o início do aprendizado é um passo

estratégico para preparar os alunos para os desafios acadêmicos futuros.

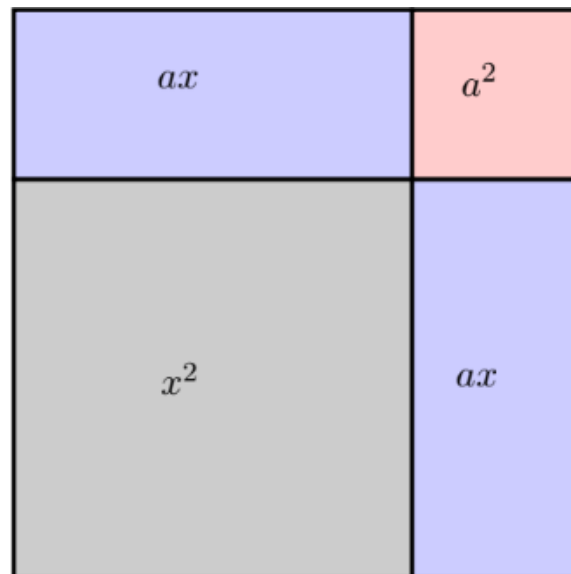
O trabalho está organizado da seguinte forma: Na Seção de Considerações históricas, fazemos uma breve revisão histórica sobre a busca por resultados sobre equações polinomiais. Na Seção de Polinômios complexos e funções reais de duas variáveis, exploramos a interessante conexão entre o TFA e o cálculo de várias variáveis, especialmente no que diz respeito às curvas de nível e aos gráficos. Por meio dessas representações, podemos ter uma noção das possíveis raízes para um polinômio, quando vemos esses polinômios por meio de funções reais de duas variáveis.

Na seção de apresentação de uma demonstração para o TFA, buscamos ilustrar os conceitos envolvi dos por meio de exemplos que envolvem o cálculo de várias variáveis, visando uma compreensão mais profunda da relação entre esses temas. Essa abordagem reforça a importância do TFA e também enriquece a formação discente e docente, conectando diferentes áreas do conhecimento matemático e suas aplicações.

## Considerações históricas

Conforme relatado por Endler (1987) e Dantas (2024), basicamente, os hindus (e os gregos) resolviam as equações quadráticas pelo método do completamento de quadrados, que surgiu de argumento geométrico envolvendo o conceito de área, conforme a Figura 1, deste modo unificando a resolução algébrica destas equações e com geometria (veja também Ben-Ari, 2023).

Figure 1: Geometric interpretation of the identity  $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$



Source: from the authors (2024).

Esse método permite, por exemplo, escrever a equação  $2x^2 + 12x + 6 = 0$  como

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x + 6 &= 2(x^2 + 6x + 3) \\ &= 2((x^2 + 2 \times 3x + 9) - 9 + 3) \\ &= 2((x + 3)^2 - 6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

O que nos diz que  $(x + 3)^2 - 6 = 0$ , ou que  $(x + 3)^2 = 6$ .

Tal método foi registrado por Bhaskara Acharya (1114-1185), em sua obra *Lilavati* e, por

isso, a fórmula resolvente da equação do segundo grau leva o nome de Fórmula de Bhaskara. Devemos ressaltar que a forma geral da equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ , que conhecemos atualmente, é atribuída ao matemático francês François Viète (1540-1603), que introduziu o uso de letras para representar quantidades desconhecidas e sinais para representar algumas operações.

Cerca de cinco séculos após o registro da solução da equação quadrática, no século XI, durante o florescimento comercial dos italianos no século XVI, um marco significativo na Matemática foi a descoberta da solução algébrica para as equações de graus 3 e 4, por matemáticos locais. Este avanço começou em 1494, quando Fra Luca Pacioli (1445-1517), em sua obra *Summa de Arithmetica*, afirmou que os matemáticos da época não eram capazes de resolver uma equação de grau 3 utilizando métodos algébricos. Essa afirmação impulsionou um movimento entre matemáticos italianos, como Niccolò Tartaglia e Gerolamo Cardano, que, por meio de intensas pesquisas e colaborações, conseguiram desenvolver métodos para resolver essas equações, estabelecendo as bases para a Álgebra moderna. A busca por soluções algébricas ampliou o conhecimento matemático e também influenciou profundamente o desenvolvimento de técnicas que seriam fundamentais para a matemática nos séculos seguintes.

De acordo com Endler (1987) e Dantas (2024), por volta de 1506, Scipione del Ferro (1465 - 1526) resolveu algebricamente a equação

$$x^3 + px + q = 0, \quad (1)$$

baseando-se provavelmente na Matemática árabe e hindu.

Essa forma de resolução também usa, de certa forma, um argumento geométrico, o qual é o complemento de cubos: supondo que  $x = r + s$  obtemos que

$$x^3 = (r + s)^3 = (r + s)^2(r + s) = r^3 + s^3 + 3r^2s + 3rs^2 = r^3 + s^3 + 3rs(r + s) = r^3 + s^3 + 3rsx.$$

Então,

$$x^3 - 3rsx - (r^3 + s^3) = 0,$$

e a Equação (1) nos diz que

$$\begin{cases} r^3 + s^3 & = -q \\ 3rs & = -p \end{cases}$$

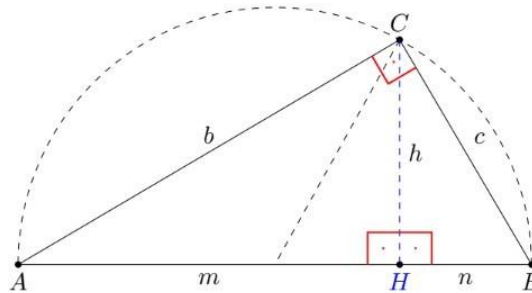
ou que

$$\begin{cases} m + n & = -q \\ mn & = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \quad (2)$$

para  $m = r^3$  e  $n = s^3$ , que são soluções da equação do segundo grau

$$(z - m)(z - n) = z^2 - (m + n)z + mn = z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (3)$$

Ainda, quando  $m$  e  $n$  forem positivos, temos uma interpretação geométrica, conforme a Figura 2.

Figure 2: Metric relationships in the right triangle  $ABC$ :  $m+n=am + n = a$  and  $h^2=mn$  and  $h^2 = mn$ .

Source: from the authors (2024).

Apesar de não ter publicado sua descoberta, Scipione revelou seu segredo ao seu discípulo, Antonio Maria Fior. Vinte anos após esta descoberta, Nicolo Fontana de Brescia (1499-1557), mais conhecido como Tartaglia, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a Equação (1). Desconfiado, Fior o desafiou para um duelo em público, envolvendo a resolução de equações de grau 3. Restando poucos dias para o duelo, Tartaglia descobriu também o método de resolução de equações de grau 3 da forma  $ax^3+bx^2+cx+d=0$ , fazendo a transformação  $x = z - \frac{b}{3a}$ , obtendo uma equação da forma (1). Sabendo desse grande feito, o matemático e também médico Girolamo Cardano (1501-1576) jurou sigilo absoluto para que Tartaglia lhe revelasse este segredo (era comum entre os matemáticos da época, guardar para si as descobertas, utilizando-as em disputas públicas).

Aproveitando-se desse fato, Cardano publicou a fórmula em sua *Ars Magna* em 1545. Apesar de mencionar que a descoberta era de Tartaglia, este ficou indignado com a traição, pois reservava a descoberta para publicar um tratado sobre equações de grau 3.

Já Lodovico Ferrari (1522-1565) usou argumentos envolvendo completamento de quadrados para resolver equações de grau 4, usando também o já conhecido método para a resolução de equações de grau 3 (veja detalhes em Endler, 1987).

Em 1560, passados alguns anos do falecimento de Cardano, Rafael Bombelli (1526 - 1573) escreveu sua “Álgebra”, que só foi impresso em 1572, de notável contribuição às equações de grau 3, no âmbito das soluções. Em seu livro, Bombelli utilizou as mesmas regras sobre números reais, para manipular as raízes de números negativos (números complexos imaginários), acabando com o desconforto que os matemáticos da época tinham ao se depararem com os números da forma  $z = x + y\sqrt{-1}$ , ao definir o número  $i = \sqrt{-1}$ .

Observação 1. Se considerarmos  $\theta = 20^\circ$  e  $x = \cos(\theta)$ , vamos ter que

$$\frac{1}{2} = \cos(3\theta) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) = 4x^3 - 3x,$$

ou que

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0. \quad (4)$$

Segue das expressões (2) e (3) que a equação do segundo grau relacionada é

$$z^2 + \frac{1}{8}z - \frac{1}{4^3} = 0,$$

que tem como raízes,

$$m = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i = \frac{1}{8}(\cos(60^\circ) + i \operatorname{sen}(60^\circ)), \quad n = \frac{1}{16} - \frac{\sqrt{3}}{16}i = \frac{1}{8}(\cos(60^\circ) - i \operatorname{sen}(60^\circ)).$$

Você pode checar que

$$x_1 = \cos(20^\circ) = \sqrt[3]{\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{3}}{16}i}$$

é uma das três raízes da Equação (4) e que todas as raízes dessa equação precisam da soma de números complexos para serem expressas algebricamente.

Em particular, isso nos diz que não podemos construir os ângulos de  $20^\circ$  ou de  $40^\circ$  (ou um polígono regular com 9 lados) apenas com régua e compasso.

Os números complexos surgem no ensino de Matemática, de forma natural, devido à necessidade de resolver equações de segundo grau. No entanto, seu uso inicial na história da Matemática ocorreu na resolução de equações polinomiais de grau 3, através do método desenvolvido por Tartaglia. Com o tempo, o trabalho de diversos matemáticos ampliou o entendimento e a aplicação dos números complexos.

No século XVII, René Descartes, filósofo e matemático francês (1596-1650), em seu livro *Discurso do Método*, afirma: "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes, elas são imaginárias." Essa observação é o motivo pelo qual  $i = \sqrt{-1}$  é chamado de número imaginário. A grande dificuldade em aceitar a existência desses números naquela época residia na falta de representações geométricas ou de uma interpretação física que pudesse dar sentido a eles. Enquanto os números reais podiam ser facilmente visualizados na reta numérica, os números imaginários desafiavam a intuição matemática dos estudiosos da época. Essa resistência foi um obstáculo significativo para o desenvolvimento da teoria dos números complexos.

Com o passar do tempo, matemáticos como Abraham de Moivre (1667-1754) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) começaram a explorar essas ideias mais profundamente, introduzindo representações geométricas no plano, onde os números complexos  $z = x + iy$  e  $w = r + is$ , para  $x, y, r, s \in \mathbb{R}$ , podem ser visualizados como pontos  $(x, y)$  e  $(r, s)$  do plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , quando definimos as operações de soma  $(x, y) + (r, s) = (x + r, y + s)$  e produto  $(x, y) \times (r, s) = (xr - ys, xs + yr)$ , para representar a soma  $z + w$  e o produto  $z \times w$ . Segue disso que o módulo de  $z$  é dado por  $|z|^2 = x^2 + y^2$ . Essa abordagem facilitou a compreensão dos números imaginários e revelou suas aplicações em diversas áreas, como a engenharia e a eletrônica. A aceitação do conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  como uma extensão natural dos números reais foi um passo crucial para o avanço da Matemática, permitindo o desenvolvimento de novas teorias e métodos que continuam a ser fundamentais até hoje.

John Wallis, um matemático inglês (1616-1703), já considerava as raízes negativas e complexas em sua obra *Treatise on Algebra*, reconhecendo a importância dessas soluções para uma compreensão mais abrangente das equações. Abraham de Moivre, um matemático francês, fez uma contribuição significativa ao relacionar a trigonometria com os números complexos, introduzindo a famosa fórmula de De Moivre, que estabelece uma conexão entre a exponenciação complexa e as funções trigonométricas. Jean le Rond d'Alembert, um enciclopedista francês (1717-1783), também se dedicou ao estudo dos números complexos, contribuindo para a formalização e aceitação desse conceito na Matemática. Além disso, a obra de d'Alembert influenciou muitos matemáticos subsequentes, que continuaram a explorar as propriedades e aplicações dos números complexos em

diversas áreas, como na teoria dos sistemas dinâmicos. Essa evolução culminou em um entendimento mais profundo dos números complexos, que hoje são considerados fundamentais na Matemática moderna.

Leonhard Euler, suíço (1707-1783), foi o responsável por uma padronização da Matemática. A ele está ligado o número  $e$ , também conhecido como número de Euler. E assim surgiu a expressão  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ , que foi escrita pela primeira vez pelo matemático inglês Roger Cotes (1682-1716) e ficou conhecida como fórmula de Euler.

Outro matemático que contribuiu com a teoria das equações polinomiais foi Albert Girard (1590-1633), que apresentou um resultado que relaciona as raízes de uma equação polinomial com seus coeficientes, com uma generalização do que é feito na Equação (3), quanto à soma  $m + n$  e o produto  $mn$  das raízes da equação. Depois disso, algumas pessoas tentaram encontrar uma forma de resolver equações de grau 5, por meio de seus coeficientes, usando as ideias já conhecidas, mas falharam. Permanecia então a seguinte pergunta: "Será que toda equação polinomial possui solução?"

Mais precisamente,

$$\begin{aligned} &\text{"Dada a equação} \\ &a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $n$  é um inteiro positivo e os coeficientes  $a_i$  da equação são números complexos, podemos dizer que ela tem solução?"

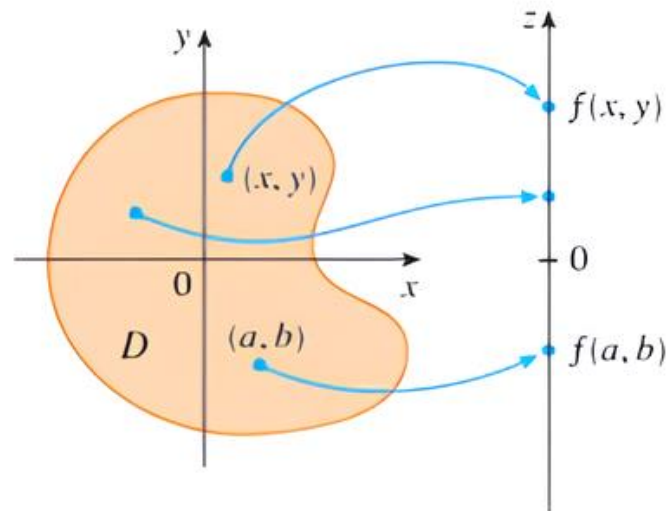
A resposta a esta pergunta foi dada por Carl F. Gauss. Por fim, Évariste Galois (1811-1832), ao determinar a condição necessária e suficiente para que uma equação polinomial pudesse ser resolvida, por meio de somas, produtos e raízes  $n$ -ésimas de seus coeficientes, resolveu um problema antigo e criou um domínio inteiramente novo da álgebra abstrata: a teoria dos grupos (para alguns resultados a esse respeito veja FERNANDEZ; SANTOS, 2010).

## Polinômios complexos e funções reais de duas variáveis

O conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ , ou plano complexo, contém o conjunto dos números reais. Munido de operações de soma e produto descritas antes, adquire uma estrutura algébrica denominada corpo algebricamente fechado, sendo que esse fechamento consiste na propriedade que tem o conjunto de possuir todas as soluções de qualquer equação polinomial com coeficientes naquele mesmo conjunto (no caso, o conjunto dos complexos). Isso é consequência do TFA, cuja demonstração precisa de alguns conceitos que enunciaremos brevemente aqui.

Uma função real  $f$  de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais  $(x, y)$  de um conjunto  $D$  um único valor real, denotado por  $f(x, y)$ . O conjunto  $D$  é o domínio de  $f$  e sua imagem é o conjunto  $\{f(x, y) / (x, y) \in D\} \in \mathbb{R}$  (NICÁCIO, 2013, p. 792). Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas (veja a Figura 3), no qual o domínio  $D$  é um subconjunto do plano  $xy$  e a imagem é um conjunto de números na reta real, representado como um eixo  $z$ .

Figure 3: Arrow diagram.

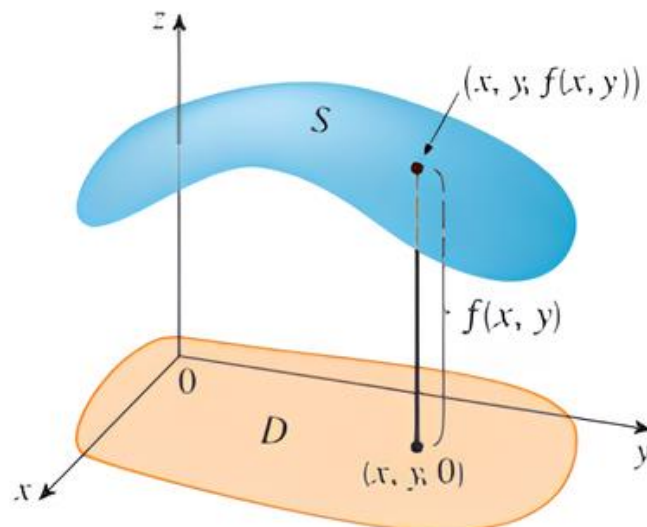


Source: Sterwart (2013).

Por exemplo, se  $f(x, y)$  representa a temperatura em um ponto  $(x, y)$  em uma placa de metal plana com o formato de  $D$ , podemos pensar que o eixo  $z$  representa um termômetro exibindo as temperaturas registradas em cada ponto da placa. Se a função  $f$  é dada por uma expressão e seu domínio não é especificado, fica subentendido que o domínio de  $f$  é o conjunto de todos os pares  $(x, y)$  para os quais a expressão dada fornece um número real bem definido. O comportamento das funções nos diz muitas coisas sobre elas; e outra forma de estudar esse comportamento é por meio de gráficos.

Se  $f$  é uma função real de duas variáveis com domínio  $D$ , então o gráfico de  $f$  é o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tais que  $z = f(x, y)$  e  $(x, y) \in D$ . Assim como o gráfico de uma função  $f$  de uma única variável real é uma curva  $C$  com equação  $y = f(x)$ , o gráfico de uma função  $f$  com duas variáveis é uma superfície  $S$  com equação  $z = f(x, y)$  (veja um exemplo de gráfico na Figura 4).

Figure 4: Graphical representation of a real function of two real variables.



Source: Sterwart (2013).

Dizemos que  $u_0$  é uma raiz de uma função  $f(u)$ , ou de uma equação  $f(u) = 0$ , se satisfaz  $f(u_0) = 0$ , em que  $u_0$  está no domínio de  $f$  e  $0$  representa um vetor nulo. Assim sendo, o número complexo  $z_0$  é dito zero do polinômio complexo  $p(z)$ , quando  $p(z_0) = 0$ , por exemplo.

Em primeira instância, vemos que os polinômios complexos não aparentam ter relação com funções de duas variáveis, porém, ao reorganizarmos a expressão do polinômio, obtemos duas funções reais de duas variáveis reais. Por exemplo, tomando  $z = x+iy$ , com  $x$  e  $y$  números reais, o polinômio

$$p(z) = z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \quad (6)$$

ou

$$p(x + iy) = (x + iy)^2 + (x + iy) + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + i(2xy + y).$$

Então,  $p(x + iy) = 0$  pode ser escrito como um sistema de equações da forma

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \\ 2xy + y = 0 \end{cases} \quad (7)$$

em duas variáveis reais, envolvendo a parte real  $x^2 - y^2 + x + 1$ , e a parte imaginária  $2xy + y$  de  $p(z)$ .

O leitor pode reescrever a equação anterior como

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \\ y(2x + 1) = 0 \end{cases}$$

e encontrar  $2x = -1$  e depois  $2y = \pm\sqrt{3}$ . Observe que se  $y = 0$ , recaímos na Equação 6 com  $z \in \mathbb{R}$ , ou seja, não tem solução.

Observação 2. O sistema de Equações (7) nos dá dois exemplos de funções reais de duas variáveis, que são

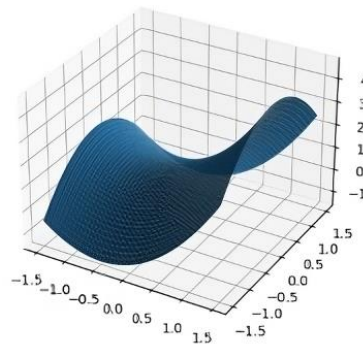
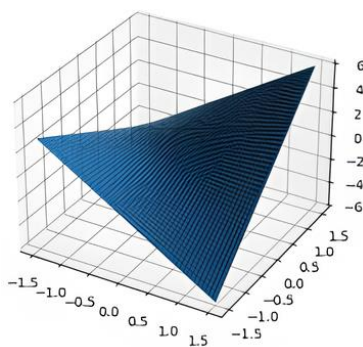
$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 - y^2 + x + 1 \\ g(x, y) = 2xy + y \end{cases}. \quad (8)$$

Os gráficos das respectivas funções são dados nas Figuras<sup>1</sup> 5a e 5b.

Figure 5: Graphs of functions.

(a) Gráfico de  $f(x, y) = x^2 - y^2 + x + 1$ .

(b) Gráfico de  $g(x, y) = 2xy + y$ .



Source: from the authors (2024).

<sup>1</sup> Você pode encontrar material auxiliar sobre como produzir os gráficos aqui apre sentados e resolver equações, usando ferramentas da linguagem Python, no link:

<https://github.com/j-claudinei-f/j-claudinei-f/blob/main/ArtigoSigmae2024.ipynb>

Cabe observar ainda que as equações (6) e (7) podem ser associadas à resolução de sistemas não lineares de equações, ou equações, ou funções vetoriais não lineares (veja Nicácio, 2013, p. 948 e Ferreira, 2020). Em particular, isso nos diz que podemos olhar para a equação polinomial (5) como um problema que cabe no assunto de funções reais ou vetoriais de duas variáveis reais, quando identificamos  $z = x + iy$ , para  $x, y \in \mathbb{R}$ , como  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Ainda, dada função polinomial

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

em que  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e a variável  $z$  pode assumir qualquer valor complexo, existem funções reais de duas variáveis reais  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$

$$p(x + iy) = f(x, y) + ig(x, y).$$

Com os conceitos e definições mencionados anteriormente, observamos dois métodos diferentes para visualizar funções e seu comportamento: diagramas de flechas e gráficos. Um terceiro método é um mapa de contorno, em que os pontos com elevações constantes são ligados para formar curvas de contorno ou curvas de nível.

**Definição 3.** (Curvas de nível) As curvas de nível de uma função real  $f$  de duas variáveis reais são aquelas com equação  $f(x, y) = k$ .

Em suma, uma curva de nível  $f(x, y) = k$  é o conjunto de todos os pontos do domínio de  $f$  nos quais o valor de  $f$  é  $k$ . Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de  $f$  tem altura  $k$ .

**Observação 3.** Nas Figuras 6a e 6b, vemos algumas curvas de níveis das funções  $f(x, y) = x^2 - y^2 + x + 1$  e  $g(x, y) = 2xy + y$ , mencionadas na Observação 2.

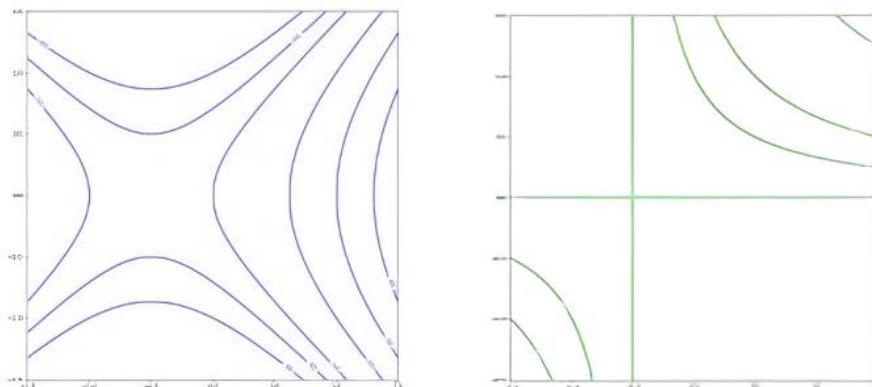
Podemos observar no gráfico da Figura 7, que é a junção das curvas de nível 0 das funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , que os cruzamentos das duas curvas ocorrem exatamente nos pontos  $(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$ , ou seja, nas soluções dos Sistemas de Equações (7) que estão associadas às raízes da equação polinomial  $z^2 + z + 1 = 0$ , com  $z = x + iy$ .

Com os comentários, observações e os exemplos até agora mencionados, caso o polinômio  $p(x + iy) = f(x, y) + ig(x, y)$  tenha grau  $n$  em  $z = x + iy$ , podemos visualizar as raízes dele por meio da intersecção das curvas de nível  $f(x, y) = 0 = g(x, y)$ . A pergunta que fica é: Quantos serão os pontos de intersecção dessas curvas de nível?

Figure 6: Level curves of functions.

(a) Curvas de nível  $f(x, y)$ .

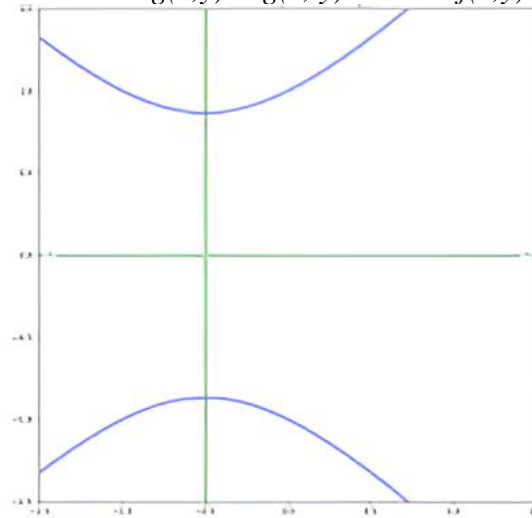
(b) Curvas de nível  $g(x, y)$ .



Source: from the authors (2024).

**Sigmae**, Alfenas, v. 13, n. 3, p. 201-219, 2024.

*Educação Matemática na Contemporaneidade*

Figure 7: Level curves  $g(x,y)=0$  and  $f(x,y)=0$ .

Source: from the authors (2024).

Por exemplo, para

$$p(z) = z^5 - 2z^4 + 2, \quad (9)$$

ou

$$\begin{aligned} p(x + iy) &= (x + iy)^5 - 2(x + iy)^4 + 2 \quad (10) \\ &= (x^5 - 2x^4 - 10x^3y^2 + 12x^2y^2 + 5xy^4 - 2y^4 + 2) \\ &\quad + i(5x^4y - 8x^3y - 10x^2y^3 + 8xy^3 + y^5) \end{aligned}$$

Segue que

$$p(z) = 0$$

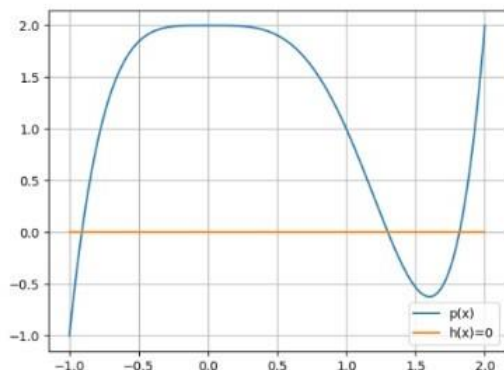
Mas o leitor não vai determinar  $z$  algebricamente, usando apenas somas, produtos e raízes  $n$ -ésimas dos coeficientes de  $p(z)$ , porque esse polinômio não é solúvel por radicais (Fernandez; Santos, 2010, p. 28), mesmo sabendo que existem três raízes reais, aproximadamente  $-0,91$ ,  $1,3$  e  $1,81$  e duas raízes complexas, conforme gráfico da Figura 8a e curvas de nível 0 (ou curvas dadas pela Expressão (11) da Figura 8b.

Isso nos diz que o polinômio  $p(z)$  acima tem pelo menos 5 soluções da forma  $z_j = x_j + iy_j$ , para  $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , sendo que três dessas soluções são números reais. Você poderia tentar convencer-se de que essas são as únicas soluções olhando um gráfico de curvas de nível em que  $x$  e  $y$  pudessem assumir valores maiores.

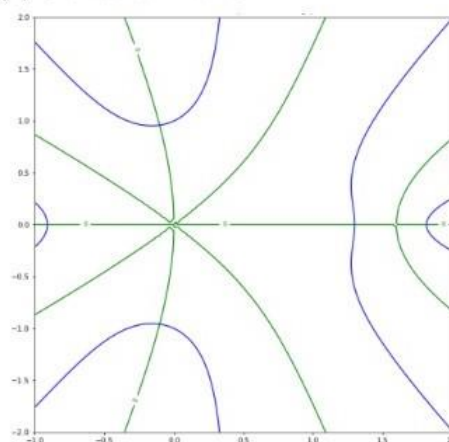
Vamos voltar a essas equações na Observação 7.

Como não é possível determinarmos algebricamente as soluções de qualquer equação polinomial, voltamos, na seção seguinte, um principais do foco deste trabalho: o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), porque ele garante que existem raízes de polinômios não constantes, no conjunto dos números complexos.

Figure 8: Graphs related to the functions in Expression 11.

(a) Gráfico de  $p(x) = x^5 - 2x^4 + 2$ .

(b) Curvas de nível 0.



Source: from the authors (2024).

Compreender o TFA é essencial para a teoria dos polinômios e também para diversas áreas da Matemática e suas aplicações práticas, como na resolução de equações diferenciais, análise de sistemas dinâmicos e na modelagem de fenômenos físicos. Além disso, a reflexão sobre o TFA pode ajudar a estabelecer uma base sólida para a exploração de conceitos mais avançados, como a análise de funções complexas e a topologia do plano complexo. Ao garantirmos a existência de raízes, também abrimos caminho para o estudo das propriedades dessas raízes, como suas multiplicidades e a distribuição no plano complexo. Assim, a discussão sobre o TFA não se limita à sua formulação teórica, mas se estende às suas implicações práticas e ao seu papel na formação matemática dos alunos, permitindo uma compreensão mais abrangente e integrada da disciplina de Cálculo de Várias Variáveis.

## O Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Em 1806, o suíço Jean-Robert Argand publicou um esboço de uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra em um ensaio sobre a representação dos números complexos. Em 1814, ele apresentou a primeira prova correta do teorema, formulado para polinômios com coeficientes complexos. Entretanto, é interessante salientar que Argand utilizou um resultado que, embora fundamental, só seria formalmente estabelecido por Karl Wilhelm Theodor Weierstrass: a existência de mínimo de uma função contínua definida em um conjunto compacto (ver o Teorema 5). Weierstrass, um matemático alemão ativo entre 1815 e 1897, trouxe avanços significativos na análise matemática, e suas contribuições ajudaram a consolidar muitos conceitos que hoje consideramos básicos. Apesar dos argumentos de Argand serem relativamente simples, e ser a ideia que vamos usar na versão do TFA que apresentamos no que segue, a dependência desse resultado levou-a a um segundo plano no século XX. Durante esse período, o Teorema Fundamental da Álgebra passou a ser frequentemente apresentado como uma consequência do Teorema de Liouville, provado por Joseph Liouville (1809-1882). Este teorema afirma que uma função complexa inteira e limitada é constante, estabelecendo uma conexão profunda entre a análise complexa e a teoria dos polinômios.

A transição do foco das provas do TFA para o Teorema de Liouville reflete uma evolução na forma como os matemáticos abordavam a relação entre funções complexas e suas propriedades, além de enfatizar a importância do rigor na fundamentação teórica. Essa mudança de perspectiva

enriqueceu a compreensão do TFA abriu novas avenidas de pesquisa na análise complexa e na teoria dos números.

Carl Friedrich Gauss foi o primeiro a demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra de forma rigorosa. Em sua tese de doutorado na Universidade de Helmstedt, escrita aos 21 anos, Gauss apresentou a primeira prova plenamente satisfatória do teorema, estabelecendo um marco significativo na Matemática. Essa demonstração introduziu métodos que influenciaram gerações subsequentes de matemáticos. Quase vinte anos depois, em 1816, Gauss publicou duas novas demonstrações do teorema, ampliando sua abordagem e explorando diferentes técnicas. Essas novas provas refletiram sua busca contínua por uma compreensão mais profunda das propriedades dos polinômios e das raízes complexas. Em 1850, ele apresentou uma quarta demonstração, na qual buscava uma prova inteiramente algébrica, evidenciando seu interesse em encontrar abordagens que não dependessem de conceitos analíticos.

As contribuições de Gauss ao Teorema Fundamental da Álgebra solidificaram sua reputação como um dos grandes matemáticos e também estabeleceram uma base sólida para o desenvolvimento da teoria dos números complexos e da análise matemática (veja também Ben-Ari (2023) para pensar sobre origens da geometria algébrica, por exemplo).

**Teorema 5. (Bolzano-Weierstrass)** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, num conjunto limitado e fechado  $D \in \mathbb{R}^2$ . Então  $f$  admite máximo e mínimo absoluto em  $D$ , ou seja, existem dois pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$  tais que*

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2),$$

para todo  $(x, y) \in D$ .

Demonstração. Ver Nicácio (2013, p. 855).

Vejamos agora o resultado central de nosso trabalho demonstrado via conceitos de Cálculo. Antes de prosseguir, faremos três observações:

Observação 6. Tomando, por simplicidade,

$$p(z) = z^5 - z + 1, z \in \mathbb{C},$$

por exemplo,

Seja  $z_0$  um número complexo qualquer; e note que

$$\begin{aligned} p(z + z_0) &= (z + z_0)^5 - (z + z_0) + 1 \\ &= z^5 + 5z^4z_0 + 10z^3z_0^2 + 10z^2z_0^3 + 5zz_0^4 + z^5_0 - z - z_0 + 1 \\ &= (z^5 + 5z^4z_0 + 10z^3z_0^2 + 10z^2z_0^3 + 5zz_0^4 - z) + (z^5_0 - z_0 + 1) \\ &= z^2z^3 + 5z^2z_0 + 10zz^2_0 + 10z^3_0 + z5z^4_{0-1} + p(z_0) \\ &= p(z_0) + z^k a + z^{k+1} r(z) \end{aligned}$$

para

$$k = 1, a = 5z_0^4 - 1, r(z) = z^3 + 5z^2z_0 + 10zz_0^2 + 10z_0^3.$$

Tomando agora, por exemplo,  $z_0 = 1 + i$ , temos que

$$p(z + z_0) = z^5 + (5 + 5i)z^4 + 20iz^3 - (20 - 20i)z^2 - 21z - (4 + 5i)$$

e que

$$p(z_0) = -4 - 5i, a = -21, r(z) = z^3 + (5 + 5i)z^2 + 20iz - (20 - 20i).$$

A equação

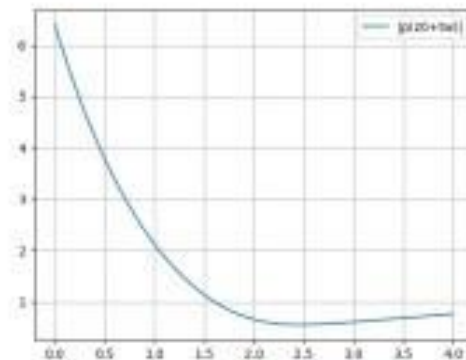
$$aw^k = -p(z_0)$$

nos dá

$$w = -\frac{4+5i}{21}.$$

Consideramos a curva  $b(t) = z_0 + tw$  para produzir a Figura 9.

Figure 9: Graph of  $|p(z_0 + tw)|$ .



Source: from the authors (2024).

O que nos mostra que, quando  $t$  for pequeno,  $|p(z_0 + tw)|$  decresce e que  $w$  é uma direção de decrescimento de  $|p(z)|$ , no plano complexo, partindo do ponto  $z_0 = 1 + i$ . Ou o vetor

$$\left(\frac{-4}{21}, \frac{-5}{21}\right) \in \mathbb{R}^2,$$

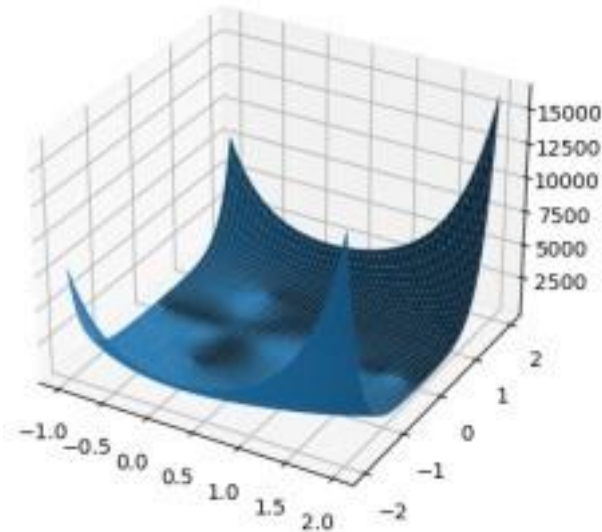
é uma direção de decrescimento da função real de duas variáveis reais  $g(x, y) = |p(x + iy)| \geq 0$ , partindo do ponto  $(1, 1)$ .

Você pode escolher outro valor para  $z_0$ , ou mesmo escolher outro polinômio  $p(z)$ , e repetir os argumentos, desde o início desta observação, para os novos valores de  $a$ ,  $k$  e  $w$  que encontrar; e vai notar que, se  $p(z_0) \neq 0$  e  $a^k w = -p(z_0)$ , então  $|p(z_0 + tw)|$  será decrescente, quando  $t \approx 0$  crescer, ou seja,  $|p(z_0)|$  não será o menor valor possível para  $g(x, y)$  (ver, por exemplo, relação com problemas de otimização em Ferreira (2020); Stewart (2013) e derivadas direcionais em Nicácio (2013, p. 843).

Observação 7. Considere agora

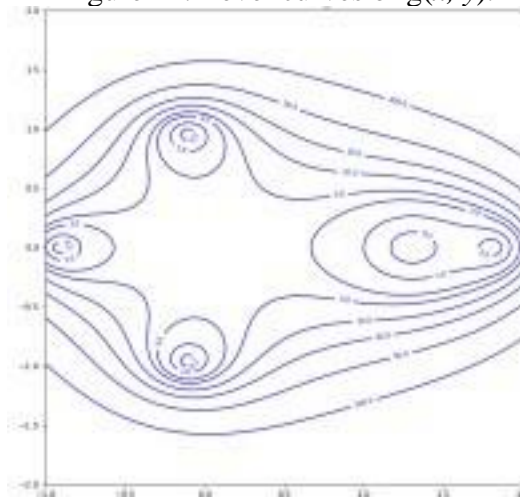
$$g(x, y) = |p(x + iy)|^2, x, y \in \mathbb{R},$$

em que  $p(z) = z^5 - 2z^4 + 2$ , como na Expressão (10). Cabe observar que o módulo do polinômio é elevado ao quadrado apenas para garantir a diferenciabilidade da função  $g$ . Nesse caso,  $g(x, y) = 0$  equivale à Equação (9) ou à (11). Como  $g(x, y)$  é uma função contínua e não negativa, ela tem pontos de mínimo locais, o que pode ser visto no gráfico da Figura 10.

Figure 10: Graph of  $g(x, y)$ .

Source: from the authors (2024),

A Figura 11 traz algumas curvas de nível de  $g(x, y)$  e, em conjunto com a Figura 8b, nos ajuda a visualizar também que  $g(x, y)$  é nula em cinco pontos de mínimo locais, que no caso são mínimos globais.

Figure 11: Level curves of  $g(x, y)$ .

Source: from the authors (2024).

Podemos ver ainda que  $g(x, y)$  possui um ponto de sela próximo da origem  $(0, 0)$ , mas não possui pontos de máximo locais. Além disso,

$$|p(z)| = |z^5 - 2z^4 + 2| \geq |z|^5 \left( 1 - \frac{2}{|z|} - \frac{2}{|z|^5} \right) \geq 3^3 > |p(0)|, \quad |z| \geq 3.$$

temos que  $\frac{1}{2} < |\lambda| < 3$ , como podemos ver na Figura 11 (ver o teorema do círculo de Gershgorin, de 1931, e Ferreira; Silva (2019)). Ainda, muitos métodos computacionais para a resolução de equações polinomiais têm relações com a determinação de autovalores (LAUBENBACHER; MCGRATH; PENGELLEY, 2001).

Estas observações 6 e 7 e o Teorema 5 são as ferramentas que precisamos para demonstrar o teorema a seguir.

**Teorema 8. (Teorema Fundamental da Álgebra)**  
Seja

$$p(z) = \sum_{l=0}^n a_l z^l, \quad z \in \mathbb{C},$$

um polinômio de grau  $n \geq 1$ , ou seja, com  $|a_n| > 0$ , sendo  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Então, existe pelo menos um número complexo  $z_1$  tal que  $p(z_1) = 0$ .

*Demonstração:* (Inspirada em ENDLER, 1987; STEWART, 2013 e DANTAS, 2024)

Seja  $z_0$  um número complexo tal que  $c = p(z_0) \neq 0$ . Aplicamos o Binômio de Newton em cada termo da forma  $(z + z_0)^l$  de  $p(z + z_0)$  para obter a igualdade

$$p(z_0 + z) = p(z_0) + z^k a + z^{k+1} r(z), \quad (12)$$

em que  $a \neq 0$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  e  $r(z)$  é um polinômio de grau que  $n - (k + 1)$ . Podemos escolher um número complexo  $w$  tal que  $aw^k = -c$ . Desta forma, vamos considerar o caminho  $b(t) = z_0 + tw$ , para  $t \in [0, 1]$ . Como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{k+1} |w|^{k+1} |r(tw)|}{|c| t^k} = 0,$$

porque  $r(tw)$  é uma função contínua em  $t$  e, por isso, é limitada. Segue que, para  $t$  positivo e suficientemente pequeno, vale

$$0 \leq \frac{t^{k+1} |w|^{k+1} |r(tw)|}{|c| t^k} < 1,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} |p(z_0 + tw)| &= |p(z_0) + t^k w^k a + t^{k+1} w^{k+1} r(tw)| \\ &= |c - t^k c + t^{k+1} w^{k+1} r(tw)| \\ &\leq |c|(1 - t^k) + t^{k+1} |w|^{k+1} |r(tw)| \\ &= |c| + |c| t^k \left( \frac{t^{k+1} |w|^{k+1} |r(tw)|}{|c| t^k} - 1 \right) \\ &< |c| \end{aligned}$$

Isso quer dizer que  $|p(z_0 + tw)|$  decresce, ou seja,  $|p(z)|$  decresce ao longo do caminho  $b(t)$ , quando  $0 < t \approx 0$ , o que nos diz que  $z_0$  não é um ponto de mínimo de  $|p(z)|$ .

Seja  $s > 1$  e tal que

$$\frac{1}{2} > \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{s|a_n|}, \quad \frac{|a_n| |s|^n}{2} > |p(z_0)|.$$

Para  $|z| \geq s$ , vale que

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq |a_n||z|^n \left( 1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n z} \right| - \left| \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} \right| - \dots - \left| \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \right) \\ &\geq |a_n||z|^n \left( 1 - \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{s|a_n|} \right) \end{aligned}$$

Então, existe um ponto de mínimo da função real de duas variáveis (contínua e não negativa)  $g(x, y) = |p(x + iy)|$ , em um disco de centro no ponto  $(0, 0)$  e raio  $s$  suficientemente grande. Vamos chamar de  $z_1 \in \mathbb{C}$  um ponto de mínimo de  $|p(z)|$ . Da parte inicial da demonstração, temos que  $p(z_1) = 0$ .

Corolário 9. Toda função polinomial  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de grau  $n > 0$ , dada por  $p(z)$

$$= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

pode ser fatorada como produto de exatamente  $n$  fatores, a saber:

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

sendo  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  as raízes de  $p(z)$ . Além disso, essa forma é única, a menos da ordem dos fatores.

Demonstração. O TFA nos diz que existe  $z_1 \in \mathbb{C}$ , tal que  $p(z_1) = 0$ . A ideia da demonstração usa a identidade:

$$z^k - z_1^k = (z - z_1)(z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \dots + z z_1^{k-2} + z_1^{k-1})$$

para escrever:

$$p(z) = p(z) - p(z_1) = (z - z_1)q(z),$$

em que  $q(z)$  é um polinômio de grau  $n - 1$ . O TFA nos diz que  $q(z)$  tem raiz  $z_2$ , se  $n > 1$ . Para mais detalhes, veja Dantas (2024, p. 26).

O Corolário 9 trata da decomposição de um polinômio, um assunto que já é abordado no Ensino Médio. Este resultado é de grande importância nas disciplinas de Cálculo, especialmente quando discutimos o conceito de limites. Em particular, ao lidarmos com indeterminações que podem surgir ao calcular o limite de funções racionais.

Um exemplo simples do uso de raízes polinomiais é na equação diferencial ordinária:

$$y''_{(t)=-\frac{g}{L}y(t)}, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1,$$

que é uma aproximação para a equação que descreve o movimento de um pêndulo simples, quando  $y_0 \approx 0$  e  $y_1 \approx 0$  são números reais, sendo  $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$  a aceleração da gravidade e  $L$  a distância do eixo. Supondo que,  $y(t) = ce^{rt}$ , temos que  $y'(t) = cre^{rt}$  e que

$$y''(t) = cr^2 e^{rt} = -\frac{g}{L} ce^{rt},$$

ou que

$$r^2 + \frac{g}{L} = 0,$$

quando  $c \neq 0$ . Isso nos dá

$$y(t) = c_0 e^{i\sqrt{\frac{g}{L}}t} + c_1 ce^{-i\sqrt{\frac{g}{L}}t},$$

em que  $c_0$  e  $c_1$  dependem de  $y_0$  e  $y_1$ . Para ver mais sobre equações diferenciais ordinárias, sugerimos olhar o Capítulo 17 de Nicácio (2013) e, para referências sobre isso e equações polinomiais, sugerimos a Seção 4 de Laubenbacher; McGrath e Pengelley (2001), por exemplo.

## Considerações Finais

O Teorema Fundamental da Álgebra é um resultado fascinante e elegante da Matemática, tanto pela profundidade de sua demonstração quanto pela riqueza de sua história. Por esse motivo, o objetivo deste trabalho é proporcionar aos leitores algumas percepções e abordagens pedagógicas para ensiná-lo em sala de aula, especialmente considerando que, durante o curso de graduação, esse teorema muitas vezes não recebe a devida atenção e destaque.

Assim, ao ministrar a disciplina de Cálculo de Várias Variáveis, é possível incorporar esse resultado por meio de exemplos ao longo do curso. O TFA estabelece a existência de raízes para polinômios de grau  $n$  no conjunto dos números complexos e também serve como uma ponte entre a Álgebra e a Análise, enriquecendo a compreensão dos alunos sobre a interconexão entre diferentes ramos da Matemática.

Essa abordagem integrada valoriza o teorema em si e também estimula o interesse dos alunos por temas avançados, mostrando como conceitos aparentemente distintos podem se entrelaçar e contribuir para uma compreensão mais profunda da Matemática. Dessa forma, esperamos que o estudo do Teorema Fundamental da Álgebra inspire os alunos a explorar mais a fundo a beleza e a complexidade da Matemática.

## Referências

- BEN-ARI, Moti. A Regular Heptadecagon is Constructible. *Klein Project Blog*, 2023.
- DANTAS, Marcílio José. *O Teorema Fundamental da Álgebra para a disciplina de Cálculo de Várias Variáveis*. Trabalho de Conclusão do Curso (Especialização em Educação Matemática na Contemporaneidade) – Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2024.
- ENDLER, Otto. Solução de equações por radicais em característica  $p \geq 0$   $\geq 0$ . *Revista Matemática Universitária* (RMU), SBM, n. 5, 1987.
- FERNANDEZ, C. S.; SANTOS, R. A. O teorema fundamental da álgebra. *Mini-curso*, V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFPB - Universidade Federal da Paraíba, 2010.
- FERREIRA, José Claudinei. Quando os métodos de Euler e Newton coincidem. *Revista Matemática Universitária*, p. 34–46, 2021. DOI: 10.21711/26755254/rmu20213.
- FERREIRA, José Claudinei. Sobre a soma dos termos de progressões geométricas e métodos numéricos para determinar autovalores e raízes de polinômios. *Revista Professor de Matemática Online*, 2020. DOI: 10.21711/2319023x2020/pmo816.
- FERREIRA, José Claudinei; SILVA, Natally Rodrigues. Sobre autovalores e zeros de polinômios e problemas de otimização: uma síntese e demonstrações. *Revista Sigmae*, v. 8, n. 1, p. 1-15, 2019.
- JULIO, R. S.; FERREIRA, J. C. Uma possibilidade de discussões filosóficas e matemáticas na formação de professores de matemática. *Instrumento: Revista de Estudos e Pesquisas em Educação, Sigmae*, Alfenas, v. 13, n. 3, p. 201-219, 2024.  
*Educação Matemática na Contemporaneidade*

---

Juiz de Fora, v. 20, n. 2, jul./dez. 2018. DOI: 10.34019/1984-5499.2018.v20.19151.

LAUBENBACHER, Reinhard; MCGRATH, Gary; PENGELLEY, David. Lagrange and the Solution of Numerical Equations. *Historia Mathematica*, v. 28, n. 3, p. 220-231, 2001. DOI: 10.1006/hmat.2001.2316.

NICACIO, Nilson Herminio. *Uma justificativa da validade do teorema fundamental da álgebra para o ensino médio*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

STEWART, James. *Cálculo - Volume II*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.