ISSN: 2317-0840

O que pode o Triângulo de Sierpinski em salas de aula do Novo Ensino Médio?

Ronaldo André Lopes[1], José Claudinei Ferreira[2†]

[1]Discente na Universidade Federal de Alfenas; Instituto de Ciências Exatas; Curso de Especialização em educação Matemática na Contemporaneidade; Alfenas – MG, Brasil.
[2]Docente na Universidade Federal de Alfenas; Instituto de Ciências Exatas; Departamento de Matemática; Alfenas – MG, Brasil.

Resumo: *O propósito deste trabalho é relatar a experiência do primeiro autor, como professor de Matemática, na realização de atividades envolvendo a construção do Triângulo de Sierpinski em turmas do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública. A motivação para realizar a atividade surgiu a partir da disciplina Tópicos de Geometria e Medidas, no EMAC, e da necessidade de discutir sobre sequências e progressões geométricas. Durante as aulas, os estudantes construíram o Triângulo de Sierpinski, que é um fractal em que cada iteração contém cópias proporcionais e menores do triângulo inicial, visando a discussão de possíveis relações existentes na figura. Como resultados, destacam-se a utilização das medidas, pois alguns estudantes tiveram dificuldade em utilizar a régua para medidas decimais. Além disso, observou-se a questão da legitimidade, pois os estudantes sentiram a necessidade de aprovação do professor quanto à estética da figura produzida, e acharam interessantes as investigações envolvendo a proporção entre as medidas dos lados dos triângulos e a formalização do número de triângulos produzidos a cada iteração por meio de uma progressão geométrica. Na atuação como professor, entende-se que essas atividades potencializam o Ensino de Matemática e atraem maior interesse dos estudantes, favorecendo discussões sobre geometria, medidas e progressões.*

Palavras-chave: *Formação Continuada de Professores; Fractais; Grandezas e Medidas; Educação Matemática; Sequências Numéricas e Não Numéricas.*

What can Sierpinski's Triangle do in New High School classrooms?

Abstract: *The purpose of this paper is to report the experience of the first author, as a Mathematics teacher, in carrying out activities involving the construction of the Sierpinski Triangle in classes of the 2nd year of high school in a public school. The motivation to carry out the activity arose from the discipline Topics in Geometry and Measurements, at EMAC, and the need to discuss geometric sequences and progressions. During the classes, the students constructed the Sierpinski Triangle, which is a fractal in which each iteration contains proportional and smaller copies of the initial triangle, aiming at the discussion of possible relationships existing in the figure. As a result, the use of measurements stands out, as some students had difficulty using the ruler for decimal measurements. In addition, the issue of legitimacy was observed, as the students felt the need for the teacher's approval regarding the aesthetics of the figure produced, and found interesting the investigations involving the proportion between the measurements of the sides of the triangles and the formalization of the number of triangles produced at each iteration by means of a geometric progression. In the work as a teacher, it is understood that these activities enhance the teaching of Mathematics and attract greater interest from students, favoring discussions about geometry, measurements and progressions.*

Keywords: *Continuing Education of Teachers; Fractals; Quantities and Measures; Mathematics Education; Numerical and Non-Numeric Sequences.*

[†]Autor correspondente: jose.ferreira@unifal-mg.edu.br

Manuscrito recebido em: 17/08/2024
Manuscrito revisado em: 07/09/2024
Manuscrito aceito em: 10/09/2024

Introdução

O Novo Ensino Médio resulta de uma alteração na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que prevê a mudança na estrutura do Ensino Médio, com ampliação na carga horária de 800 horas para 1000 horas anuais (Brasil, 2017). Em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), há oferta das disciplinas comuns – já existentes – e de outras disciplinas que, em tese, podem ser escolhidas pelos estudantes, denominadas itinerários formativos, cujo foco concentra-se nas diferentes áreas do conhecimento e na formação profissional dos estudantes.

As mudanças decorrentes da Lei nº 13415/2017 (Brasil, 2017) foram implementadas nas escolas do Estado de Minas Gerais e nas outras unidades federativas em 2022. Assim, a organização curricular dos estudantes que ingressaram ao Ensino Médio em 2022, em Minas Gerais, teve sua composição estruturada em Formação Geral Básica (600 horas) e Itinerário Formativo (400 horas), conforme informações apresentadas no Quadro 1.

Segundo o Ministério da Educação (Brasil, 2022), a mudança no Ensino Médio teve como principal objetivo a garantia de oferta de educação de qualidade aos jovens e proximidade com a realidade dos estudantes, tendo em vista as demandas do mundo do trabalho e da vida em sociedade. Há uma utopia em relação ao objetivo, pois persiste a evasão, a busca dos estudantes por aulas em único turno, falta de estrutura nas escolas e de materiais adequados para um número excessivo de disciplinas e itinerários.

Nos anos que sucederam a 2022, o currículo passou a ser implementado, também, no 2º ano e 3º ano do Ensino Médio, com inclusão de novas opções de disciplinas eletivas e mantendo a ideia de Formação Geral Básica e Itinerários Formativos. Em algumas instituições públicas estaduais de Educação Básica, o Novo Ensino Médio foi aderido de forma a contemplar a Educação em Tempo Integral, o que não é o caso da escola em que o primeiro autor atua. A estrutura do Novo Ensino Médio, na visão do primeiro autor, teve impacto negativo na realidade escolar, visto que há uma menor carga horária para ministrar as disciplinas comuns, como a Matemática e não há uma capacitação sobre os itinerários formativos.

Os itinerários são a parte flexível do currículo, que envolvem três componentes: aprofundamento em áreas do conhecimento, eletivas e Projeto de Vida. Nessa estrutura, os estudantes puderam, em tese, escolher as áreas de aprofundamento, considerando a afinidade e o interesse pessoal em cursar disciplinas específicas que, em geral, estejam mais alinhadas com as possíveis escolhas de cursos superiores ou área de atuação no mercado de trabalho futuramente. Na realidade, tais disciplinas são selecionadas com base em uma lista de possibilidades que a própria Secretaria de Educação disponibiliza, o que limita a escolha e restringe as opções dos estudantes.

Chart 1: Curriculum Organization of the 1st Year of High School in Minas Gerais.

Formação Geral Básica (600 horas)	Itinerários Formativos (400 horas)
Linguagens e suas Tecnologias: - Língua Portuguesa; - Arte; - Educação Física; - Língua Inglesa.	**Projeto de Vida:** Componente obrigatório.
Matemática e suas Tecnologias: - Matemática.	**Eletivas:** Disciplinas escolhidas de forma livre pelos estudantes, conectadas com os anseios das juventudes, em que os estudantes assumem o protagonismo do seu próprio aprendizado.
Ciências da Natureza e suas Tecnologias: - Biologia; - Física; - Química.	**Introdução às áreas do conhecimento:** - Práticas Comunicativas; - Núcleo de Inovação Matemática; - Humanidades e Ciências Sociais; - Ciência e Tecnologia.
Ciências Humanas e suas Tecnologias: - Geografia; - História; - Filosofia; - Sociologia.	**Preparação para o Mundo do Trabalho:** - Introdução ao Mundo do Trabalho; - Tecnologia e Inovação.

Source: From authors (2024).

Dentre as áreas selecionadas, duas turmas do 2º ano do Ensino Médio – em que o primeiro autor atuou no ano de 2023 enquanto professor – optaram, durante a pesquisa realizada pela escola, pelo Aprofundamento em Linguagens e Matemática (LGG/MAT) que, conforme destaca o Manual do Estudante:

> busca integrar duas áreas do conhecimento que, à primeira vista, podem parecer distantes, mas que possuem interseções profundas. Nesta Unidade Curricular, objetivamos ampliar a reflexão crítica e as práticas relacionadas ao exercício da cidadania por meio de atividades de investigação e pesquisa, criação artístico-cultural e proposição de intervenções locais. Assim, na interação entre as duas Áreas, a Matemática ganha novos significados como instrumento prático para as ações cotidianas essenciais para a apropriação e ocupação sistematizada dos mais diversos espaços (Minas Gerais, 2022).

Considerando como macrotema a Cidadania Global, este aprofundamento possui como componentes curriculares: Cultura e Cidadania (CC-LGG) Cidadania e Inclusão (CI-LGG)

Matemática como Instrumento de Pesquisa (MIP-MAT) e Linguagem Matemática na Construção da Cidadania (LMCC-MAT), com duas aulas semanais, com duração de 50 minutos cada aula. Cabe destacar que não há formação complementar para os professores que ministram essas disciplinas. Em geral, apenas recebem a ementa e os tópicos a serem abordados, sem sugestão de materiais ou referenciais.

Em um cenário em que o Novo Ensino Médio prevê diferentes componentes curriculares, seria necessário um investimento na formação continuada dos professores, de modo a contemplar os conteúdos abordados e fornecer recursos didáticos e metodológicos para a execução das aulas. Integrar diferentes áreas do conhecimento não é algo trivial, pois exige qualificação dos professores e mudanças na dinâmica escolar, dentre outros fatores. Na percepção dos autores, para ministrar essas disciplinas, seria necessária a capacitação dos professores e maior investimento, visto que os docentes precisam de um tempo da carga horária destinado às reflexões críticas e à construção do material e adequação ao currículo para trabalhar os conteúdos necessários.

Neste contexto, no ano de 2023, o primeiro autor ficou responsável pelo componente de Linguagem Matemática na Construção da Cidadania (LMCC), ofertado em duas turmas de 2º ano, com 36 alunos cada. Dentre os conteúdos previstos no Plano de Curso desta série, constam as sequências e progressões aritméticas e geométricas. Tendo em vista a necessidade de discutir sobre progressões geométricas e suas aplicações e a participação enquanto estudante do EMAC na disciplina sobre Tópicos de Geometria e Medidas, surgiu a oportunidade de abordar a construção do Triângulo de Sierpinski com essas duas turmas. O primeiro autor já conhecia o Triângulo de Sierpinski, mas pôde aprofundar os conhecimentos sobre a relação do material com sequências e progressões durante a disciplina.

Em especial, o componente de LMCC prevê em sua ementa a análise de índices relativos à cidadania global com a investigação de modelos matemáticos capazes de explicar fenômenos. Nesse contexto, a análise de índices e investigação de modelos foi abordada no decorrer da disciplina em diversos momentos. Tendo em vista a dificuldade dos estudantes em compreender a aplicabilidade do conteúdo de progressões geométricas, o primeiro autor aproveitou esse espaço da disciplina para discutir como os fractais se relacionam às progressões geométricas e possíveis exemplos. De modo geral, os estudantes já sabiam aplicar fórmulas relacionadas às progressões, mas tinham interesse em conhecer possíveis aplicações do conteúdo no cotidiano e em outras situações. Ao considerar a atuação enquanto professor em turmas do 2º ano do Ensino Médio em uma escola pública do sul de Minas Gerais, o presente texto tem como objetivo relatar a experiência de um professor de Matemática na realização de atividades envolvendo a construção do Triângulo de Sierspinski e discussões sobre progressões geométricas.

Na segunda seção serão apresentadas a ideia de fractais, a disciplina de Tópicos de Geometria e Medidas e o curso de especialização em que este trabalho se desenvolveu, bem como os pilares que estruturam este relato de experiência. Posteriormente, na terceira seção, destacamos a atuação do professor-pesquisador em sala de aula. Na quarta seção, são elencados os aspectos metodológicos do trabalho. Na quinta seção são apresentados e discutidos os resultados da experiência desenvolvida com a construção do Triângulo de Sierpinski em sala de aula. Por fim, destacamos as nossas considerações finais, os agradecimentos e as principais referências bibliográficas utilizadas no trabalho.

Fractais, Tópicos de Geometria e Medidas e EMAC

A Geometria Fractal envolve figuras e objetos com irregularidades considerados mais complexos do que aqueles vistos na geometria euclidiana, sendo essa última amplamente abordada nas escolas de Ensino Básico (Edgar, 1990). Muitos fractais são obtidos por meio de processos iterativos (ou sequências recursivas) que seguem um algoritmo pré-definido, podendo se caracterizar como algébricos ou geométricos. Em especial, alguns fractais geométricos podem ser construídos a partir da subdivisão de uma figura considerando padrões e transformações isométricas (reflexão, rotação, translação) e homotéticas, com o algoritmo aplicado em suas partes ou em seu todo. Alguns desses fractais geométricos podem ser obtidos por meio de métodos manuais de construção e podem ser discutidos em salas de aula com maior facilidade, motivando a realização de investigações Matemáticas, além de despertar a curiosidade dos estudantes (Côrtes; Antunes, 2014).

Para além da estética e das irregularidades observadas na natureza, como árvores, plantas e outras estruturas, no âmbito da Educação Matemática na Contemporaneidade, a teoria dos fractais tem sido discutida em pesquisas e relatos de experiência (Sinclair *et al.*, 2016). A temática abordada em estudos sobre fractais é diversa, incluindo o uso de fractais em sala de aula (Barbosa, 2016; Sallum, 2005), desenvolvimento do pensamento computacional (Barbosa; Silva, 2016; Padilha; Dullius; Quartieri, 2013; Aguilar; Silva; Romanini, 2019), generalização de conteúdos matemáticos (Faria, 2012), revisão bibliográfica sobre fractais (Pereira; Borges, 2016), construção de fractais no Ensino Superior (Julio; Ferreira, 2021; Costa, 2018), dentre outros temas.

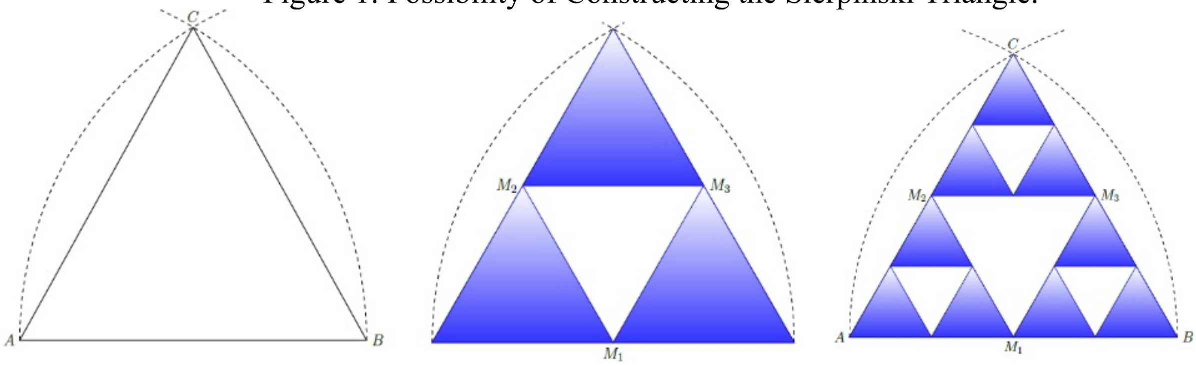
Segundo Pereira e Borges (2016), os fractais têm sido pouco abordados na formação de professores, o que limita a utilização e aplicação dos conceitos sobre essa geometria no contexto da Educação Básica. Neste contexto, o primeiro autor deste trabalho considera que foi importante cursar a Especialização *Lato Sensu* em Educação Matemática na Contemporaneidade (EMAC), ofertada pela Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG) (2023-2024), que favoreceu a ampliação dos repertórios didáticos e pedagógicos, contribuindo para a atuação em ambientes formais e não-formais de aprendizagem que envolvem o conhecimento matemático.

Em seu Projeto Pedagógico, o EMAC prevê disciplinas de Tópicos, em que são abordados conteúdos como os fractais (Julio; Ferreira, 2021), que normalmente não são discutidos durante os cursos de graduação em Matemática, apontando, ainda, a necessidade de abordar conceitos de geometria, historicamente colocados em segundo plano no ambiente escolar (Caldatto; Pavanello, 2015). A disciplina de Tópicos de Geometria e Medidas, ofertada em 2023, pelo segundo autor, propõe em sua ementa um tópico sobre Conceitos Geométricos utilizando Fractais, que também motivou o presente trabalho.

No Novo Ensino Médio, espaço em que se concentra este trabalho, fractais geométricos são explicitamente citados na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), em que se prevê a utilização de transformações isométricas (reflexão, rotação, translação) e homotéticas e análise de elementos da natureza e produções humanas, incluindo os fractais. Ainda na BNCC, sequências recursivas (ou relações de recorrência), como as progressões geométricas (PG) aparecem, especificamente para o Ensino Médio, na habilidade EM13MAT508, que consiste em “identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas” (BRASIL, 2018, p. 533).

Cabe ressaltar que a BNCC aponta a importância de abordar sequências recursivas desde o Ensino Fundamental I, como pode ser visto nas habilidades EF01MA10, que consiste em descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras, ou (EF02MA10), que consiste em descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos, (EF08MA11) que consiste em identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes (BRASIL, 2018). Na disciplina de Tópicos de Geometria e Medidas, o docente apresentou diferentes possibilidades de construção do Triângulo de Sierpinski, que é um fractal em que cada iteração contém cópias proporcionais e menores da etapa anterior. O início de uma possibilidade de construção é destacada na Figura 1 que, posteriormente, foi adotada como modelo para a realização da atividade relatada:

Figure 1: Possibility of Constructing the Sierpinski Triangle.



Source: From authors (2024).

Neste contexto, considerando a necessidade do professor de Matemática em abordar conteúdos que se alinhem à BNCC, tais como reconhecimento de padrões e sequências recursivas, bem como a preocupação do primeiro autor com sua própria formação continuada ao cursar o EMAC, sua atuação enquanto professor-pesquisador e a utilização de diferentes materiais e metodologias na Educação Básica, a Figura 2 explicita a conexão entre os quatro pilares em que este relato de experiência se estrutura:

Figure 2: Main Pillars Structuring This Experience Report.

Source: From authors (2024).

O professor-pesquisador em sala de aula

Considerando o cenário de atuação de um professor de Matemática em escola pública, emerge a necessidade de pensar sobre a prática docente e os desafios presentes nessa realidade. Para Lüdke (2001), o professor-pesquisador é o profissional que, tal como um artista, deve buscar as melhores alternativas na promoção do ensino e aprendizagem, com o uso de diferentes metodologias e materiais. Na nossa visão, enquanto professores-pesquisadores, o docente que não se limita a apenas elaborar aulas para cumprir a ementa, pode possibilitar um contato maior dos estudantes com a Matemática, favorecendo o interesse pelas aulas e pela área de Ciências Exatas. Assim, a sala de aula se torna um espaço para o diálogo com os estudantes sobre diferentes temas e conteúdos. Para Milani (2017), o diálogo pode ser entendido como uma forma de interação entre os sujeitos envolvidos na aula, que se engajam em uma atividade de aprendizagem na qual a fala e a escuta ativa são compartilhadas, com discussão de ideias e compreensão do que está sendo dito.

De modo geral, durante os três anos de atuação do primeiro autor em uma mesma escola, busca-se trabalhar com diferentes metodologias e abordagens, com discussões sobre temáticas que possibilitem a compreensão do conteúdo matemático, mas também, se integrem ao cotidiano dos estudantes, além de prepará-los para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Certamente, nem todos os conteúdos são abordados com diferentes metodologias, mas sempre que possível, há a utilização de propostas como o uso de jogos, materiais manipuláveis, investigação Matemática, resolução de problemas, dentre outras estratégias. Com a possibilidade de abordar diferentes conteúdos no componente de Linguagem Matemática na Construção da Cidadania (LMCC), optamos por discutir com os estudantes sobre sequências recursivas por meio de uma atividade envolvendo a construção do Triângulo de Sierpinski, porque os estudantes apontavam uma dificuldade e, também, interesse em compreender qual a utilidade das progressões no cotidiano e como elas poderiam aparecer no contexto da Geometria.

Neste contexto, as falas dos estudantes, as disciplinas ministradas e a própria atuação permitem a reflexão sobre as possibilidades e metodologias que possam contribuir para a formação continuada enquanto professor e para o processo de ensino e aprendizagem. Além disso, enquanto professor-pesquisador se faz necessário olhar para a própria formação em busca de soluções que contribuam não somente para a atuação, mas também, para a formação e atuação de outros professores e mudanças na própria instituição. Assim, relatar essa experiência pode contribuir para a própria formação e, também, para que outros professores adaptem a atividade em seu contexto de atuação. Em especial, as novas legislações se apresentam como um desafio para os professores, inclusive na área de Matemática. Assim, com novos itinerários e disciplinas que compõem a grade curricular, emerge a necessidade de o professor repensar as práticas pedagógicas, com outras possibilidades de metodologias de ensino e métodos de avaliação.

Na escola pública em que o primeiro autor atua observa-se uma demanda dos estudantes por uma formação que permita a compreensão dos conteúdos para além da teoria e da aplicação de fórmulas. Comumente há perguntas sobre o surgimento de conceitos matemáticos, relacionados à história da Matemática, aplicações e utilidade da Matemática no cotidiano e cultura geral. Já os documentos oficiais, abordam a necessidade de uma educação crítica e voltada para a formação cidadã, em que o professor atue como mediador do conhecimento e reconhecendo a formação para o mundo do trabalho, contemplando o projeto de vida dos estudantes. Na prática há incongruências, visto que, sozinho, o professor não consegue contemplar todas as exigências e não possui formação e acesso a materiais que possibilitem trabalhar de modo preciso o que é previsto no currículo.

Tendo em vista esse cenário, o primeiro autor aproveitou a oportunidade de cursar a especialização EMAC, visando conhecer algumas metodologias e práticas de ensino, que possam ser abordadas na escola, com foco principal em turmas de Ensino Médio. Ainda que seja desafiador, há uma busca por compreender a realidade dos estudantes, promovendo atividades e ações que valorizem os conhecimentos prévios e os interesses escolares e profissionais deles. Nas aulas e nos projetos, busca-se estabelecer conexões entre a aula e o cotidiano, bem como discutir sobre possíveis áreas de atuação em que o conteúdo aparece e o modo como ela pode ser útil, visto que os estudantes acreditam que cursos de outras áreas não abordam aquele conteúdo, ou ainda, que esse conhecimento não afeta o desempenho no ENEM e vestibulares, o que é um equívoco (Lopes; Cardoso, 2020).

Ainda de forma introdutória, o primeiro autor busca que os estudantes compreendam conceitos que, depois, podem auxiliar na compreensão sobre o Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica, por exemplo. Assim, as aulas não ficam apenas focadas em utilizar a Matemática no ENEM e nos vestibulares, mas em compreender a importância dela nos diferentes contextos. Isso possibilita, em alguns casos, um primeiro contato dos estudantes que pretendem cursar o Ensino Superior na área com alguns conteúdos. E também favorece o contato dos estudantes com conteúdos que se alinhem ao seu projeto de vida, visto que, nesta escola, há uma queda no número de interessados no Ensino Superior nos últimos anos. Atualmente, faz-se necessário que a escola tenha um olhar para estudantes que não querem cursar o Ensino Superior ou que veem caminhos diferentes para o seu próprio sucesso pessoal e profissional.

Para o primeiro autor, o professor-pesquisador tem um olhar cuidadoso com o ensino de Matemática, enfrentando os desafios como possibilidades de repensar sua atuação em sala de aula. Assim, o EMAC tem sido uma especialização em que, de fato, as disciplinas contribuem diretamente para a atuação, com ideias que contemplam os temas contemporâneos e as demandas dos currículos e das escolas. Em relação ao principal desafio de ser professor em formação continuada e pesquisador, acreditamos que o tempo para dedicar às disciplinas e à formação ainda é limitado. Isso porque, a jornada de trabalho do professor dentro e fora da escola é, geralmente, extensa, dificultando a dedicação de maior tempo ao estudo de algumas disciplinas e preparação de aulas e materiais consistentes para a atuação.

Aspectos Metodológicos

De modo concomitante à disciplina de Tópicos de Geometria e Medidas e às atividades realizadas no EMAC, no 2º bimestre do ano letivo de 2023, os estudantes de duas turmas do 2º ano do Ensino Médio tiveram contato com o conteúdo de progressões aritméticas e geométricas. Em geral, os professores que lecionam a disciplina de Matemática abordaram a ideia de sequência, com exemplos e exercícios. Posteriormente, foram trabalhadas as definições de progressão aritmética e geométrica, as fórmulas para calcular o n-ésimo termo de uma progressão e fórmulas para soma de todos os termos de uma progressão. Depois, os estudantes resolveram problemas com a utilização das fórmulas, com atividades individuais e em grupo sobre o tema. A seguir será apresentado um exemplo:

Exemplo: Uma empresa lucrou 140 mil reais no mês de janeiro,146 mil reais em fevereiro e 152 mil reais em março deste ano. Supondo que a empresa mantenha esse padrão de aumento no lucro nos meses subsequentes, quanto a empresa lucrará em dezembro?

Em um problema como esse, os estudantes começaram a pensar em diferentes métodos para resolver, sem necessariamente utilizar as fórmulas. Em alguns casos, perceberam que o aumento mensal no lucro era de seis mil reais, e foram somando isso ao valor inicial até chegar ao mês de dezembro. Em outras situações, consideravam que o ano tinha 12 meses, logo, calculavam 12 x 6 = 72 e somavam esse valor ao lucro do mês de janeiro, totalizando 140 + 72 = 212 mil reais. Entretanto, esqueciam que deveriam descontar um mês, ou seja, considerar 11 meses ao invés de 12 meses, o que implicava em um resultado diferente daquele esperado. Essas diferentes formas de resolução foram discutidas em sala de aula com a turma, destacando os benefícios e possíveis dificuldades decorrentes desses métodos. Por exemplo, caso fosse calcular o lucro após cinco anos (60 meses), seria mais demorado somar mês a mês.

Para responder a algumas questões dos estudantes, o professor propôs, na disciplina de Linguagem Matemática na Construção da Cidadania (LMCC), uma atividade envolvendo o Triângulo de Sierpinski. Assim, essa ideia surgiu dos questionamentos dos estudantes e da motivação oriunda da disciplina de Tópicos de Geometria e Medidas, conforme já mencionamos. A atividade foi proposta buscando a criação de um cenário para investigação, em que os estudantes são convidados a participarem de atividade envolvendo investigação Matemática (Skovsmose, 2000). Assim, a ideia central era incentivar os estudantes a formularem questões e buscarem explicações para os resultados encontrados durante a construção do Triângulo de Sierspinski.

Para Skovsmose (2000) há a formação de seis diferentes ambientes de aprendizagem, que envolvem o paradigma do exercício e cenários para investigação. Para tal, considera que existem três diferentes tipos de referências existentes, com atividades que fazem referência à Matemática pura, à semirrealidade, e à situação da vida real. Os ambientes de aprendizagem são exibidos no Quadro 2:

Chart 2: Learning Environments.

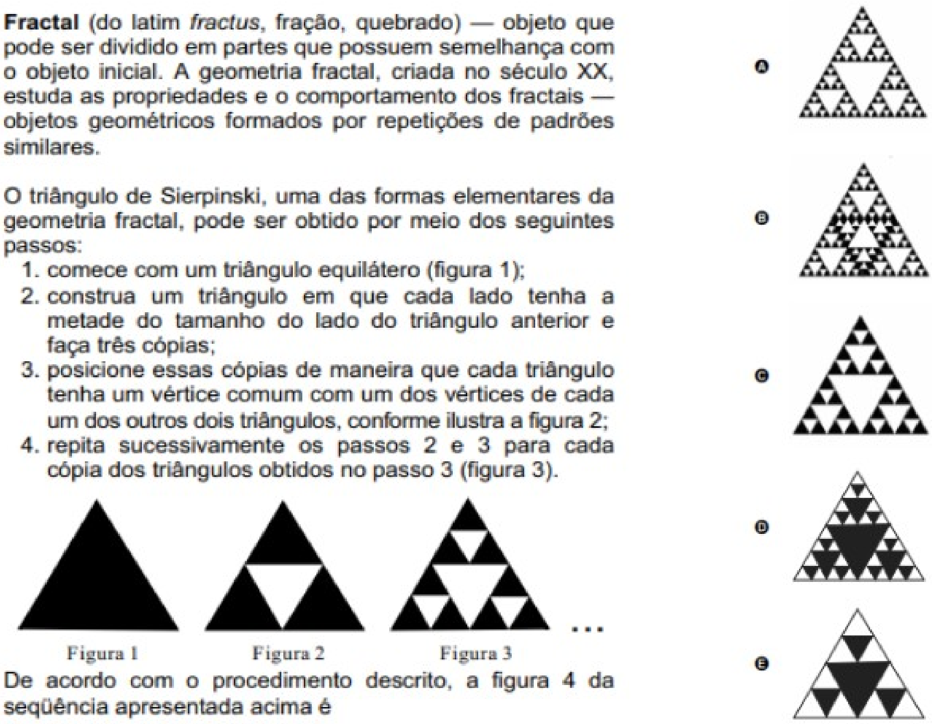
	Paradigma do exercício	**Cenário para investigação**
Referências à Matemática pura	1	2
Referências à semirrealidade	3	4
Referências à realidade	5	6

Source: Skovsmose (2000).

Em cada ambiente de aprendizagem há características específicas. Em especial, o ambiente 2 tem como objetivo a aplicação de conceitos, de forma investigativa, em que a aplicação não é direta. Em geral, são problemas envolvendo álgebra ou geometria, sem contextualização ou aplicação em outras áreas além da Matemática. Já o ambiente 4 apresenta referências à semirrealidade, em que se tem uma situação hipotética e que não possui solução única. A ideia é valorizar os questionamentos dos estudantes, ainda que se trate de uma situação fictícia. A atividade do Triângulo de Sierspinski, apresentada neste trabalho transita entre esses dois ambientes de aprendizagem. Isso porque, neste caso, por meio da investigação Matemática, os estudantes buscam identificar padrões e propriedades presentes nas sequências e progressões, investigando relações entre as medidas dos lados dos triângulos, entre o número de triângulos a cada iteração e culminando em uma fórmula para o cálculo do número de triângulos ou em uma progressão geométrica que sintetize os resultados encontrados. Em alguns momentos, há um foco na Matemática e no uso de fórmulas, por exemplo. Já em outros momentos, foca-se na exploração do material para além da Matemática, considerando a semi realidade. Não há, a princípio, respostas corretas ou incorretas, mas sim, uma busca por reconhecer padrões e compreender a aplicabilidade deste conteúdo.

Para a execução da atividade, os estudantes receberam uma folha sulfite com um triângulo equilátero, cujos lados medem aproximadamente 18 cm. Essa estratégia de disponibilizar um triângulo equilátero foi utilizada para otimizar o tempo, visto que seriam disponibilizadas duas aulas para a construção e discussão sobre o Triângulo de Sierpinski. Como sugestão para uma próxima atividade, o professor poderia abordar, também, a construção geométrica de um triângulo para, depois, realizar a outra etapa da atividade. Para a construção do Triângulo de Sierpinski, os estudantes foram convidados a medir e encontrar o ponto médio de cada lado do triângulo. Ao final da aula, os estudantes solucionaram uma questão do Enem 2008, conforme Figura 3:

Figure 3: ENEM Question Involving the Sierpinski Triangle.


Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

Figura 1 Figura 2 Figura 3 ...

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da seqüência apresentada acima é

A

B

C

D

E

Source: INEP (2008).

Resultados

Nesta seção, a ideia é apresentar alguns resultados observados na experiência de construção e nas discussões sobre o Triângulo de Sierpinski. Cabe destacar que, na realização de atividades desse tipo, observa-se que os estudantes apresentam dificuldades relacionadas ao conteúdo matemático, além da necessidade de serem retomados conceitos para a realização da atividade de forma exitosa.

Para Oliveira, Brocardo e Ponte (2016), a investigação Matemática ocorre em três fases principais: (a) introdução da tarefa; (b) realização da investigação; e (c) discussão dos resultados. Na primeira fase, que ocorre de modo breve e pode ser denominada fase de arranque, a ideia é atrair o interesse do estudante. Nela, o professor esclarece a proposta da atividade para que a turma entenda o significado dela. É o momento de esclarecer como será a atividade e enxergar os estudantes como “pequenos exploradores” (Oliveira; Brocardo; Ponte, 2016). Nessa fase, o professor explicou aos estudantes que eles construiriam o Triângulo de Sierpinski, os materiais que utilizariam e o objetivo da atividade.

Um cenário para investigação se constitui quando um convite, realizado pelo professor, é aceito pelos estudantes, neste caso, a turma em que ocorre a atividade. O professor (primeiro autor) optou por utilizar uma questão como um convite, de modo a despertar a curiosidade e o interesse dos estudantes. Assim, com a pergunta: *Como podemos dividir o lado do triângulo em duas partes de mesma medida?*, o professor permitiu que os estudantes formulassem suas próprias respostas e novas perguntas, testando hipóteses e comunicando os resultados encontrados. Isso caracteriza uma aceitação ao convite (Skovsmose, 2000), visto que nas duas turmas os estudantes se envolveram ativamente, explorando o material e iniciando a construção do Triângulo de Sierpinski.

Assim, a partir do trecho a seguir apresentamos o segundo momento da investigação, que para Oliveira, Brocardo e Ponte (2016) constitui a realização da investigação, em que o professor pode perguntar o que os alunos pensam, suas conjecturas e auxiliá-los na síntese dos resultados e nas possíveis conclusões, favorecendo a verificação da veracidade dos resultados e observando se as justificativas são adequadas, bem como a utilização da linguagem Matemática.

A utilização da régua, em tese, presente desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, se apresentou como um desafio para alguns estudantes participantes da atividade[1]. A princípio, quando questionados sobre o uso da régua e a medição em centímetros e milímetros, eles afirmaram que seria “fácil” ou que medir segmentos de reta era algo “muito simples”. Assim, ao receber a folha com o triângulo inicial impresso, o professor fez algumas perguntas:

Professor: *Como podemos dividir o lado do triângulo em duas partes de mesma medida?*
Estudantes: (pensaram um pouco) *Podemos medir o lado e dividir por dois (em maioria).*
Professor: *E como denominamos esse ponto que divide o segmento em duas partes iguais?*
Estudantes: *Ponto do meio? Metade?*
Professor: *Quase lá!*
Estudantes: *Ponto médio.*
Professor: *Isso, o ponto médio divide o segmento de reta (lado do triângulo) em duas partes congruentes.*

Na Turma A, os estudantes lembraram do ponto médio de forma mais rápida, sem dicas. Já na Turma B, eles demoraram um pouco mais para identificar e, para facilitar o entendimento, o professor desenhou o ponto médio na lousa, em um dos segmentos do triângulo.

Após essa discussão, os estudantes iniciaram as medições, com o auxílio da régua, comumente de 30 centímetros, conforme Figura 4. Estudantes com réguas menores tiveram um pouco mais de dificuldade, demorando um pouco mais para realizar as medições. Isso porque a estratégia utilizada por eles foi medir com a régua e, quando necessário, marcar o final da régua e utilizá-la mais uma vez para completar a medição. Uma estratégia possível seria dobrar a folha, mas isso não ocorreu.

Alguns poucos estudantes apresentaram dificuldade em manusear a régua, perguntando se a contagem da régua iniciava no zero, antes ou depois do número. Identificaram que o lado do triângulo media aproximadamente 18 centímetros. Depois, ao dividir por dois, chegaram ao resultado 9 centímetros. Até esse momento, a atividade estava fluindo bem. Marcaram os pontos

1 Essa dificuldade também foi identificada com os cursistas do EMAC na disciplina de Tópicos de Geometria e Medidas. Na ocasião, diversos cursistas, com formação em Matemática, precisaram de ajuda para construir um triângulo com régua e compasso, dadas as medidas de seus lados.

médios dos três lados do triângulo e uniram esses pontos, formando um triângulo equilátero com vértices nos pontos médios do triângulo inicial no interior dele.

Questionados sobre o número de triângulos presentes na figura após a primeira iteração, os estudantes identificaram que havia três triângulos que denominaram "com ponta para cima" e um triângulo que denominaram com a "ponta para baixo" ou "de cabeça para baixo". Em uma outra interpretação, os estudantes poderiam considerar que a primeira iteração resulta em cinco triângulos, sendo quatro novos e um triângulo inicial. Os diferentes pontos de vista poderiam levar a outras interpretações e diferentes sequências recursivas.

Figure 4: Student Measuring the Segments of the Initial Triangle.

Source: From authors (2024).

Continuando a atividade, os estudantes mediram o lado dos triângulos resultantes da primeira iteração, e começaram a encontrar dificuldade com as divisões. Cabe ressaltar que os estudantes, de início, não utilizaram calculadoras, foram feitos cálculos mentais e anotações no caderno. As divisões são exibidas na Tabela 1:

Table 1: Results Found by Students in Measuring the Sides of the Triangle.

Iteração	Medida do lado do triângulo (em cm)	Posição do ponto médio (em cm)
1	18	9
2	9	4,5
3	4,5	2,25
4	2,25	1,125

Source: From the authors (2024).

Com base na Tabela 1, observa-se que após algumas iterações, os estudantes começaram a encontrar medidas com números decimais, que envolviam milímetros. Neste momento, começaram a ter dificuldade em estabelecer o ponto médio dos segmentos de reta. Na régua, alguns estudantes não conseguiram inicialmente identificar onde ficaria o 2,25 cm, por exemplo, solicitando ajuda dos colegas e do professor. Em outros casos, os estudantes marcavam 2,5 cm ou 2,0 cm, confundindo ou buscando aproximar as medidas. Foram comuns frases como: "Professor, 4,5 dividido por 2 deu

2 e uns quebradinhos", ou ainda "o que eu faço com esses quebradinhos?", "deu 2 e 25 centímetros", "deu 2 e pouco", e frases similares.

Em mais um momento, observa-se que um cenário para investigação pode estimular o estudante ao pensamento crítico, motivando a análise e avaliação de um problema matemático, fomentando o raciocínio lógico. Ao pensar sobre as medidas e possíveis aproximações, os estudantes não são limitados por um resultado supostamente correto ou pelo professor, mas sim, incentivados a buscar estratégias de resolução e discutirem sobre as soluções e resultados encontrados. Na BNCC (Brasil, 2018), está previsto que os estudantes devem resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada, na habilidade EF07MA29.

Para esclarecer a dúvida dos estudantes sobre centímetros e milímetros, o professor exemplificou na lousa, simulando uma régua, com marcações semelhantes àquelas da régua de 30 cm. Além das dificuldades com a medição, surgiu também a dificuldade em desenhar segmentos de reta cada vez menores para formar os triângulos internos do Triângulo de Sierpinski.

Na quarta iteração, como a régua apresentava apenas centímetros e milímetros, os estudantes usaram aproximações para marcar o ponto médio (1,125 cm). Para evitar confusões com o número, o professor destacou que é um número entre 1cm e 2 cm, explicando que ficaria entre 1,1 e 1,2 e, depois, especificamente, antes do ponto médio entre 1,1 cm e 1,2 cm na régua, ou seja, antes do 1,15 cm. Posteriormente, os estudantes foram incentivados a investigar o que aconteceria caso dividissem 1,125 por dois, se seria um resultado possível e como fariam para medir com a régua e determinar um segmento com essa medida. No trabalho de Pereira e Zulatto (2010), os estudantes criaram uma estratégia para encontrar os pontos médios dos lados, usando métodos com dobraduras e alinhando o vértice da altura junto ao ponto médio da base. Em outra atividade essa ideia poderia ser utilizada.

Conforme já mencionado, os estudantes tiveram contato com progressões geométricas antes da atividade proposta, mas diversas vezes questionaram sobre a aplicabilidade real do conteúdo ou sobre o porquê do conteúdo ser denominado "geométrico". A atividade tornou possível ampliar essa discussão. Com as sucessivas divisões por dois, as turmas perceberam que, após diversas iterações, o segmento teria uma medida cada vez mais próxima de zero, com o diálogo a seguir:

Professor: (Após a quarta iteração) *Se fizermos outra iteração, onde ficará o ponto médio?*
Estudantes: *Nossa! Deve dar zero e uns quebradinhos.*
Professor: *Calculem aí e me falem.*
Estudantes: *Deu 0,5625 cm ... teria que aproximar!*
Professor: *E se dividíssemos novamente?*
Estudantes: *Agora deu 0,28125 cm, muito pequeno* (com a calculadora do celular em mãos).
Professor: *O que está acontecendo com a medida do segmento de reta (lado do triângulo)?*
Estudantes: *Está cada vez mais perto de zero, eu acho!*
Professor: *Faz sentido! E será que esse número chega ao zero?*
Estudantes: *Sim... Não... Ah, não sei!* (ficaram confusos com a pergunta).
Professor: *Pensem um pouco mais sobre isso!*

Alguns segundos depois começaram a surgir respostas mais diretas, de estudantes que perceberam que, mesmo com sucessivas divisões, o número não chegaria ao zero, mas chegaria muito próximo a esse valor. O professor aproveitou para comentar que, em Cálculo Diferencial e Integral, no Ensino Superior, eles discutiriam sobre isso, principalmente em cursos de Exatas, em um conteúdo conhecido como Limite. Esse tipo de discussão tem se tornado comum nas aulas de

Matemática principalmente porque os estudantes costumam questionar “por que é útil esse conteúdo?”, “onde vou usar esse conteúdo?”, “vou precisar na faculdade?”. Estas perguntas se alinham ao que prevê o aprofundamento em LGG/MAT, em que se busca ampliar a reflexão crítica dos estudantes, com atividades de investigação e pesquisa. Outra aplicabilidade de progressões geométricas está relacionada aos juros compostos, que envolvem soma de PG e podem ser discutidos em Matemática e, também, em aulas de Matemática Financeira[2], que é um outro componente do Novo Ensino Médio.

Na Turma A, ao serem instigados sobre a medida do lado do triângulo diminuir no decorrer das iterações, um estudante percebeu que a medida dos lados formava uma PG de razão ½, comentando com os colegas e com o professor sobre isso. Mas, de modo geral, outros estudantes não perceberam isso, então o professor aproveitou para aprofundar essa discussão no momento seguinte, construindo uma tabela na lousa. A ideia foi manter a investigação Matemática, sem dar respostas diretas, mas permitindo que os estudantes conjecturassem sobre os resultados encontrados. Assim, após dialogar um pouco sobre as medições, discutimos sobre o número de triângulos formados em cada iteração e sobre o número total de triângulos formados, conforme o Quadro 3:

Chart 3: Results Found by Students in the Number of Triangles at Each Iteration.

Figura	Iteração	Número de triângulos novos	Soma do número de triângulos	Medida do lado do triângulo
	1	$1 = 3^0$	1	L
	2	$3 = 3^1$	4	$L/2$
	3	$9 = 3^2$	13	$L/2^2$
	4	$27 = 3^3$	40	$L/2^3$
	5	$81 = 3^4$	121	$L/2^4$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	n	$a_n = a_1 \bullet q^{n-1} = 3^n$	$S_n = \frac{a_1 \bullet (q^n - 1)}{q-1}$	$L/2^n$

Source: From authors (2024).

Para a construção da tabela, o professor assumiu o papel de ajudar de forma indireta os estudantes, ainda na fase de realização da investigação, questionando as conjecturas que estavam sendo discutidas e levando-os a conclusão de que elas são ou não são corretas para a elaboração da tabela e para a observação de um padrão na construção do Triângulo de Sierpinski. Em um contexto

2 Em outra oportunidade de realização desta atividade, seria possível explorar discussões sobre sistemas de amortização, por exemplo. Uma prestação no sistema PRICE pode ser calculada utilizando uma fórmula resultante da soma de uma PG. Seria possível realizar uma investigação no cenário 6, com financiamento de imóvel real e suas parcelas.

em que se pretendia trabalhar com cenário para investigação, pode-se dizer que a atividade ultrapassou a Matemática pela Matemática, trazendo discussões que se relacionam com a semirrealidade, ou seja, transitando entre os ambientes de aprendizagem (2) e (4) propostos por Ole Skovsmose (2000). O professor não poderia prever todos os resultados da atividade e o engajamento dos estudantes foi essencial para isso.

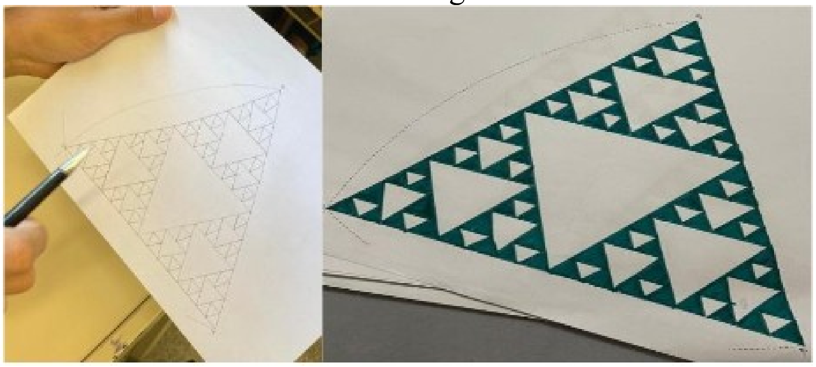
Para Cifuentes (2005, p. 56), a experiência estética, na Matemática, é "o reconhecimento da transcendentalidade de seus objetos, por exemplo, a triangularidade do triângulo, e é o reconhecimento de padrões mais que de objetos". Neste sentido, a estética foi um dos aspectos explorados durante a atividade, visto que os estudantes destacaram a importância de realizar as medições corretamente, buscando exatidão na confecção do Triângulo de Sierpinski, uso de cores, e buscando construir o maior número possível de triângulos através de novas iterações. A simetria, as formas, a ordem, a abstração e o equilíbrio também podem ser entendidos como valores estéticos no contexto da Matemática (Cifuentes, 2005).

A estética apareceu, nas duas turmas, associada à legitimidade, pois diversos estudantes buscaram a aprovação do professor em relação ao Triângulo de Sierpinski produzido em sala de aula. Em alguns casos, eles alegavam que a construção não estava "bonita" ou "semelhante à produção dos colegas", descartando a folha e reiniciando a atividade. Alguns pediam para finalizar a atividade em casa, pois ficaria esteticamente mais bonita, sendo possível fazer com mais tempo e atenção aos detalhes, mas foram orientados a concluírem em sala de aula, explorando o material e participando ativamente das discussões com o professor e os colegas. Na visão do professor, a legitimidade pode ser um reflexo da própria avaliação utilizada nas escolas, pautada na quantidade, nas questões de múltipla escolha e nos testes de larga escala. Isso reforça a necessidade de repensar a prática docente adotando, também, avaliações qualitativas, que valorizem os saberes e personalidades dos estudantes ao longo da trajetória escolar, não apenas suas notas bimestrais.

A imprecisão, as falhas e as construções consideradas "fora do padrão" podem ser entendidas como um espaço para discussões no ensino de geometria e do fractal abordado. Como já mencionado, toda medida empírica contém erros. Isso porque, os estudantes puderam originar outros padrões, colorindo os triângulos que a princípio ficariam em branco, construindo triângulos não equiláteros e permitindo que o professor classificasse os triângulos em escalenos e isósceles, revisando rapidamente o conteúdo, ou ainda, esquecendo de construir parte dos triângulos, o que favoreceu a discussão sobre o padrão no número de triângulos e da não formação de uma progressão geométrica formada nessa atividade. Apareceram sequências com menor número de triângulos, em que os triângulos ficaram com medidas diferentes, dentre outras (veja-se o canto inferior da Figura 5).

Na Figura 5, o estudante mostra ao professor o Triângulo de Sierpinski após quatro iterações, afirmando que alguns triângulos não eram equiláteros e ficaram "tortos" ou "diferentes" dos outros, e questiona se é necessário refazer a atividade. O professor, com o intuito de valorizar os resultados obtidos pelos estudantes, disse que não precisaria descartar o material produzido, colorindo e entregando-o posteriormente. Cabe destacar que seria possível gerar um fractal escolhendo pontos aleatoriamente em cada lado do triângulo, entretanto, perder-se-ia a questão da razão geométrica.

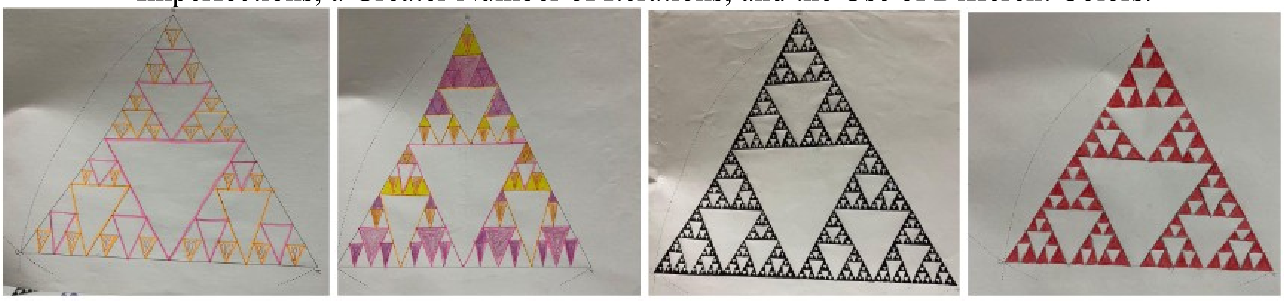
Figure 5: Construction of the Sierpinski Triangle with Non-Equilateral Triangles, Before and After Coloring.



Source: From authors (2024).

Já a Figura 6 destaca algumas outras construções em que é possível identificar o uso de diferentes cores, tentativas de construir sem utilizar a régua em todas as etapas, construções com cinco ou mais iterações, além de imperfeições e irregularidades na construção dos triângulos no decorrer da atividade proposta.

Figure 6: Results of Some Sierpinski Triangle Constructions Highlighting Irregularities, Imperfections, a Greater Number of Iterations, and the Use of Different Colors.



Source: From authors (2024).

Após recolher todas as produções do Triângulo de Sierpinski, o professor conversou com a professora de Arte da escola, que sugeriu que os trabalhos fossem expostos em uma Mostra Artística, que seria realizada em novembro de 2023. Entretanto, o evento teve outra temática e, com isso, os trabalhos não foram expostos. Enquanto professor, achei interessantes os elogios e considerações da professora de outra disciplina. Posteriormente, ela me disse que alguns estudantes afirmaram que o professor de Matemática estava "invadindo o espaço dela" ao propor atividades envolvendo exploração de elementos artísticos e grandezas e medidas. Ela explicou aos estudantes que, neste caso, a Matemática e Arte têm intersecções e que a Matemática aparece em diversos momentos nas obras artísticas, como é o caso da razão áurea nas obras de Leonardo da Vinci, por exemplo.

Em outros momentos, de diálogo com os estudantes das duas turmas em que a atividade foi realizada, os comentários foram positivos em relação à proposta. Houve oportunidade de conversar com esses estudantes em 2024, quando já estavam matriculados no 3º ano. Na ocasião, Felipe[3], estudante da Turma B, afirmou que a atividade foi diferente, fora do convencional e que, de modo geral, todos gostaram, pois todos se dispuseram a realizar atentamente a atividade. Esse engajamento apontado na fala do estudante potencializa a ideia de aceite ao convite para investigação. Além disso, a disposição dos colegas para executar a atividade demonstra algo que surpreendeu, pois em aulas conteudistas ou com uso exclusivamente de lousa e pincel, o interesse era menor.

Para Clara, o Triângulo de Sierpinski remete à ideia de um "quebra-cabeça", dada a sua complexidade e o nível de detalhamento após diversas iterações. E em sua percepção, a beleza do resultado final do fractal, já colorido, foi algo que chamou a atenção durante a atividade. Outros estudantes, ao serem questionados sobre sua opinião em relação à atividade diziam "Foi legal!", sem destacar outros aspectos. Ainda que algumas respostas tenham sido simples, a dinâmica da sala de aula e o interesse em participar demonstraram um cuidado dos estudantes com o material e melhor compreensão sobre as progressões, em alguns casos. Tais resultados dialogam com Nunes (2006), que destaca que a exploração da geometria fractal em sala de aula favorece o desenvolvimento dos estudantes, dos valores e das competências, aguçando a curiosidade e o gosto pelo aprendizado, pela pesquisa e pela investigação. Além disso, pode promover a pesquisa de padrões e regularidades, com generalizações nos contextos numéricos e geométricos.

Em contrapartida, Lara, da Turma A, afirmou que ao desenhar o Triângulo de Sierpinski - ou tentar - ela errou a construção pelo menos três vezes. Isso fez com que jogasse fora o material e recomeçasse a construção, repetindo as medições, os detalhes, até completar com "qualidade" sua atividade. Cabe destacar que o professor não impôs uma construção ideal, mas naturalmente os estudantes buscaram uma estética em que os triângulos fossem bastante similares. Certamente, ao construir um triângulo novo, os estudantes enxergaram a necessidade de que se aproximassem de triângulos equiláteros, motivados pelo uso da régua e pela autossimilaridade comum nos fractais.

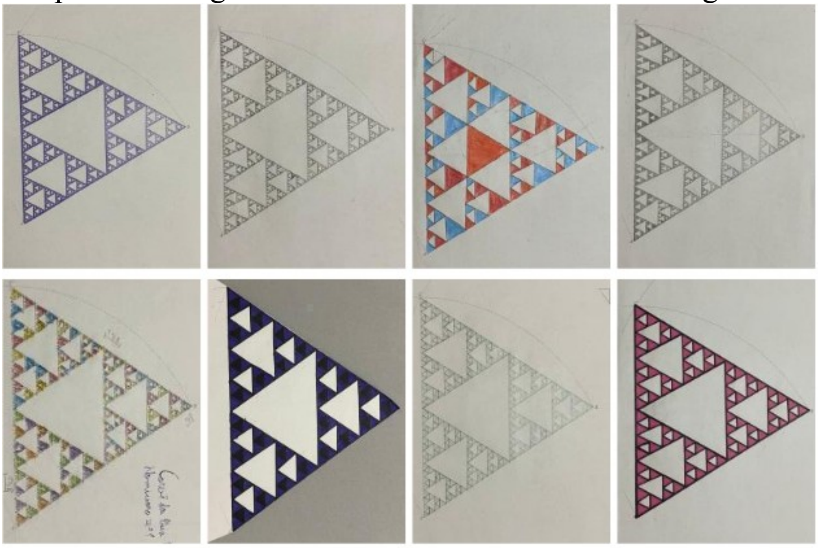
Em outra perspectiva, Rafael foi um estudante que identificou um interesse maior por fractais a partir da construção do Triângulo de Sierpinski. Disse que explorou outras possibilidades, tentando construir fractais dentro e fora da escola. Em outra oportunidade, seria possível explorar atividades envolvendo o pensamento computacional, conforme o trabalho de Barbosa e Silva (2019). Já Gabriela disse que, em 2024, durante uma avaliação externa, teve um pouco de dificuldade em resolver uma questão sobre fractais, pois não lembrava a fórmula e ficou confusa em relação à progressão aritmética ou geométrica. Na visão do professor, esse também é um resultado, pois possivelmente ela não consolidou o conteúdo e, por vezes, tem se apegado às fórmulas. Nesse sentido, analisar as figuras, utilizar o raciocínio lógico, repensar as estratégias de resolução podem ser caminhos para o êxito.

As falas dos estudantes, de modo geral, corroboram o estudo de Pereira e Zulatto (2010), em que os autores propuseram uma oficina de construção do Triângulo de Sierpinski com turmas de Ensino Médio. Os autores constataram que a atividade favoreceu o instinto investigativo dos estudantes, que consideraram a atividade satisfatória e prazerosa, tendo contato com uma geometria ainda pouco abordada neste nível de ensino. Os resultados aqui apresentados também dialogam com o trabalho de Paula e Souza (2017), em que os estudantes se mostraram mais interessados e motivados em relação à Matemática após uma atividade sobre fractais.

Na Figura 7 são exibidas algumas das construções realizadas nas duas turmas durante a atividade, em que nota-se diferentes sequências, cores, resultados finais, modos de apresentação do material, dentre outros aspectos.

3 Para manter o anonimato dos estudantes, os nomes utilizados no texto são fictícios.

Figure 7: Sierpinski Triangle Constructions in 2nd Year New High School Classes.



Source: From authors (2024).

Ao ver os estudantes com a atividade em mãos, outros professores ficaram curiosos para saber qual era a finalidade da experiência, bem como o conteúdo que seria abordado com os "triângulos coloridos". Nessa direção, tem sido comuns falas das professoras de História e da própria direção da escola em relação à realização de atividades diferentes das convencionais em aulas de Matemática. Isso porque, de modo geral, os professores da área de Ciências Humanas afirmam que se as aulas de Matemática na época em que estudaram fossem mais interessantes e dinâmicas, talvez tivessem mais interesse pelo conteúdo. Além disso, estudantes de outras turmas, em que a atividade não foi desenvolvida, disseram que queriam que o professor da turma realizasse atividades semelhantes.

Considerações Finais

Neste texto buscamos relatar a experiência de um professor de Matemática em salas de aula de Ensino Médio com uma atividade envolvendo o Triângulo de Sierpinski. Consideramos importante discutir sobre diferentes práticas pedagógicas no ensino de Matemática, motivados pelo curso de Especialização em Educação Matemática na Contemporaneidade (EMAC). Neste contexto, a escola se apresentou como um espaço propício para abordar conteúdos vistos em uma disciplina do EMAC e relacionados com o conteúdo de progressões geométricas, previsto no 2º ano do Ensino Médio.

Afinal, o que pode o Triângulo de Sierpinski em salas de aula do Novo Ensino Médio? Na atuação do professor de Matemática, entendemos que atividades envolvendo geometria e construções geométricas potencializam o ensino do conteúdo, atraindo maior interesse dos estudantes. Essas atividades, ademais, podem ser usadas em conjunto com discussões sobre problemas históricos, que antecedem ou sucedem o uso das tecnologias digitais. Além disso, a construção do Triângulo de Sierpinski favoreceu as discussões sobre geometria, medidas e progressões (Julio; Ferreira, 2021), permitindo outro olhar sobre o conteúdo de progressões, considerando os aspectos estéticos, artísticos, além da utilização da régua.

Em particular, o primeiro autor considera que a escrita do relato de experiência foi uma oportunidade para apresentar um recorte de sua atuação no Ensino Médio visto que, comumente, as experiências de um professor ficam restritas à escola, com pouca divulgação. Em outra perspectiva, cursar o EMAC foi desafiador, pois foi necessário conciliar a atuação na escola e na universidade, o doutorado acadêmico e a especialização.

Para trabalhos futuros, acreditamos na importância de que atividades semelhantes sejam realizadas não somente no Ensino Médio, mas também, em turmas de Ensino Fundamental. Isso pode favorecer a compreensão de conteúdos como as transformações geométricas, por exemplo, além do uso da régua e motivar a criatividade, o interesse pela Matemática e a adoção de diferentes metodologias pelos professores de Matemática.

Consideramos, também, que a EMAC tem contribuído diretamente na formação continuada de professores de Matemática, sendo uma motivação para a utilização de diferentes metodologias e materiais em sala de aula. Nesta perspectiva, o curso de especialização potencializa o acesso dos professores a novos materiais, incentivando reflexões sobre as práticas de sala de aula e socialização de tais práticas entre os professores da escola.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Federal de Alfenas.

Referências

AGUILAR, V. L.; SILVA, R. C.; ROMANINI, E. Geometria Fractal: abordando conceitos a partir de construções com o Software Geogebra. **Revista Ensin@ UFMS**, v. 1, n. 4, p. 52-72, 2019.

BARBOSA, L. M.; SILVA, R. S. R. Sobre pensamento computacional na construção de um Triângulo de Sierpinski com o GeoGebra. **Pesquisa e debate em Educação**, v. 9, n. 1, p. 537-559, 2019.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal-para a sala de aula**. Autêntica, 2016.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Matemática. Ensino Médio. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf. Acesso em: 09 jun. 2024.

______. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. **Lei nº 13.415/2017, de 13 de fevereiro de 2017**. Brasília, 2017. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/L13415.htm>. Acesso em: 04 jul. 2024.

______. **Novo Ensino Médio**. MEC: Brasília, 2022. Disponível em: <www.gov.br/mec/pt-br/novo-ensino-medio/>. Acesso em: 09 jul. 2024.

CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v. 24, n. 1, p. 103-128, 2015.

CIFUENTES, J. C. Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. **Boletim GEPEM**, n. 46, 2005.

CÔRTES, I. R. C; ANTUNES, G. **Geometria fractal no Ensino Médio:** teoria e prática. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Centro de Ciências exatas e tecnologia. Rio de Janeiro, 2014.

COSTA, L. S. **Geometria Fractal:** utilização do Geogebra e aplicações na disciplina de Computação para Matemática no Ensino Superior. 2018. 68f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2018.

EDGAR, G. A. **Measure, topology, and fractal geometry**. New York (USA): SpringerVerlag, 1990. (Undergraduate texts in mathematics).

FARIA, R. W. S. **Padrões Fractais**: Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos. 2012. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2012.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. **Coleção Formação de Professores**, 2010.

INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio:** Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2008. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2008/2008_amarela.pdf. Acesso em: 09 jun. 2024.

JULIO, R. S.; FERREIRA, J. C. Construindo seu fractal: uma experiência no Ensino Superior. In: NAVARRO, E. R.; SOUZA, M. C. (org.). **Educação Matemática em pesquisa:** perspectivas e tendências. Guarujá: Científica Digital, 2021. E-book. v. 2, cap. 27, p. 438-453. Disponível em: https://www.editoracientifica.org/articles/code/201202526. Acesso em: 28 ago. 2023.

LOPES, R. A.; CARDOSO, A. Cursinho popular e competências Matemáticas: Impacto no acesso ao Ensino Superior. **Revista Conexão UEPG**, n. 16, p. 1-12, 2020.

LÜDKE, M. O professor, seu saber e sua pesquisa. **Educação & Sociedade**, Campinas: CEDES, n. 74, p. 77-96, 2001.

MARQUES, I. M. W.; DANTAS, S. C. A Noção de Autoridade na Formação e Prática Profissional de Professores de um Curso de Geogebra. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 15, n. 39, p. 1-15, 2022.

MILANI, R. “Sim, eu ouvi o que eles disseram”: o diálogo como movimento de ir até onde o outro está. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 57, p. 35-52, 2017.

MINAS GERAIS. **Manual do Estudante:** Aprofundamento nas áreas do conhecimento 2º ano do Ensino Médio. Ensino Médio. Belo Horizonte: SEEMG, 2022. Disponível em: https://acervodenoticias.educacao.mg.gov.br/images/documentos/Anexo%203%20-%20Manual_do_Estudante.pdf. Acesso em: 09 jun. 2024.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática Pura - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006. Disponível em: http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf. Acesso em: 4 jul. 2024.

PADILHA, T. A. F.; DULLIUS, M. M.; QUARTIERI, M. T. Construção de fractais usando o software GeoGebra. **Boletim GEPEM**, n. 62, p. 155-162, 2013.**UNIVATES**, 2012.

PAULA, C. E. S.; SOUZA, T. M. P. Uma abordagem da geometria fractal para o Ensino Médio. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 10, 2017. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/130. Acesso em: 4 jul. 2024.

PEREIRA, E. L.; ZULATTO , R. B. A. Fractais em sala de aula: uma experiência com papel e tesoura, computador e espelho. **Boletim GEPEM**, *[S. l.]*, n. 56, 2010. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/310. Acesso em: 4 jul. 2024.

PEREIRA, T; BORGES, F. A. Categorizando as pesquisas acerca de geometria dos fractais via periódicos científicos brasileiros. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo, 2016. **Anais**..., São Paulo, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6723_3682_ID.pdf. Acesso em 17 nov. 2010.

OLIVEIRA, H.; BROCARDO, J.; PONTE, J. P. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Autêntica, 2016.

SALLUM, E. M. Fractais no Ensino Médio. **Revista do professor de Matemática**, v. 59, p. 1-8, 2005.

SINCLAIR, N. et al. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. **ZDM Mathematics Education**, [s.l.], v. 48, n. 5, p. 691–719, 2016.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.