

Homogeneização assintótica de um problema para uma equação elíptica com coeficiente continuamente diferenciável localmente microperiódico

Leonardo F. P. Leite¹, Elyakim A. Santana¹, Levy P. S. Garcia¹, Douglas M. da Silva², Fabio Carlos da Rocha¹, Alexandre Molter², Leslie Darien P. Fernández^{2†}, J. Bravo-Castillero³

¹Universidade Federal de Sergipe

²Universidade Federal de Pelotas

³Universidad Nacional Autónoma de México

Resumo: Neste trabalho, o método de homogeneização assintótica (MHA) é aplicado a um problema de valores de contorno de Dirichlet para uma equação diferencial de segunda ordem, elíptica, unidimensional e não homogênea, com coeficiente continuamente diferenciável e não homogeneidade contínua. Ambos o coeficiente e a não homogeneidade apresentam comportamentos localmente periódicos e rapidamente oscilantes. Como alternativas à solução exata, úteis em caso de haver grandes dificuldades na sua obtenção direta, apresentam-se três soluções assintóticas formais (SAFs) na forma de séries em duas escalas em termos de potências do parâmetro geométrico pequeno que caracteriza a separação de escalas estruturais do meio localmente microperiódico modelado pelo problema descrito. Tais SAFs são construídas a partir das soluções da sequência recorrente de problemas para os coeficientes das potências do parâmetro pequeno formada pelos chamados problemas homogeneizado e locais sobre a célula de periodicidade. Ainda, prova-se a proximidade entre a solução exata e as SAFs com relação ao parâmetro pequeno, o qual constitui a justificativa matemática do MHA. Finalmente, apresenta-se um exemplo para ilustrar o fato de que as três SAFs obtidas da aplicação do MHA são boas aproximações da solução exata.

Palavras-chave: Método de homogeneização assintótica, Solução assintótica formal, Problema homogeneizado, Problemas locais, Coeficiente efetivo.

Asymptotic homogenization of a problem for an elliptic equation with locally microperiodic continuously differentiable coefficient

Abstract: In this work, the asymptotic homogenization method (AHM) is applied to a Dirichlet boundary problem for a non-homogeneous, one-dimensional, elliptic, second-order differential equation with continuously differentiable coefficient and continuous non-homogeneity. Both the coefficient and non-homogeneity exhibit locally periodic and rapidly oscillating behaviors. As alternatives to the exact solution, which are useful in case of existing great difficulties in directly obtaining it, three formal asymptotic solutions (FASs) are presented in the form of two-scale series in terms of powers of the small geometric parameter characterizing the separation of structural scales of the locally microperiodic medium modeled by the described problem. Such FASs are constructed from the solutions of the recurrent sequence of problems for the coefficients of the powers of the small parameter, which is formed by the so-called homogenized problem and local problems over the periodicity cell. In addition, the proximity between the exact solution and the FASs with respect to the small parameter is proven, which constitutes the mathematical justification of the AHM. Finally, an example is presented in order to illustrate the fact that the three FASs obtained by applying the AHM are good approximations of the exact solution.

Keywords: Asymptotic homogenization method, Formal asymptotic solution, Homogenized problem, Local problems, Effective coefficient.

†Autor correspondente: leslie.fernandez@ufpel.edu.br

Introdução

Materiais heterogêneos ocorrem fundamentalmente em três formas: como compósitos, os quais consistem em uma distribuição de domínios ocupados por materiais homogêneos diferentes chamados de fases constituintes; como cerâmicos ou policristais, em que os domínios estão ocupados pelo mesmo material homogêneo constituinte, mas em diversas configurações (TORQUATO, 2002); ou como materiais funcionalmente graduados, nos quais a estrutura muda quase continuamente como aqueles formados pela deposição de películas finas de escalas micro- a nanométrica (SADD, 2021). Ainda, combinações dessas três formas podem ser encontradas (ver, por exemplo, MEDJMADJ et al. (2022), que estuda experimentalmente estruturas sanduíche com miolo funcionalmente graduado). As heterogeneidades são facilmente encontradas nos meios naturais, sejam eles o osso humano, atmosfera terrestre, madeiras, arenito, pulmões, tecidos vegetais e animais, os agregados celulares, tumores e demais recursos. Produtos manufaturados são outros meios de obtenção de materiais heterogêneos, destacando-se os vários tipos de compósitos como laminados, particulados, fibrosos e demais composições, todos desenvolvidos para diversas aplicações. Tanto pela sua abundante presença na natureza, na ciência e na tecnologia, quanto pela sua grande diversidade de aplicações reais e possíveis, resulta necessário e relevante o estudo do comportamento físico dos meios heterogêneos.

Problemas que modelam materiais heterogêneos muitas das vezes possuem certas dificuldades. Por exemplo, materiais micro-heterogêneos (meios macroscopicamente homogêneos que apresentam heterogeneidade microscópica contínua) apresentam separação de escalas estruturais, pelo qual são modelados mediante equações diferenciais com coeficientes rapidamente oscilantes, o que dificulta (e muitas vezes impede) sua resolução analítica exata, precisando-se assim de boas aproximações da solução, sejam analíticas, semianalíticas ou numérico-computacionais. Especificamente, a separação de escalas estruturais característica dos meios micro-heterogêneos faz com que uma abordagem numérica direta precise de malhas muito finas para representar adequadamente a variação rápida dos coeficientes, o qual aumenta consideravelmente o custo computacional e compromete a convergência do método numérico escolhido (ver TIJONOV; SAMARSKY (1972, p.653) para um exemplo de esquema de diferenças finitas corretamente formulado que converge para uma função que não é a solução do problema).

Como alternativa, para favorecer a resolução dos problemas que modelam acuradamente o comportamento físico dos meios micro-heterogêneos, este trabalho apresenta o método de homogeneização assintótica (MHA; ver, por exemplo, BAKHVALOV; PANASENKO (1989)), o qual possibilita a obtenção de boas aproximações (analíticas e semianalíticas) da solução exata do problema em questão (LIMA et al., 2016). Isto é, da separação de escalas estruturais do meio e a continuidade de sua microestrutura, tem-se o cumprimento da chamada hipótese de homogeneidade equivalente. Basicamente, o MHA consiste na obtenção, partindo do problema para o meio micro-heterogêneo geralmente periódico (problema original), de um problema para um meio homogêneo ideal equivalente em certo sentido ao meio micro-heterogêneo (problema homogeneizado). Metodologicamente, o MHA baseia-se na construção formal de uma série assintótica em duas escalas da solução do problema de valores iniciais e de contorno com coeficientes rapidamente oscilantes que modela o fenômeno estudado. Este desenvolvimento assintótico é realizado em termos de potências do parâmetro geométrico pequeno que caracteriza a separação de escalas, e cujos coeficientes são funções incógnitas. Logo, o problema original se desacopla em uma recorrência de problemas para obter cada uma das funções incógnitas que formam a assintótica da solução procurada (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Nos anos 1960's e 1970's formularam-se as primeiras teorias matemáticas de homogeneização. Inicialmente, a concepção era encontrar uma solução assintótica formal (SAF) das equações em derivadas parciais que dependem do parâmetro pequeno ε (que representa a separação de escalas estruturais do meio) e com coeficientes periódicos rapidamente oscilantes que formam o comportamento constitutivo do meio heterogêneo. Especificamente, a SAF é uma série de potências de ε em duas escalas cuja substituição no problema para o meio heterogêneo produz uma recorrência

de problemas para os coeficientes das potências de ε , dos quais obtém-se os chamados problemas locais, e o problema homogeneizado. Neste último, as equações têm coeficientes constantes chamados de efetivos, os quais caracterizam o comportamento físico do meio homogêneo equivalente e, portanto, o comportamento efetivo do meio heterogêneo original. Logo, a hipótese de homogeneidade equivalente pode ser representada matematicamente pela igualdade assintótica $u^\varepsilon \sim u_0$ para ε suficientemente pequeno, em que u^ε é a solução do problema original com coeficientes rapidamente oscilantes para o meio micro-heterogêneo, e u_0 é a solução do problema homogeneizado com coeficientes constantes para o meio homogêneo equivalente. Isto é, $u^\varepsilon - u_0 = O(\varepsilon)$, ou seja, u^ε e u_0 são ε -próximas quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na norma $\|\cdot\|$ do espaço de funções em que elas são procuradas. Especificamente, isto significa que existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\|u^\varepsilon - u_0\| \leq C\varepsilon$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989; PANASENKO, 2008).

A aplicação mais importante do MHA é a caracterização de meios microperiódicos mediante a obtenção de suas propriedades efetivas. Por exemplo, em BRAVO-CASTILLERO et al. (2001), GUINOVART-DÍAZ et al. (2001), RODRÍGUEZ-RAMOS et al. (2001) e SABINA et al. (2001), obtiveram-se expressões fechadas para coeficientes efetivos de compósitos reforçados por fibras cilíndricas com periodicidade quadrada e hexagonal, e fases transversalmente isotrópicas nos contextos da elasticidade e a piezeletricidade; e em SABINA et al. (2002) e BRAVO-CASTILLERO et al. (2006), obtiveram-se fórmulas fechadas para as propriedades efetivas de compósitos elásticos com fases isotrópicas, reforçadas por fibras circulares distribuídas em esquemas quadrados e hexagonais, incluindo os casos limite de fibras vazias ou infinitamente rígidas e se prova que estão contidas no intervalo definido pelas cotas lineares de BRUNO (1991).

Por outro lado, o MHA possibilita a construção de SAFs de qualquer ordem de precisão em ε , o qual é muito útil em situações em que é necessário conhecer detalhadamente a influência da microestrutura no comportamento efetivo do material microperiódico (SU et al., 2011a,b; DONG et al., 2014; DÉCIO JR. et al., 2019). Em geral, isto não é possível mediante os outros métodos de homogeneização matemática, os quais produzem SAFs até a primeira ordem em ε , isto é, SAFs formadas por u_0 mais um corretor local de ordem $O(\varepsilon)$ (DÉCIO JR. et al., 2019). Essa característica do MHA permite estudar mais acuradamente o comportamento de meios localmente microperiódicos, isto é, meios que apresentam diferentes tipos de periodicidade em regiões diferentes do domínio (ver LOPEZ-PAMIES et al. (2008), LOPEZ-PAMIES; IDIART (2010) e RACHERLA et al. (2010) para estudos deste tipo de micro-heterogeneidade no contexto da hiperelasticidade via homogeneização variacional).

O objetivo deste trabalho é aplicar MHA a um problema de valores de contorno de Dirichlet para uma equação elíptica linear não homogênea unidimensional com coeficiente localmente periódico rapidamente oscilante e continuamente diferenciável que modela, por exemplo, o equilíbrio mecânico de uma barra elástica localmente microperiódica e funcionalmente graduada. O caráter linear unidimensional da equação considerada permite a resolver exatamente o problema mediante integração direta, o qual não é possível na maioria das situações e é apresentado aqui para ilustrar o fato de que as SAFs obtidas via MHA produzem boas aproximações da solução exata. A aplicação do MHA é desenvolvida rigorosamente com um nível de detalhes raramente encontrado na literatura especializada. O fato do coeficiente ser continuamente diferenciável é pouco considerado na literatura de modelagem matemática/computacional de materiais heterogêneos, sendo muito mais difundido o estudo de materiais compósitos cujas propriedades físicas são modeladas como sendo constantes por partes. Ainda, o caráter localmente periódico do coeficiente também é pouco considerado na literatura. Além disso, o exemplo desenvolvido é original e ilustra adequadamente os resultados teóricos, os quais, por sua vez, podem ser generalizados naturalmente para modelar situações tridimensionais em que a heterogeneidade ocorre em uma direção (por exemplo, esferas e cilindros centrossimétricos com heterogeneidade na direção radial e compósitos laminados com lâminas funcionalmente graduadas).

Depois desta Introdução, o trabalho está organizado nas cinco seções seguintes: Formulação do problema, Aplicação do MHA, Justificativa matemática do MHA, Exemplo e Conclusões.

Formulação do problema

Seja o parâmetro ε tal que $0 < \varepsilon \ll 1$. Sejam $a^\varepsilon \in C^1([0, 1])$, $f^\varepsilon \in C([0, 1])$, com a^ε estritamente positiva e limitada, tais que $a^\varepsilon(x) = a(x, x/\varepsilon)$ e $f^\varepsilon(x) = f(x, x/\varepsilon)$ em que $a \in C^1([0, 1] \times \mathbb{R}_+)$, $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}_+)$ são ε -periódicas na segunda componente. Sejam $\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{R}$ constantes. Considere o seguinte problema de valores de contorno: para cada $\varepsilon > 0$, encontrar $u^\varepsilon \in C^2([0, 1])$ tal que

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] + f^\varepsilon(x) = 0, & x \in (0, 1) \\ u^\varepsilon(0) = \nu_0, & u^\varepsilon(1) = \nu_1 \end{cases}. \quad (1)$$

O problema (1) apresenta as características fundamentais dos modelos de meios heterogêneos com microestrutura localmente periódica e, por ser suficientemente simples, permite sua resolução analítica por integração direta. Assim, a solução exata $u^\varepsilon(x)$ do problema (1) é

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{1}{a^\varepsilon(s)} \left[C^\varepsilon - \int_0^s f^\varepsilon(t) dt \right] ds + \nu_0, \quad (2)$$

em que

$$C^\varepsilon = \left(\int_0^1 \frac{ds}{a^\varepsilon(s)} \right)^{-1} \left[\nu_1 - \nu_0 + \int_0^1 \frac{1}{a^\varepsilon(s)} \int_0^s f^\varepsilon(t) dt ds \right]. \quad (3)$$

É importante observar que, na maioria dos problemas que surgem na modelagem de fenômenos em escalas múltiplas, expressões fechadas para suas soluções exatas não estão disponíveis. Neste trabalho, a solução exata $u^\varepsilon(x)$ do problema (1) dada por (2) e (3), é apresentada aqui para controlar a qualidade das aproximações dadas na forma de SAFs que são obtidas da aplicação do MHA (ver DÉCIO JR. et al. (2019) e PÉREZ-FERNÁNDEZ (2021) para estudos relacionados em dois contextos não lineares).

Aplicação do MHA

A ideia fundamental do MHA é procurar uma SAF do problema original como uma expansão em série assintótica de potências de ε em duas escalas x e $y = x/\varepsilon$, chamadas de variável global ou lenta e variável local ou rápida, respectivamente, da forma

$$u^\varepsilon(x) \sim u^{(\infty)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Ao substituir a SAF $u^{(\infty)}(x, \varepsilon)$ no problema original (1) obtém-se uma sequência recorrente de problemas para os coeficientes $u_k \in C^2([0, 1] \times \mathbb{R}_+)$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, das potências de ε , 1-periódicos em y . Dessa recorrência, determinam-se o problema homogeneizado para $u_0(x)$ (prova-se que não depende de y) e os problemas locais sobre a célula de periodicidade (elemento microestrutural básico cuja replicação periódica reproduz a estrutura do meio micro-heterogêneo localmente periódico) para as funções locais 1-periódicas em y relacionadas aos $u_k(x, y)$ (no caso mais simples do meio totalmente periódico para o qual $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$, as funções locais $N_k(y)$ são tais que $u_k(x, y) = N_k(y)(d^k u_0/dx^k)$ produzindo o chamado ansatz de Bakhvalov, ver PANASENKO (2008)). Por fim, tem-se que quando ε tende a zero, a solução exata $u^\varepsilon(x)$ e a SAF $u^{(\infty)}(x, \varepsilon)$ do problema original (1) convergem para a solução do problema homogeneizado (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Na maioria das aplicações do MHA, é suficiente adotar a SAF $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ dada por

$$u^\varepsilon(x) \sim u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (5)$$

Substituindo a SAF (5) na equação do problema (1) e utilizando a regra da cadeia para a derivada com relação à variável global/lenta x , tem-se

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y}\right) \left[a(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y}\right) u^{(2)}(x, \varepsilon) \right] + f(x, y) \sim 0. \tag{6}$$

Considerando que x e y são independentes e o operador diferencial linear

$$L_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(a(x, y) \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad \alpha, \beta \in \{x, y\}, \tag{7}$$

em (6) explicitando a SAF (5) tem-se

$$\begin{aligned} &L_{xx} [u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y)] + L_{xy} [\varepsilon^{-1} u_0(x, y) + u_1(x, y) + \varepsilon u_2(x, y)] \\ &+ L_{yx} [\varepsilon^{-1} u_0(x, y) + u_1(x, y) + \varepsilon u_2(x, y)] + L_{yy} [\varepsilon^{-2} u_0(x, y) + \varepsilon^{-1} u_1(x, y) + u_2(x, y)] + f(x, y) \sim 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Visto que $0 < \varepsilon \ll 1$, para cumprir-se a igualdade assintótica (8) os termos das potências não positivas do parâmetro pequeno ε devem anular-se. Logo, agrupando as potências de ε tem-se

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-2} L_{yy} u_0(x, y) + \varepsilon^{-1} [L_{yy} u_1(x, y) + L_{yx} u_0(x, y) + L_{xy} u_0(x, y)] \\ &+ \varepsilon^0 [L_{yy} u_2(x, y) + L_{xy} u_1(x, y) + L_{yx} u_1(x, y) + L_{xx} u_0(x, y) + f(x, y)] = O(\varepsilon), \end{aligned} \tag{9}$$

em que $O(\varepsilon)$ representa a reunião de termos proporcionais às potências positivas de ε . Assim, de (9) resulta o seguinte sistema de equações recorrentes:

$$\varepsilon^{-2} : L_{yy} u_0(x, y) = 0, \tag{10}$$

$$\varepsilon^{-1} : L_{yy} u_1(x, y) = -L_{yx} u_0(x, y) - L_{xy} u_0(x, y), \tag{11}$$

$$\varepsilon^0 : L_{yy} u_2(x, y) = -L_{xy} u_1(x, y) - L_{yx} u_1(x, y) - L_{xx} u_0(x, y) - f(x, y). \tag{12}$$

Formalmente, (10)-(12) precisam ser complementadas com condições que garantam a unicidade de suas soluções. Logo, de substituir a SAF (5) nas condições de contorno do problema original (1) considerando a 1-periodicidade em y de $u_k(x, y)$, $k \in \{0, 1, 2\}$, obtêm-se as condições

$$u_0(0, 0) = \nu_0, \quad u_0(1, 0) = \nu_1, \tag{13}$$

$$u_k(0, 0) = u_k(1, 0) = 0, \quad k \in \{1, 2\}. \tag{14}$$

Por outro lado, condições alternativas para a unicidade das soluções de (10)-(12) são obtidas de observar que, em presença de separação de escalas estruturais ($0 < \varepsilon \ll 1$), o comportamento físico do meio heterogêneo deve ser dominado pela escala macroscópica, ou seja, $u^\varepsilon = O(1)$, de maneira que independente da microestrutura e sua escala, ou seja, independente de y e ε (sobre efeitos de escala não desprezáveis no contexto do MHA, ver, por exemplo, BRAVO-CASTILLERO et al. (2024)). Assim, considerando a independência de x e y e a 1-periodicidade em y de $u_k(x, y)$, $k \in \{0, 1, 2\}$, o valor médio da SAF (5) com relação à microescala é

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &\sim \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} (u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y)) dy \\ &= \langle u_0(x, y) \rangle + \varepsilon \langle u_1(x, y) \rangle + \varepsilon^2 \langle u_2(x, y) \rangle, \end{aligned} \tag{15}$$

em que $\langle \cdot \rangle \equiv \int_0^1 (\cdot) dy$ é o operador de valor médio sobre a célula de periodicidade $[0, 1] \ni y$. Logo, notando que $\langle u_0(x, y) \rangle = O(1)$ e a arbitrariedade de ε em (15), obtêm-se as condições

$$u^\varepsilon(x) \sim \langle u_0(x, y) \rangle, \quad \langle u_k(x, y) \rangle = 0, \quad k \in \{1, 2\}. \tag{16}$$

Assim, os problemas para encontrar $u_k(x, y)$, $k \in \{0, 1, 2\}$, coeficientes 1-periódicos em y da SAF (5) do problema original (1) são, respectivamente, (10) com (13) ou a primeira condição em (16), (11) com (14) ou a segunda condição em (16) para $k = 1$, e (12) com (14) ou a segunda condição em (16) para $k = 2$.

Agora, observe que as equações na recorrência (10)-(12), para cada x fixo, são da forma $LN(y) = F(y)$, em que $L \equiv (d/dy)(\alpha(y)d/dy)$, $\alpha(y) \equiv a(x, y)$. O Lema a seguir fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de $N(y)$ solução 1-periódica dessa equação genérica, o qual é aplicado imediatamente depois para encontrar as soluções 1-periódicas em y do sistema recorrente (10)-(12) sujeito às condições (13) e (14), ou (16).

Lema (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) *Sejam $F(y)$ e $\alpha(y)$ funções 1-periódicas, com $\alpha(y)$ diferenciável, estritamente positiva e limitada. Então, uma condição necessária e suficiente para a existência de $N(y)$ solução 1-periódica da equação $LN(y) = F(y)$ é que $\langle F(y) \rangle = 0$. Ainda, a solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva $C \in \mathbb{R}$, ou seja, $N(y, C) = \tilde{N}(y) + C$ em que $\tilde{N}(0) = 0$ ou $\langle \tilde{N}(y) \rangle = 0$.*

Demonstração: ver pp. 19-21 de BAKHVALOV; PANASENKO (1989).

(a) Aplicação do Lema a (10) referente a $u_0(x, y)$:

Explicitamente, (10) é

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = 0, \tag{17}$$

da qual, identificando com as grandezas no Lema, toma-se $N(y) \equiv u_0(x, y)$ e $F(y) \equiv 0$ para cada x fixo, e garante-se assim a existência de $u_0(x, y)$ 1-periódica em y solução de (10), pois $\langle F(y) \rangle = \langle 0 \rangle = 0$.

Integrando (17) com relação à variável local/rápida y , tem-se que

$$a(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = C_0(x), \tag{18}$$

em que $C_0(x)$ é uma constante com relação a y . Uma vez que $a(x, y)$ é positiva, é possível isolar a derivada em (18) e aplicar o operador de média $\langle \cdot \rangle$ à equação resultante levando em conta que $u_0(x, y)$ é 1-periódica em y . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{C_0(x)}{a(x, y)} \implies 0 = \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\rangle &= C_0(x) \langle [a(x, y)]^{-1} \rangle \implies C_0(x) = 0 \\ \implies \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \implies u_0(x, y) &= u_0(x) \end{aligned} \tag{19}$$

ou seja, **u_0 independe de y** . Diante disso, reescrevendo as condições (13) e a primeira de (16), respectivamente, obtém-se

$$u_0(0) = \nu_0, \quad u_0(1) = \nu_1, \tag{20}$$

$$u^\varepsilon(x) \sim u_0(x). \tag{21}$$

(b) Aplicação do Lema a (11) referente a $u_1(x, y)$:

Por $u_0(x)$ não depender de y , conforme (19), segue que (11) reduz-se a

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] = -\frac{\partial a}{\partial y} \frac{du_0}{dx}, \tag{22}$$

em que $N(y) \equiv u_1(x, y)$ e $F(y) \equiv -(\partial a / \partial y)(du_0 / dx)$ para cada x fixo por identificação com as grandezas no Lema, garantindo-se assim a existência de $u_1(x, y)$ 1-periódica em y solução de (22) pois, dado que $a(x, y)$ é 1-periódica em y , tem-se $\langle F(y) \rangle = -\langle \partial a / \partial y \rangle (du_0 / dx) = 0$.

O formato do lado direito de (22) sugere procurar $u_1(x, y)$ da forma

$$u_1(x, y) = N_1(x, y) \frac{du_0}{dx}, \tag{23}$$

em que, para cada x fixo, $N_1(x, y)$ é 1-periódica em y tal que $N_1(x, 0) = 0$ ou $\langle N_1(x, y) \rangle = 0$, que são as condições obtidas de substituir (23) nas condições (14) e (16) para $k = 1$, respectivamente, considerando x e y independentes.

Substituindo (23) em (22) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial N_1}{\partial y} + a(x, y) \right] \frac{du_0}{dx} = 0. \tag{24}$$

Assim, com $du_0/dx \neq 0$, $N_1(x, y)$ é a solução 1-periódica em y do chamado **primeiro problema local** definido, para cada x fixo, pela equação

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial N_1}{\partial y} + a(x, y) \right] = 0 \tag{25}$$

e por uma das condições $N_1(x, 0) = 0$ ou $\langle N_1(x, y) \rangle = 0$.

Observe que, da identificação $N(y) \equiv N_1(x, y)$ e $F(y) = -\partial a/\partial y$ para x fixo, o Lema garante que existe $N_1(x, y)$ solução 1-periódica em y de (25), pois $\langle F(y) \rangle = -\langle \partial a/\partial y \rangle = 0$ dado que $a(x, y)$ é 1-periódica em y .

Integrando (25) com relação a y , tem-se que

$$a(x, y) \frac{\partial N_1}{\partial y} + a(x, y) = C_1(x), \tag{26}$$

em que $C_1(x)$ é uma constante com relação a y . Uma vez que $a(x, y)$ é positiva, é possível isolar a derivada em (26) e aplicar o operador de valor médio $\langle \cdot \rangle$ à equação resultante levando em conta que $N_1(x, y)$ é 1-periódica em y . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{C_1(x)}{a(x, y)} - 1 &\implies 0 = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial y} \right\rangle = C_1(x) \langle [a(x, y)]^{-1} \rangle - 1 \\ &\implies C_1(x) = \langle [a(x, y)]^{-1} \rangle^{-1} \equiv \hat{a}(x) \end{aligned} \tag{27}$$

em que $\hat{a}(x)$ é o **coeficiente efetivo**. Observe que, de (26) e (27), tem-se

$$\hat{a}(x) = \langle [a(x, y)]^{-1} \rangle^{-1} = a(x, y) \frac{\partial N_1}{\partial y} + a(x, y). \tag{28}$$

Assim, a solução 1-periódica do primeiro problema local (25) é

$$N_1(x, y) = \int_0^y \left[\frac{\hat{a}(x)}{a(x, s)} - 1 \right] ds + C_2(x), \tag{29}$$

que é única salvo uma constante aditiva $C_2(x)$, a qual, dependendo da condição de unicidade escolhida, é dada por

$$C_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } N_1(x, 0) = 0 \\ -\left\langle \int_0^y \left[\frac{\hat{a}(x)}{a(x, s)} - 1 \right] ds \right\rangle & \text{se } \langle N_1(x, y) \rangle = 0 \end{cases} \tag{30}$$

(c) Aplicação do Lema a (12) referente a $u_2(x, y)$:

Como $u_0(x)$ não depende de y por (19), e $u_1(x, y)$ é dada por (23), (12) se escreve como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] &= - \frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \left(N_1(x, y) \frac{du_0}{dx} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, y) \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{du_0}{dx} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, y) \frac{du_0}{dx} \right] - f(x, y), \end{aligned} \quad (31)$$

ou, ainda, usando (28) em (31),

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = - \frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \left(N_1(x, y) \frac{du_0}{dx} \right) \right] - \frac{d}{dx} \left[\hat{a}(x) \frac{du_0}{dx} \right] - f(x, y), \quad (32)$$

em que, identificando com as grandezas no Lema, $N(y) \equiv u_2(x, y)$ e sendo $F(y)$ o lado direito de (32) para cada x fixo, existe $u_2(x, y)$ 1-periódica em y solução de (32) se, e somente se,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \left(N_1(x, y) \frac{du_0}{dx} \right) \right] + \frac{d}{dx} \left[\hat{a}(x) \frac{du_0}{dx} \right] + f(x, y) \right\rangle = 0. \quad (33)$$

Levando em conta que $a(x, y)$ e $N_1(x, y)$ são 1-periódicas em y , de maneira que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \left(N_1(x, y) \frac{du_0}{dx} \right) \right] \right\rangle = 0, \quad (34)$$

segue que a condição necessária e suficiente (33) para a existência de $u_2(x, y)$ solução 1-periódica em y de (32) reduz-se à **equação homogeneizada**

$$\frac{d}{dx} \left[\hat{a}(x) \frac{du_0}{dx} \right] + \hat{f}(x) = 0, \quad (35)$$

em que $\hat{f}(x) = \langle f(x, y) \rangle$, ou seja, existe $u_2(x, y)$ solução 1-periódica em y de (32) se, e somente se, existe $u_0(x)$ solução do **problema homogeneizado** definido pela equação homogeneizada (35) e as condições de contorno (20) obtidas ao substituir a SAF (5) nas condições de contorno do problema original (1) com $u_0(x)$ independente de y .

Seja $u_0(x)$ a solução do problema homogeneizado. Então, (35) é uma identidade, $u_1(x, y)$ em (23) com $N_1(x, y)$ solução 1-periódica em y do primeiro problema local está completamente determinado, e $u_2(x, y)$ é solução 1-periódica em y de

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = \hat{f}(x) - f(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial N_1}{\partial x} \right] \frac{du_0}{dx} - \frac{\partial}{\partial y} [a(x, y) N_1(x, y)] \frac{d^2 u_0}{dx^2}, \quad (36)$$

obtida ao substituir (35) em (32) e abrindo a derivada com relação a x mais externa no primeiro termo do lado direito.

De forma análoga ao realizado para $u_1(x, y)$ em (22) e à análise subsequente, o formato do lado direito de (36) sugere procurar $u_2(x, y)$ da forma

$$u_2(x, y) = N_{20}(x, y) + N_{21}(x, y) \frac{du_0}{dx} + N_{22}(x, y) \frac{d^2 u_0}{dx^2}, \quad (37)$$

em que $N_{2k}(x, y)$, $k \in \{0, 1, 2\}$, são 1-periódicas em y com $N_{2k}(x, 0) = 0$ ou $\langle N_{2k}(x, y) \rangle = 0$, que são as condições obtidas ao substituir (37) nas condições (14) e (16) para $k = 2$, respectivamente, considerando x e y independentes. Substituindo (37) em (36) e considerando $d^m u_0 / dx^m \neq 0$, $m \in \{1, 2\}$, tem-se que $N_{2k}(x, y)$, $k \in \{0, 1, 2\}$, são, respectivamente, as

soluções 1-periódicas em y dos três **segundos problemas locais** definidos, para cada x fixo, pela equações

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial N_{2k}}{\partial y} \right] = \begin{cases} \widehat{f}(x) - f(x, y) & \text{se } k = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial N_1}{\partial x} \right] & \text{se } k = 1 \\ -\frac{\partial}{\partial y} [a(x, y)N_1(x, y)] & \text{se } k = 2 \end{cases}. \quad (38)$$

e uma das famílias de condições $N_{2k}(x, 0) = 0$ ou $\langle N_{2k}(x, y) \rangle = 0$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Observe que, em virtude da definição de $\widehat{f}(x)$ e a 1-periodicidade em y de $a(x, y)$ e $N_1(x, y)$, o Lema garante a existência de $N_{2k}(x, y)$, $k \in \{0, 1, 2\}$, soluções 1-periódicas em y do segundos problemas locais (38). Assim, seguindo um procedimento similar ao de resolução do primeiro problema local (25), tem-se:

(c.1) Primeiro dos segundos problemas locais referente a $N_{20}(x, y)$ ((38) com $k = 0$):

A solução $N_{20}(x, y)$, 1-periódica em y , do primeiro segundo problema local

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial N_{20}}{\partial y} \right] = \widehat{f}(x) - f(x, y) \quad (39)$$

é

$$N_{20}(x, y) = \int_0^y \frac{1}{a(x, s)} \left[\int_0^s (\widehat{f}(x) - f(x, t)) dt + C_{10}(x) \right] ds + C_{20}(x), \quad (40)$$

em que

$$C_{10}(x) = \widehat{a}(x) \left\langle \frac{1}{a(x, y)} \int_0^y (f(x, s) - \widehat{f}(x)) ds \right\rangle \quad (41)$$

e

$$N_{20}(x, 0) = 0 \implies C_{20}(x) = 0 \quad (42)$$

ou

$$\langle N_{20}(x, y) \rangle = 0 \implies C_{20}(x) = \left\langle \int_0^y \frac{1}{a(x, s)} \left[\int_0^s (f(x, t) - \widehat{f}(x)) dt - C_{10}(x) \right] ds \right\rangle. \quad (43)$$

(c.2) Segundo dos segundos problemas locais referente a $N_{21}(x, y)$ ((38) com $k = 1$):

A solução $N_{21}(x, y)$, 1-periódica em y , do segundo segundo problema local

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial N_{21}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial N_1}{\partial x} \right] \quad (44)$$

é

$$N_{21}(x, y) = \int_0^y \left[\frac{\widehat{a}(x)}{a(x, s)} \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial x} \right\rangle - \frac{\partial N_1}{\partial x} \right] ds + C_{21}(x), \quad (45)$$

em que

$$N_{21}(x, 0) = 0 \implies C_{21}(x) = 0, \quad (46)$$

ou

$$\langle N_{21}(x, y) \rangle = 0 \implies C_{21}(x) = \left\langle \int_0^y \left[\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\widehat{a}(x)}{a(x, s)} \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial x} \right\rangle \right] ds \right\rangle. \quad (47)$$

(c.3) Terceiro dos segundos problemas locais referente a $N_{22}(x, y)$ ((38) com $k = 2$):

A solução $N_{22}(x, y)$, 1-periódica em y , do terceiro segundo problema local

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial N_{22}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} [a(x, y)N_1(x, y)] \quad (48)$$

é

$$N_{22}(x, y) = \int_0^y \left[\frac{\widehat{a}(x)}{a(x, s)} \langle N_1(x, s) \rangle - N_1(x, s) \right] ds + C_{22}(x), \quad (49)$$

em que

$$N_{22}(x, 0) = 0 \implies C_{22}(x) = 0 \quad (50)$$

ou

$$\langle N_{22}(x, y) \rangle = 0 \implies C_{22}(x) = \left\langle \int_0^y \left[N_1(x, s) - \frac{\widehat{a}(x)}{a(x, s)} \langle N_1(x, s) \rangle \right] ds \right\rangle. \quad (51)$$

Assim, sendo $u_0(x)$ a solução do problema homogeneizado (35) e (20), $u_2(x, y)$ em (37) fica totalmente determinado por (40) com (41) e (42) ou (43), (45) com (46) ou (47), e (49) com (50) ou (51).

Assim, das considerações apresentadas até aqui, segue que a SAF (5) é especificada como

$$u^\varepsilon(x) \sim u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_1^\varepsilon(x) \frac{du_0}{dx} + \varepsilon^2 \left(N_{20}^\varepsilon(x) + N_{21}^\varepsilon(x) \frac{du_0}{dx} + N_{22}^\varepsilon(x) \frac{d^2u_0}{dx^2} \right), \quad (52)$$

em que $N_{(\cdot)}^\varepsilon(x) = N_{(\cdot)}(x, x/\varepsilon)$, e $u_0(x)$ é a solução do problema homogeneizado definido pela equação homogeneizada (35) e as condições de contorno (20) e que pode ser obtida por integração direta como

$$u_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\widehat{a}(s)} \left[C_0 - \int_0^s \widehat{f}(t) dt \right] ds + \nu_0, \quad (53)$$

em que

$$C_0 = \left(\int_0^1 \frac{ds}{\widehat{a}(s)} \right)^{-1} \left[\nu_1 - \nu_0 + \int_0^1 \frac{1}{a^\varepsilon(s)} \int_0^s \widehat{f}(t) dt ds \right]. \quad (54)$$

A maioria das aplicações na literatura consideram apenas os dois primeiros termos da SAF $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ dada por (52), produzindo-se, assim, a SAF $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ dada por

$$u^\varepsilon(x) \sim u^{(1)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_1^\varepsilon(x) \frac{du_0}{dx}. \quad (55)$$

Ainda, observe que a SAF mais simples é, de fato, independente de ε :

$$u^{(0)}(x, \varepsilon) = u_0(x). \quad (56)$$

Finalmente, note que, de fato, tem-se construído duas famílias de SAFs dependendo das condições de unicidade escolhidas para as soluções dos problemas locais. Isto faz com que as SAFs da família construída com as condições de Dirichlet homogêneas ($N(0) = 0$) cumpram as condições de contorno do problema original (1), pois delas foram herdadas. Por outro lado, as SAFs dependentes de ε da família construída com as condições de média nula ($\langle N(y) \rangle = 0$) não cumprem as condições de contorno salvo em casos particulares (ver, por exemplo, LIMA et al. (2018)) e, portanto, são válidas só no interior do domínio. Caso necessário, tais SAFs precisam ser modificadas corrigidas mediante, por exemplo, alguma técnica de camada limite (ROCHA, 2010) ou de função de corte (LIMA et al., 2018).

Ainda, na maioria das aplicações do MHA que pretendem caracterizar o comportamento efetivo de um material heterogêneo constitutivamente linear, ou seja, obter seus coeficientes efetivos, as condições de unicidade para os problemas locais são irrelevantes, pois os coeficientes efetivos só dependem das derivadas das soluções dos problemas locais. Assim, com estas considerações, e levando em conta a dificuldade de avaliar as condições de contorno em problemas multidimensionais, a condição de unicidade usualmente escolhida é a condição de média nula oriunda da condição de que a média da solução exata com relação à microestrutura deve ser o primeiro termo das SAF, isto é, aquele que provadamente não depende de y nem de ε , de maneira análoga a (15) e à análise posterior (para enunciado e demonstração da versão multidimensional do Lema com condição de média nula, ver p. 106 de BAKHVALOV; PANASENKO (1989)).

Justificativa matemática do MHA

Deve-se provar que vale a hipótese de homogeneidade equivalente, ou seja, a ε -proximidade entre $u^\varepsilon(x)$ (solução do problema original (1)) e $u_0(x)$ (solução do problema homogeneizado (35) e (20)) quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na norma $\|\cdot\|_{C([0,1])} = \max_{x \in [0,1]} \{|\cdot|\}$. Em LUZ et al. (2022), isto é provado

para o caso particular em que $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$, com relação à norma de $L^2([0, 1])$, pois considera os casos de coeficiente continuamente diferenciável e coeficiente constante por partes.

Seja $F^\varepsilon(x) = F(x, x/\varepsilon)$ o erro da SAF $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ em (55) que cumpre as condições de contorno do problema original (1) como aproximação da solução exata $u^\varepsilon(x)$, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[a^\varepsilon(x) \frac{du^{(1)}}{dx} \right] + f^\varepsilon(x) = F^\varepsilon(x), & x \in (0, 1) \\ u^{(1)}(0) = \nu_0, & u^{(1)}(1) = \nu_1 \end{cases} \quad (57)$$

Em virtude da linearidade dos problemas (1) e (57), a diferença entre eles produz o problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[a^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} (u^\varepsilon(x) - u^{(1)}(x, \varepsilon)) \right] + F^\varepsilon(x) = 0, & x \in (0, 1) \\ u^\varepsilon(0) - u^{(1)}(0, \varepsilon) = u^\varepsilon(1) - u^{(1)}(1, \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (58)$$

a partir do qual é possível estimar a diferença $u^\varepsilon(x) - u^{(1)}(x, \varepsilon)$ mediante a aplicação da estimativa no Teorema 3.2, p.27, de LARSSON; THOMÉE (2009), oriunda do princípio do máximo para um problema de Dirichlet para equações elípticas no Teorema 3.1, pp. 26-27, de LARSSON; THOMÉE (2009), isto é, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,1])} \leq C \|F^\varepsilon\|_{C([0,1])}. \quad (59)$$

Assim, para estimar a diferença $u^\varepsilon(x) - u^{(1)}(x, \varepsilon)$ basta obter uma estimativa do erro $F^\varepsilon(x)$.

Ao substituir a SAF $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ dada em (55) na equação do problema (57) e operar algebricamente levando em conta o coeficiente efetivo $\hat{a}(x)$ em (28), a equação do primeiro problema local (25), a equação homogeneizada (35), e (36) com $u_2(x, x/\varepsilon) \equiv 0$ da SAF $u^{(1)}(x, \varepsilon)$, obtém-se

$$F^\varepsilon(x) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[a^\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(N_1^\varepsilon(x) \frac{du_0}{dx} \right) \right] \implies \|F^\varepsilon\|_{C([0,1])} \leq A\varepsilon, \quad (60)$$

em que a constante $A \in \mathbb{R}_+^*$ resulta de aplicar o Teorema de Weierstrass (Corolário, p.239, de LIMA (2010)) considerando que $a^\varepsilon \in C^1([0, 1])$, $N_1^\varepsilon \in C^2([0, 1])$ e assumindo que $u_0 \in C^3([0, 1])$. Logo, pondo a estimativa (60) para $F^\varepsilon(x)$ na estimativa (59) para $u^\varepsilon(x) - u^{(1)}(x, \varepsilon)$, tem-se

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,1])} \leq AC\varepsilon \iff u^\varepsilon(x) - u^{(1)}(x, \varepsilon) = O(\varepsilon) \iff u^\varepsilon(x) \sim u^{(1)}(x, \varepsilon). \quad (61)$$

Por outro lado, da SAF $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ em (55) tem-se

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, \varepsilon) - u_0(x) &= \varepsilon N_1^\varepsilon(x) \frac{du_0}{dx} \implies \|u^{(1)} - u_0\|_{C([0,1])} \leq B\varepsilon \\ &\iff u^{(1)}(x, \varepsilon) - u_0(x) = O(\varepsilon) \iff u^{(1)}(x, \varepsilon) \sim u_0(x), \end{aligned} \quad (62)$$

em que a constante $B \in \mathbb{R}_+^*$ resulta de aplicar o Teorema de Weierstrass.

Portanto, de utilizar (61) e (62) na desigualdade triangular para $\|u^\varepsilon - u_0\|_{C([0,1])}$, segue que

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_0\|_{C([0,1])} &= \|u^\varepsilon - u^{(1)} + u^{(1)} - u_0\|_{C([0,1])} \leq \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,1])} + \|u^{(1)} - u_0\|_{C([0,1])} \\ &\leq AC\varepsilon + B\varepsilon = (AC+B)\varepsilon \implies u^\varepsilon(x) - u_0(x) = O(\varepsilon) \iff u^\varepsilon(x) \sim u_0(x), \end{aligned} \quad (63)$$

como se queria demonstrar.

Exemplo

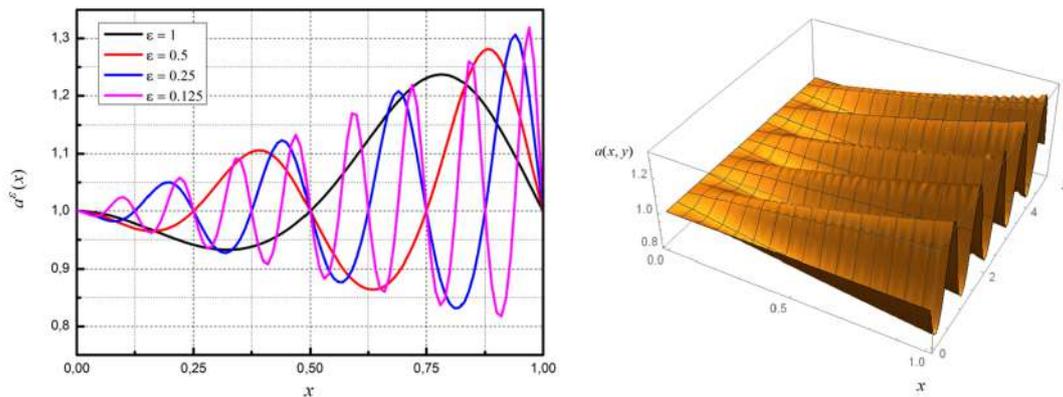
Nesta seção, apresenta-se um exemplo em que se compara a solução exata $u^\varepsilon(x)$ com as SAFs $u^{(k)}(x, \varepsilon)$, $k \in \{0, 1, 2\}$, para valores decrescentes de ε e, dessa maneira, ilustrar o fato de que $u^\varepsilon(x) \sim u^{(2)}(x, \varepsilon) \sim u^{(1)}(x, \varepsilon) \sim u^{(0)}(x, \varepsilon) = u_0(x)$, ou seja, $u^\varepsilon(x), u^{(k)}(x, \varepsilon) \rightarrow u_0(x)$, $k \in \{1, 2\}$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Isto é, em caso de impossibilidade de obter-se a solução exata de um certo problema, as SAFs de um, dois e três termos fornecem boas aproximações da solução exata para valores suficientemente pequenos do parâmetro pequeno que caracteriza a separação de escalas estruturais, e que a escolha da SAF para realizar a aproximação no contexto em que o problema original está inserido depende de quão detalhadamente precisa-se conhecer o comportamento local da solução exata.

Considere o problema original (1) com as condições de contorno $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 1$, e coeficiente $a^\varepsilon(x)$ e termo independente $f^\varepsilon(x)$ definidos, respectivamente, por

$$a^\varepsilon(x) = \left(1 + \frac{x}{4} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)^{-1} \quad \text{e} \quad f^\varepsilon(x) = \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi x}{\varepsilon}, \quad (64)$$

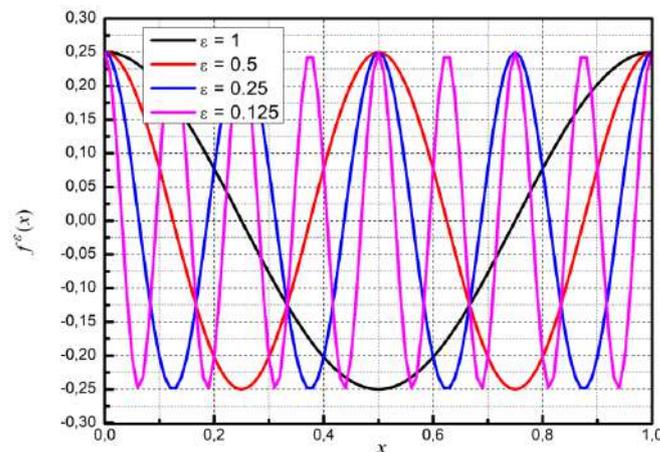
cujos comportamentos são apresentados nas Figuras 1 e 2, respectivamente.

Figura 1: Comportamentos do coeficiente $a^\varepsilon(x)$ definido em (64) como $a(x, x/\varepsilon)$ para $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (esquerda) e como $a(x, y)$, $y = x/\varepsilon$ (direita).



Fonte: Dos autores.

Figura 2: Comportamento do termo independente $f^\varepsilon(x)$ definido em (64).



Fonte: Dos autores.

Assim, a solução exata (2) e (3) do problema original (1) com coeficiente e termo independente dados por (64) e as condições de contorno $\nu_0 = 0$ e $\nu_1 = 1$ pode ser escrita como

$$u^\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon(1 + g_1^\varepsilon(1))(\varepsilon g_2^\varepsilon(x) + x)}{\varepsilon^2 g_2^\varepsilon(1) + 16\pi^2} - g_1^\varepsilon(x), \tag{65}$$

em que

$$g_k^\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon^3}{1024\pi^3} \left(1 + \frac{8\pi^2 x^2}{\varepsilon^2} - \cos \frac{4\pi x}{\varepsilon} + \frac{128\pi}{\varepsilon} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{\varepsilon} - \frac{4\pi x}{\varepsilon} \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{\varepsilon} \right) & \text{se } k = 1 \\ \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\varepsilon} - \frac{2\pi x}{\varepsilon} \cos \frac{2\pi x}{\varepsilon} & \text{se } k = 2 \end{cases}. \tag{66}$$

Por outro lado, de (64) tem-se que o coeficiente efetivo e o termo independente médio são, respectivamente,

$$\widehat{a}(x) = \left\langle 1 + \frac{x}{4} \operatorname{sen} 2\pi y \right\rangle^{-1} = 1 \quad \text{e} \quad \widehat{f}(x) = \left\langle \frac{1}{4} \cos 2\pi y \right\rangle = 0, \tag{67}$$

de maneira que, dadas as condições de contorno $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 1$, a solução do problema homogeneizado (35) e (20) é

$$u^{(0)}(x, \varepsilon) = u_0(x) = x. \tag{68}$$

Por outro lado, a SAF $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ dada por (55) é

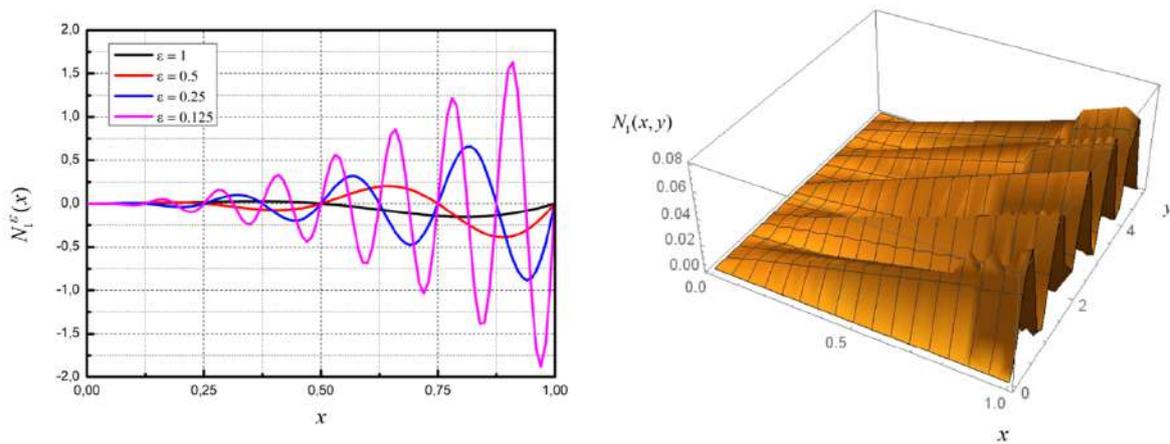
$$u^{(1)}(x, \varepsilon) = x + \varepsilon \frac{x}{4\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{\varepsilon}, \tag{69}$$

em que

$$N_1(x, y) = \frac{x}{4\pi} \operatorname{sen}^2 \pi y \tag{70}$$

é a solução (29) do primeiro problema local com condição de unicidade $N_1(x, 0) = 0$, cujo comportamento é apresentado na Figura 3.

Figura 3: Comportamentos da função local $N_1^\varepsilon(x)$ como $N_1(x, x/\varepsilon)$ para $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (esquerda) e como $N_1(x, y)$, $y = x/\varepsilon$ (direita).



Fonte: Dos autores.

Ainda, observe que a SAF $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ em (69) é uma oscilação ao redor da solução do problema homogeneizado $u_0(x)$.

Por outro lado, a SAF $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ dada por (52) é

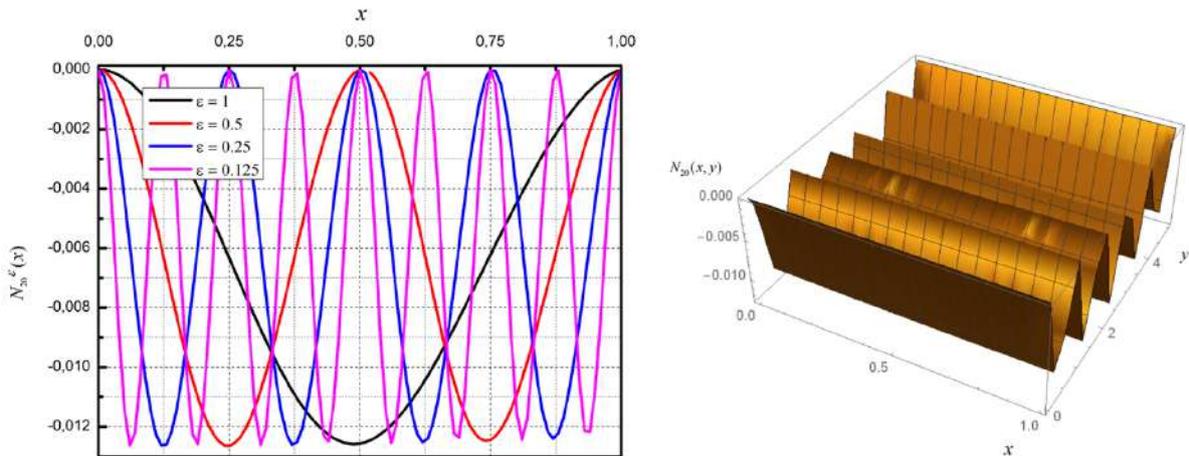
$$u^{(2)}(x, \varepsilon) = x + \varepsilon \frac{x}{4\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{\varepsilon} + \varepsilon^2 \frac{1}{256\pi^2} \left[(x^2 + 8x - 32) \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{\varepsilon} + x \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{\varepsilon} + 16 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\varepsilon} \right], \tag{71}$$

em que

$$N_{2k}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{256\pi^2} ((x^2 - 32) \sin^2 \pi y + x \sin 4\pi y) & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{32\pi^2} (x \sin^2 \pi y + 2 \sin 2\pi y) & \text{se } k = 1 \end{cases} \quad (72)$$

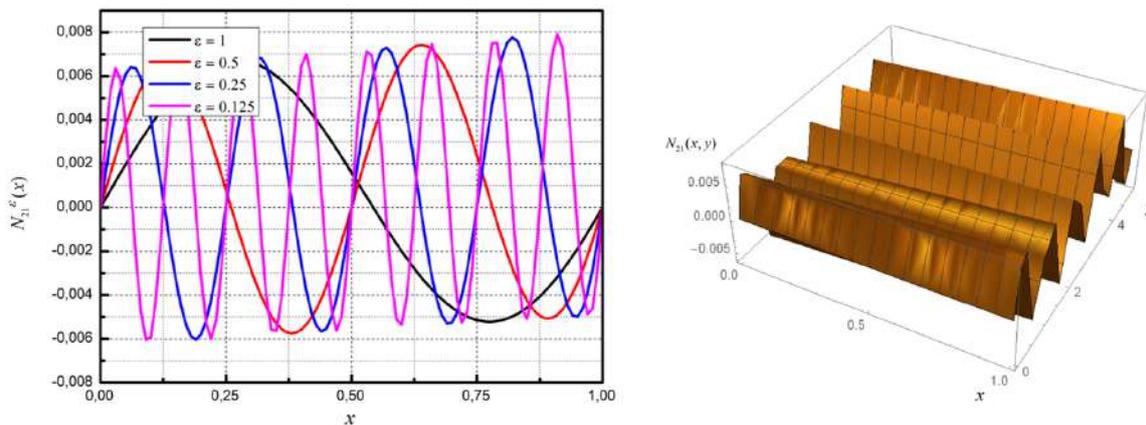
e $N_{22}(x, y) = xN_{21}(x, y)$ são, respectivamente, as soluções (40), (45) e (49) dos segundos problemas locais com condições de unicidade $N_{2k}(x, 0) = 0$, $k \in \{0, 1, 2\}$, cujos comportamentos são apresentados nas Figuras 4, 5 e 6.

Figura 4: Comportamentos da função local $N_{20}^\varepsilon(x)$ como $N_1(x, x/\varepsilon)$ para $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (esquerda) e como $N_{20}(x, y)$, $y = x/\varepsilon$ (direita).



Fonte: Dos autores.

Figura 5: Comportamentos da função local $N_{21}^\varepsilon(x)$ como $N_1(x, x/\varepsilon)$ para $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (esquerda) e como $N_{21}(x, y)$, $y = x/\varepsilon$ (direita).

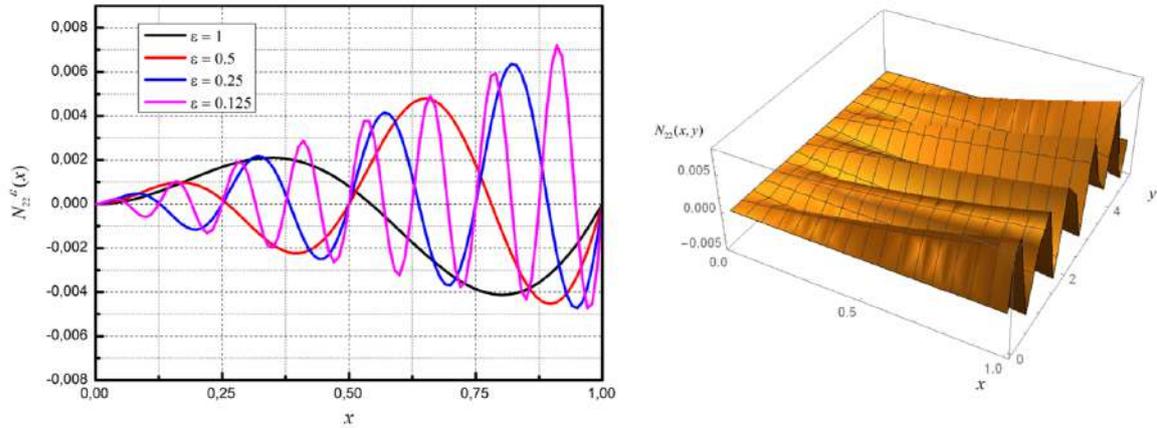


Fonte: Dos autores.

Note que, de fato, neste exemplo, $N_{22}(x, y)$ não contribui à SAF $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ pois $d^2u_0/dx^2 = 0$. Mesmo assim, $N_{22}(x, y)$ é fornecido aqui para completude pois, por exemplo, basta considerar algum $f^\varepsilon(x)$ tal que $u_0(x)$ não seja uma função linear para ter-se $d^2u_0/dx^2 \neq 0$ e, portanto, a contribuição de $N_{22}(x, y)$.

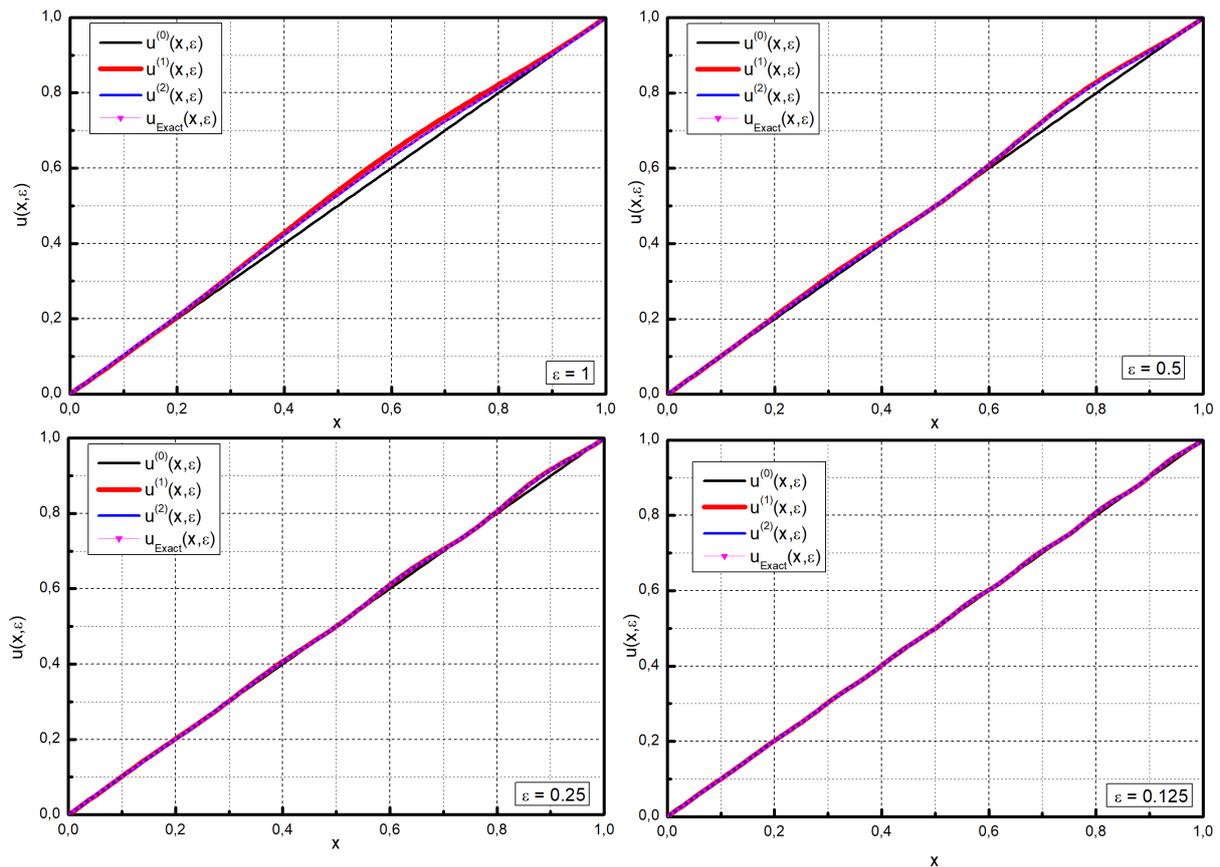
Na Figura 7, apresenta-se a comparação da solução exata $u^\varepsilon(x)$ dada por (65) e (66), com as SAFs $u^{(m)}(x, \varepsilon)$, $m \in \{0, 1, 2\}$, dadas por (68), (69) e (71), respectivamente, para os valores decrescentes do parâmetro pequeno $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, o que mostra qualitativamente que $u^\varepsilon(x), u^{(m)}(x, \varepsilon) \rightarrow u_0(x)$, $m \in \{1, 2\}$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Figura 6: Comportamentos da função local $N_{22}^\varepsilon(x)$ como $N_1(x, x/\varepsilon)$ para $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (esquerda) e como $N_{22}(x, y)$, $y = x/\varepsilon$ (direita).



Fonte: Dos autores.

Figura 7: Solução exata $u^\varepsilon(x)$ e SAFs $u^{(j)}(x, \varepsilon)$, $j \in \{0, 1, 2\}$ para $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.



Fonte: Dos autores.

Ainda, a qualidade da aproximação $u^\varepsilon(x) \sim u^{(2)}(x, \varepsilon) \sim u^{(1)}(x, \varepsilon) \sim u_0(x)$, é quantificada calculando o erro máximo absoluto E_m^ε em que incorre a SAF $u^{(m)}(x, \varepsilon)$, $m \in \{0, 1, 2\}$, como aproximação da solução exata $u^\varepsilon(x)$, o qual é dado por

$$E_k^\varepsilon = \left\| u^\varepsilon(x) - u^{(k)}(x, \varepsilon) \right\|_{C([0,1])} = \max_{x \in [0,1]} \left| u^\varepsilon(x) - u^{(k)}(x, \varepsilon) \right|, \quad k \in \{0, 1, 2\}, \quad (73)$$

e apresentado na Tabela 1, na qual observa-se que $E_2^\varepsilon < E_1^\varepsilon < E_0^\varepsilon$ para todos os valores de ε , ou seja, SAFs com mais termos aproximam melhor a solução exata. Ainda, observa-se que $E_k^\varepsilon \rightarrow 0^+$, $k \in \{0, 1, 2\}$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, sendo mais rápido o decrescimento do erro para as SAFs com mais termos.

Tabela 1: Erros máximos absolutos E_k^ε de $u^{(k)}(x, \varepsilon)$ via (73).

ε	E_2^ε	E_1^ε	E_0^ε
1.000	8.13×10^{-4}	1.28×10^{-2}	3.10×10^{-2}
0.500	3.30×10^{-4}	3.32×10^{-3}	2.77×10^{-2}
0.250	1.61×10^{-4}	8.50×10^{-4}	1.69×10^{-2}
0.125	8.70×10^{-5}	2.10×10^{-4}	9.17×10^{-3}

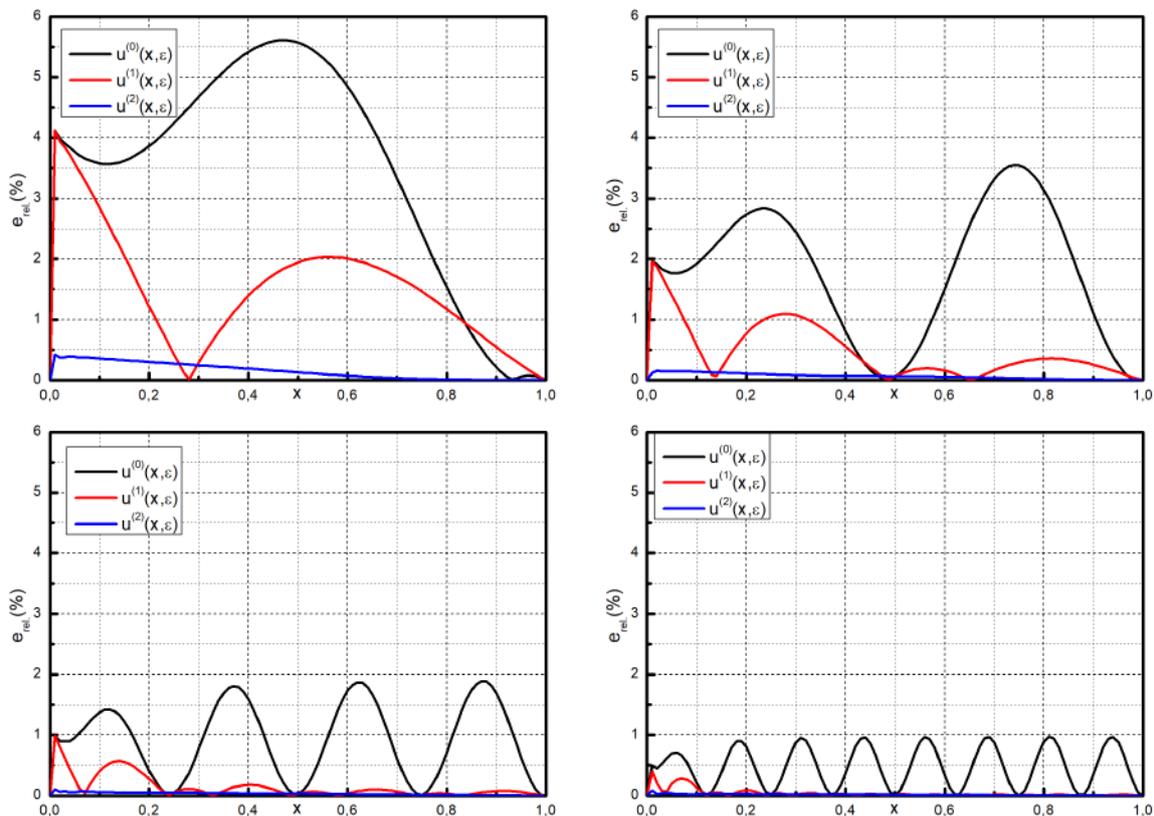
Fonte: Dos autores.

Além disso, o comportamento do erro máximo absoluto apresentado na Tabela 1 é mostrado ponto a ponto na Figura 8 considerando o erro relativo pontual percentual $e_k^\varepsilon(x)$, $k \in \{0, 1, 2\}$, dado por

$$e_k^\varepsilon(x) = \frac{u^{(k)}(x, \varepsilon) - u^\varepsilon(x)}{u^\varepsilon(x)} \times 100. \tag{74}$$

O comportamento do erro relativo ao longo do domínio demonstra ser periódico para a SAF $u^{(0)}(x, \varepsilon)$ e decresce a amplitude conforme $\varepsilon \rightarrow 0^+$. O erro de $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ traz comportamento periódico e amortecido à medida que o valor de x aumenta. O erro de $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ possui maior estabilidade, o que significa, além de possuir valores próximos da solução exata $u^\varepsilon(x)$, seu gráfico possui um formato condizente com o gráfico exato.

Figura 8: Erros relativos das SAFs $u^{(j)}(x, \varepsilon)$, $j \in \{0, 1, 2\}$ como aproximações da solução exata $u^\varepsilon(x)$ para $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.



Fonte: Dos autores.

Conclusões

Neste trabalho, apresentou-se o MHA como abordagem de construção analítica de soluções aproximadas de problemas de valores de contorno. Em caso de impossibilidade de obter-se diretamente a solução exata de um certo problema, as SAFs de um, dois e três termos fornecem boas aproximações da solução exata para valores suficientemente pequenos do parâmetro pequeno que caracteriza a separação de escalas estruturais. A escolha da SAF para realizar a aproximação depende de quão detalhadamente precisa-se conhecer o comportamento local da solução exata. Mais precisamente, a SAF de um termo é suficiente para representar a tendência da solução exata e corresponde ao comportamento macroscópico efetivo do meio micro-heterogêneo; a SAF de dois termos inclui informação do comportamento local da solução exata, ou seja, da influência da microestrutura; a SAF de três termos pode ser empregada para representar com maior precisão o comportamento local da solução exata quando a informação fornecida pela SAF de dois termos não for suficiente para isto.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Código de financiamento 001 (LFPL, LPSG, DMS), da Fundação de Apoio à Pesquisa e à Inovação Tecnológica do Estado de Sergipe (FAPITEC-SE) via Edital N^o 12/2022 (EAS), e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) via Projeto Universal N^o 402857/2021-6 (FCR, LDPF, JBC).

Referências

- BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. P. *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.
- BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R.; SABINA, F. J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents - II. Piezoelectric and square symmetry. *Mechanics of Materials*, v.33, n.1, p.237-248, 2001.
- BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R.; SABINA, F. J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA DE LIS, J. C.; VALDIVIEZO-MIJANGOS, O. C. Effective elastic properties of periodic fibrous composites. Limit cases. Applications to porous and nonlinear materials. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, v.13, n.2, p.305-322, 2006.
- BRAVO-CASTILLERO, J.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; ROCHA, F. C.; SAMPAIO, M. S. M. Higher-order effective stiffness tensors of periodic laminated structures via asymptotic homogenization. *Proceedings of III European-Latin American Conference of Theoretical and Applied Mechanics - ELACTAM 2024*, p.6-7, 2024.
- BRUNO, O. P. The effective conductivity of strongly heterogeneous composites. *Proceedings of the Royal Society of London A*, v.433, n.1, p.353-381, 1991.
- DÉCIO JR, R. M. S.; PÉREZ-FERNANDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J. Exactness of formal asymptotic solutions of a Dirichlet problem modeling the steady state of functionally-graded microperiodic nonlinear rods. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, v.18, n.3, p.45-56, 2019.
- DONG, Q. L.; CAO, L. Q. Multiscale asymptotic expansions methods and numerical algorithms for the wave equations in perforated domains. *Applied Mathematics and Computation*, v.232, p.872-887, 2014.

- GUINOVART-DÍAZ, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents. I: Elastic and hexagonal symmetry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.49, n.1, p.1445-1462, 2001.
- LARSSON, S.; THOMÉE, V. *Partial Differential Equations with Numerical Methods*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise*, v.1. Rio de Janeiro: IMPA, 2010, 12^a ed.
- LIMA, M. P. de; LAZZARI, L.; FERNANDEZ, L. dos S.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J. Homogeneização assintótica da equação do calor para meios unidimensionais periódicos continuamente heterogêneos. *Vetor*, v.26, n.2, p.73-83, 2016.
- LIMA, M. P. de; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J. Homogenization of a continuously microperiodic multidimensional medium. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v.19, n.1, p.15-32, 2018.
- LOPEZ-PAMIES, O.; GARCIA, R.; CHABERT, E.; CAVAILLÉ, J.-Y.; PONTE CASTAÑEDA, P. Multiscale modeling of oriented thermoplastic elastomers with lamellar morphology. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.56, p.3206–3223, 2008.
- LOPEZ-PAMIES, O.; IDIART, M. I. Fiber-reinforced hyperelastic solids: a realizable homogenization constitutive theory. *Journal of Engineering Mathematics*, v.68, p.57–83, 2010.
- LUZ, L. N. M., PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D., BRAVO-CASTILLERO, J. Comparação caso contínuo com o caso contínuo por partes com contato perfeito para a equação elíptica via método de homogeneização assintótica. *Revista Interdisciplinar De Pesquisa Em Engenharia*, v.7, n.2, p.17–29, 2022.
- MEDJMADJ, S.; SALEM, A. S.; TALEB, S. A. Experimental behavior of plaster/cork functionally graded core sandwich panels with polymer skins. *Construction and Building Materials*, v.344, p.128257, 2022.
- PANASENKO, G. P. Homogenization for periodic media: from microscale to macroscale. *Physics of Atomic Nuclei*, v.71, n.4, p.681-694, 2008.
- PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D. Homogeneização assintótica de laminados microperiódicos elásticos não lineares. *SigmaE*, v.10, n.2, p.1-21, 2021.
- RACHERLA, V.; LOPEZ-PAMIES, O.; PONTE CASTAÑEDA, P. Macroscopic response and stability in lamellar nanostructured elastomers with “oriented” and “unoriented” polydomain microstructures. *Mechanics of Materials*, v.42, p.451–468, 2010.
- ROCHA, F. C. da. Introdução à técnica de camada-limite. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, v.12, n.55, p.37-50, 2010.
- RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents - I. Elastic and square symmetry. *Mechanics of Materials*, v.33, n.1, p.223-235, 2001.
- SABINA, F. J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents. II: Piezoelectric and hexagonal symmetry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.49, n.1, p.1463-1479, 2001.

- SABINA, F. J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R.; VALDIVIEZO-MIJANGOS, O. C. Overall behavior of two-dimensional periodic composites. *International Journal of Solids and Structures*, v.39, n.2, p.483-497, 2002.
- SADD, M. H. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Oxford: Elsevier Academic Press, 2021, 4th ed.
- SU, F.; XU, Z.; CUI, J. Z.; DONG, Q. L. Multi-scale method for the quasi-periodic structures of composite materials. *Applied Mathematics and Computation*, v.217, n.12, p.5847-5852, 2011.
- SU, F.; XU, Z.; DONG, Q. L.; JIANG, H. Multiscale computation method for parabolic problems of composite materials. *Applied Mathematics and Computation*, v.217, n.21, p.8337-8342, 2011.
- TIJONOV, A. N.; SAMARSKY, A. A. *Ecuaciones de la Física Matemática*. Moscú: Mir, 1972.
- TORQUATO, S. *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. New York: Springer-Verlag, 2002.