

Homogeneização assintótica de laminados microperiódicos elásticos não lineares[†]

Leslie D. Pérez-Fernández^{1†}

¹Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas (IFM/UFPel)

Resumo: *Estuda-se o comportamento efetivo de laminados microperiódicos elásticos não lineares no regime de deformação finita mediante o método de homogeneização assintótica. Analisam-se vários tipos de comportamento constitutivo via combinações de hiperelasticidade com e sem amolecimento e/ou gradação funcional das lâminas sob diferentes tipos de deformação, inclusive a influência no comportamento efetivo de parâmetros que controlam a gradação funcional, a compressibilidade, e o amolecimento.*

Palavras-chave: Elasticidade não linear; laminados microperiódicos; homogeneização assintótica.

Abstract: *The effective behavior of nonlinear elastic microperiodic laminates is studied in the finite deformation regime by means of the asymptotic homogenization method. Several types of constitutive behavior are analyzed via combinations of hyperelasticity with or without softening and/or functional grading of the laminae under different types of deformation, including the influence of parameters controlling the functional grading, the compressibility and the softening on the effective behavior.*

Keywords: Nonlinear elasticity; microperiodic laminates; asymptotic homogenization.

Introdução

Um compósito é um sólido heterogêneo obtido da mistura de dois ou mais constituintes homogêneos insolúveis entre si. Tal mistura é motivada pela necessidade de reunir em um único material, para determinada aplicação, as diferentes propriedades de vários materiais homogêneos.

Neste trabalho, consideram-se sólidos heterogêneos em que o tamanho l característico da heterogeneidade é muito menor que o tamanho L do sólido como um todo, $l \ll L$. Assim, o sólido, embora seja microscopicamente heterogêneo, pode ser considerado macroscopicamente homogêneo. Além disso, considera-se também que o tamanho característico da heterogeneidade é suficientemente grande para que, assim, o estado do sólido possa ser descrito mediante as equações da mecânica dos meios contínuos (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Logo, define-se o parâmetro geométrico $\varepsilon = l/L \ll 1$ que quantifica o tamanho relativo da heterogeneidade com respeito ao tamanho do sólido, caracterizando, assim, a separação de escalas estruturais.

No geral, a microestrutura do sólido heterogêneo é tal que estudá-lo como um todo é uma tarefa praticamente impossível. Por isso, o sólido é representado mediante uma amostra estruturalmente típica do sólido completo, e que contém uma quantidade suficiente de heterogeneidades para garantir que suas propriedades macroscópicas sejam efetivamente independentes de qualquer tração ou deslocamento superficial uniforme (HILL, 1963). Tal amostra é chamada de elemento representativo de volume (ERV).

[†]Este trabalho é uma singela homenagem à amizade. Apesar de não haver tido a honra de conhecer o Prof. Fabyano Fonseca e Silva, testemunhei, através de um amigo em comum, o Prof. Willian Silva Barros (IFM/UFPel), a dor que sua perda produziu. Pois é, a dor que um amigo sente também dói em nós. Assim, sirva este trabalho como uma pequena contribuição à celebração da vida do Prof. Fabyano.

[†]leslie.fernandez@ufpel.edu.br

De particular interesse em inúmeras aplicações, os materiais periódicos são tais que a aplicação periódica do ERV permite recuperá-los completamente. Nesse caso, o ERV é chamado de célula de periodicidade, ou, básica.

Este trabalho está dedicado ao estudo do comportamento mecânico efetivo de sólidos microscopicamente heterogêneos formados por lâminas distribuídas periodicamente e com comportamento constitutivo não linear. O comportamento efetivo de tais materiais é obtido empregando técnicas (chamadas de homogeneização) baseadas na noção de homogeneidade equivalente, ou seja, na existência teórica de um sólido homogêneo cujo comportamento é similar, em algum sentido, ao comportamento efetivo do sólido heterogêneo sob estudo. Por exemplo, de parametrizar com ε o problema de valor de contorno que modela o comportamento do sólido heterogêneo, o sólido homogêneo equivalente pode ser definido como aquele relacionado ao problema de valor de contorno obtido ao fazer ε tender a zero.

Em particular, neste trabalho emprega-se o método de homogeneização assintótica (MHA - BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) em que a solução do problema original é procurada como uma série assintótica em potências de ε . Tal série assintótica permite obter uma sequência de problemas para os coeficientes das potências de ε . O problema para o coeficiente do termo da ordem $O(1)$ é chamado de problema homogeneizado, pois é demonstrado que não depende da microestrutura e, portanto, corresponde ao sólido homogêneo equivalente. O problema para o coeficiente do termo da ordem $O(\varepsilon)$ é chamado de problema local, pois é resolvido sobre a célula de periodicidade. De fato, a solução do problema local depende da solução do problema homogeneizado e, assim, pode ser interpretado como o processo de localização de obter o comportamento microscópico correspondente a um comportamento macroscópico dado.

Mais especificamente, neste trabalho, aplica-se o MHA ao estudo do comportamento efetivo de laminados microperiódicos elásticos não lineares no regime de deformações finitas. Consideram-se vários tipos de comportamento constitutivo via combinações de hiperelasticidade com e sem amolecimento e/ou gradação funcional das lâminas sob diferentes tipos de deformação, inclusive a influência no comportamento efetivo de parâmetros que controlam a gradação funcional, a compressibilidade, e o amolecimento. Os resultados aqui apresentados generalizam, ao regime de deformações finitas, outros obtidos anteriormente no regime de deformações infinitesimais (DÉCIO JR et al., 2019, 2021; LÓPEZ-REALPOZO et al., 2008; PÉREZ-FERNÁNDEZ; BECK, 2014; PÉREZ-FERNÁNDEZ et al., 2007).

Formulação do problema

Elastostática finita para corpos com múltiplas fases

Seja $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ a região ocupada por um corpo heterogêneo de volume $|\mathcal{B}|$ e contorno $\partial\mathcal{B}$. Assume-se que o corpo é um material composto por N fases no qual o r -éssimo constituinte ocupa a subregião $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}$, $r \in \{1, 2, \dots, N\}$, de volume $|\mathcal{B}_r|$ e contorno $\partial\mathcal{B}_r$, tal que $\bigcup_{r=1}^N \mathcal{B}_r = \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_r \cap \mathcal{B}_s = \emptyset$, $r \neq s$. A superfície de contato entre as fases contíguas r e s é $\Gamma_{rs} = \partial\mathcal{B}_r \cap \partial\mathcal{B}_s$.

Seja $\mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \{\boldsymbol{\tau} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3\}$ o espaço das funções tensoriais contínuas por partes $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R})_{i,j \in \{1,2,3\}}$. Na configuração de referência, um ponto material do corpo é representado por um ponto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$. Seja $\mathbf{x} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de deformação atuando sobre o corpo. As componentes de ambos o campo de deslocamento $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e o gradiente de deformação $\mathbf{F} \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ num sistema de coordenadas cartesianas são

$$u_i = x_i - X_i \quad \text{e} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}, \quad (1)$$

respectivamente, em que δ_{ij} é o delta de Kronecker. Em (1) e em todo o trabalho, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Assume-se que o corpo está em equilíbrio sob a ação da força de corpo $\mathbf{f} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$, ou seja,

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} + f_i = 0, \quad (2)$$

em que P_{ij} são as componentes do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$. Em (2) e em todo o trabalho, adota-se a convenção de Einstein para a soma com índices repetidos.

Formalmente, a lei constitutiva do corpo se define mediante um endomorfismo $\mathbf{\Pi} : \mathcal{L}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{P}$, o qual se especializa para cada caso de comportamento material. Em virtude da natureza multifásica de \mathcal{B} , escreve-se $\mathbf{\Pi} = \chi_r \mathbf{\Pi}^{(r)}$, em que χ_r é a função característica de \mathcal{B}_r e $\mathbf{\Pi}^{(r)}$ é a restrição de $\mathbf{\Pi}$ a $\mathcal{L}_{\mathcal{B}_r} = \{\boldsymbol{\tau} : \mathcal{B}_r \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3\}$. Sendo hiperelástico o comportamento material, define-se $\mathbf{\Pi}$ como

$$F_{ij} \xrightarrow{\Pi_{ij}} P_{ij} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}, \quad (3)$$

em que $W : \mathcal{L}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{F} \mapsto W|_{\mathbf{F}}$, é a densidade de energia de deformação do material.

O comportamento dos deslocamentos e as trações a través das interfaces Γ_{rs} é estabelecido mediante condições de contato. Assim, sejam d distância ponto-conjunto inducida por uma métrica sobre \mathbb{R}^3 e $[[\cdot]]_{\Gamma_{rs}} = \lim_{d(\mathbf{X} \in \mathcal{B}_r, \Gamma_{rs}) \downarrow 0} (\cdot) - \lim_{d(\mathbf{X} \in \mathcal{B}_s, \Gamma_{rs}) \downarrow 0} (\cdot)$ o operador do tamanho do salto de uma grandeza ao passar a través de Γ_{rs} . No caso de contato perfeito entre as fases, tais condições são

$$[[u_i]]_{\Gamma_{rs}} = 0 \quad \text{e} \quad [[P_{ij} \nu_j]]_{\Gamma_{rs}} = 0, \quad (4)$$

em que ν_j são as componentes do vetor unitário $\boldsymbol{\nu} : \Gamma_{rs} \rightarrow \mathbb{R}^3$ normal a Γ_{rs} .

O problema fica formulado impondo condições no contorno $\partial \mathcal{B}$, o qual se assume que é composto por duas partes complementárias $\partial \mathcal{B}_{\mathbf{u}}$ e $\partial \mathcal{B}_{\mathbf{t}}$, ou seja, $\partial \mathcal{B} = \partial \mathcal{B}_{\mathbf{u}} \cup \partial \mathcal{B}_{\mathbf{t}}$, $\partial \mathcal{B}_{\mathbf{u}} \cap \partial \mathcal{B}_{\mathbf{t}} = \emptyset$. Assim, condições de contorno gerais são

$$u_i|_{\partial \mathcal{B}_{\mathbf{u}}} = \bar{u}_i \quad \text{e} \quad P_{ij} n_j|_{\partial \mathcal{B}_{\mathbf{t}}} = \bar{t}_i, \quad (5)$$

em que \bar{u}_i e \bar{t}_i são as componentes dos campos de deslocamento $\bar{\mathbf{u}} : \partial \mathcal{B}_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e de tração $\bar{\mathbf{t}} : \partial \mathcal{B}_{\mathbf{t}} \rightarrow \mathbb{R}^3$, respectivamente, os quais são conhecidos, e n_j são as componentes do vetor unitário $\mathbf{n} : \partial \mathcal{B}_{\mathbf{t}} \rightarrow \mathbb{R}^3$, normal a $\partial \mathcal{B}_{\mathbf{t}}$.

Hiperelasticidade com amolecimento

Nos modelos clássicos de hiperelasticidade, a função de energia armazenada W cresce irrestritamente com respeito ao gradiente de deformação \mathbf{F} . Tal comportamento é ideal porque nenhum material pode ser submetido a deformações crescentemente grandes sem experimentar mudanças irreversíveis. Para modelar o comportamento material de uma maneira mais realista, VOLOKH (2007) introduz a função de energia $\psi : \mathcal{L}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\mathbf{F} \xrightarrow{\psi} \Phi - \Phi \exp \left\{ -\frac{W}{\Phi} \right\}, \quad (6)$$

em que $\Phi \in \mathbb{R}$ é uma constante chamada de energia crítica. Substituindo W por ψ em (3), obtém-se a lei constitutiva correspondente, a qual é

$$F_{ij} \xrightarrow{\Pi_{ij}} P_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}} \exp \left\{ -\frac{W}{\Phi} \right\}. \quad (7)$$

Observe-se que de (6) e (7) seguem as propriedades

$$W = 0 \Rightarrow \psi = 0, \quad W \ll \Phi \Rightarrow \psi \approx W, \quad \text{e} \quad W \rightarrow \infty \Rightarrow \psi \rightarrow \Phi \Rightarrow P_{ij} \rightarrow 0, \quad (8)$$

ou seja, ψ reproduz o comportamento hiperelástico clássico predito por W para deformações moderadas enquanto estabelece o armazenamento limitado de energia caracterizado por Φ para deformações crescentemente grandes (Figura 1). Logo, a energia crítica Φ pode ser considerada como uma nova propriedade material.

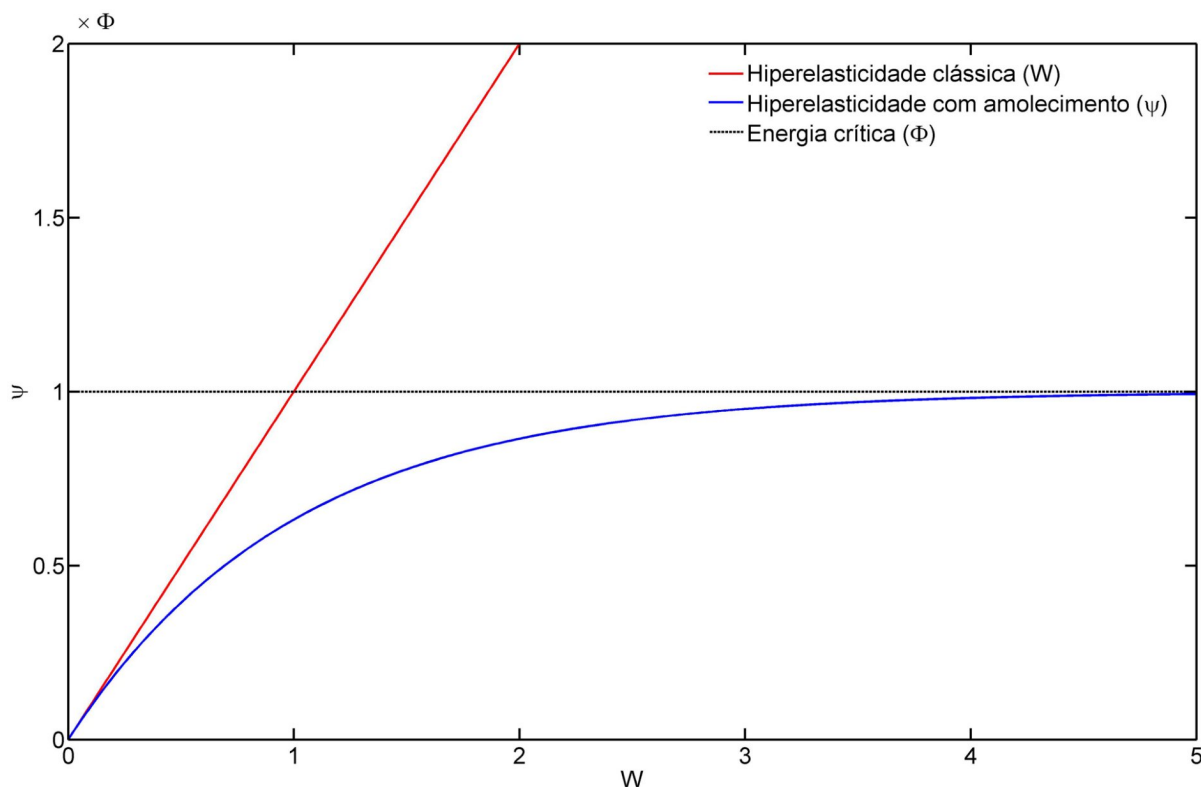


Figura 1: Funções de energia das hiperelasticidades clássica e com amolecimento.

Corpos micro-heterogêneos com múltiplas fases

Muitos materiais apresentam uma aparência homogênea quando observados macroscopicamente. Porém, quando observados mais de perto, é possível enxergar sua natureza verdadeira, ou seja, eles são microscopicamente heterogêneos. Assim, é possível identificar pelo menos duas escalas, as quais são chamadas de macroscópica e microscópica, respectivamente. Este trabalho foca somente naqueles materiais para os quais a hipótese do contínuo é válida, ou seja, que o tamanho característico da micro-heterogeneidade é muito maior do que o tamanho atômico/molecular típico do material.

Seguindo a tradição começada por HILL (1963), representa-se o corpo micro-heterogêneo mediante uma amostra tal que sua estrutura e comportamento físico são típicas do o corpo como um todo. Tal amostra é chamada de elemento representativo de volume (ERV). Além disso, assume-se que a estrutura do corpo é ergódica (BERAN, 1968), o qual implica que o valor médio calculado sobre todo o corpo é igual ao calculado sobre o ERV. Nota-se que estruturas periódicas são ergódicas, o qual justifica o fato de que estruturas aleatórias são aproximadas mediante replicação periódica de ERV com estrutura aleatória (ZEMAN; ŠEJNOHA, 2001). Logo, no que segue, consideram-se somente materiais com estruturas periódicas.

Propriedades física de materiais nos quais observa-se tal dualidade de escalas apresentam rápida variação com respeito à escala macroscópica devido a que a passagem de uma fase à contígua acontece muito rapidamente. Por isso, soluções fechadas dos problemas de valor de contorno correspondentes são escassas. Além disso, a aplicação direta de algum método numérico dependente de malha, como o método de elementos finitos, para obter soluções aproximadas de tais problemas é de alto custo computacional pois precisam de malhas muito refinadas.

Uma alternativa para superar tal dificuldade consiste de incluir explicitamente no problema os efeitos microscópicos. Seja ε , $0 < \varepsilon \ll 1$, um parâmetro geométrico definido como a razão entre os tamanhos típicos da micro-heterogeneidade e o corpo todo. Seja $\Omega \subset \varepsilon^{-1}\mathcal{B}$ o ERV

periódico na configuração de referência e seja $\mathbf{Y} = \varepsilon^{-1}\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \Omega$, uma nova variável, que depois será considerada independente de \mathbf{X} , usada para descrever o comportamento local do corpo micro-heterogêneo. Devido a que o corpo é composto de múltiplas fases, dentro de Ω a fase r ocupa a subregião $\Omega_r = (\varepsilon^{-1}\mathcal{B}_r) \cap \Omega$ com volume $|\Omega_r|$ e contorno $\partial\Omega_r$ tal que $\bigcup_{r=1}^N \Omega_r = \Omega$ e $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$, $r \neq s$. A interface entre fases contíguas r e s é $\gamma_{rs} \equiv (\varepsilon^{-1}\Gamma_{rs}) \cap \Omega = \partial\Omega_r \cap \partial\Omega_s$.

Assim, representa-se a solução \mathbf{u} do problema original apresentado acima pelo campo vetorial $\mathbf{u}^\varepsilon : \mathcal{B} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ e é substituído nas expressões introduzidas acima que contêm \mathbf{u} . Usando a regra da cadeia $\frac{\partial(\cdot)}{\partial X_j} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(\cdot)}{\partial Y_j}$ nas expressões resultantes, obtém-se representações em duas escalas para as variáveis de interesse, tais como $\mathbf{F}^\varepsilon, \mathbf{P}^\varepsilon \in \mathcal{L}_{\mathcal{B} \times \Omega} = \{\boldsymbol{\tau} : \mathcal{B} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3\}$. Estes tensores estão relacionados mediante o endomorfismo $\boldsymbol{\Pi}^\varepsilon : \mathcal{L}_{\mathcal{B} \times \Omega} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{B} \times \Omega}$, $\mathbf{F}^\varepsilon \mapsto \mathbf{P}^\varepsilon$, o qual é a representação em duas escalas do endomorfismo constitutivo $\boldsymbol{\Pi}$. Consequentemente, no caso da hiperelasticidade, existe um funcional de energia $\psi^\varepsilon : \mathcal{L}_{\mathcal{B} \times \Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{F}^\varepsilon \mapsto \psi^\varepsilon|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^\varepsilon}$, relacionado a $\boldsymbol{\Pi}^\varepsilon$ mediante uma expressão similar a (7) a qual é a representação em duas escalas de ψ . Além disso, da periodicidade da microestrutura resulta que $\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{F}^\varepsilon, \mathbf{P}^\varepsilon$ e ψ^ε são Ω -periódicos na variável \mathbf{Y} . Ainda mais, do comportamento macroscopicamente homogêneo do corpo segue que $\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{F}^\varepsilon, \mathbf{P}^\varepsilon$ e ψ^ε são contínuos com respeito a \mathbf{X} .

O método de homogeneização assintótica

Formulação geral

O método de homogeneização assintótica (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) aproxima \mathbf{u}^ε mediante uma série assintótica em potências não negativas de ε :

$$u_i^\varepsilon = v_i^{(0)} + \varepsilon^p u_i^{(p)}, \quad (9)$$

em que $\mathbf{v}^{(0)} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{u}^{(p)} : \mathcal{B} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{N}$. Incógnitas $\mathbf{u}^{(p)}$ podem ser consideradas como campos de deslocamento locais que provêem correções de ordens $O(\varepsilon^p)$ para o campo de deslocamento macroscópico $\mathbf{v}^{(0)}$ para obter a aproximação assintótica completa da solução \mathbf{u} do problema original. Lembrando que \mathbf{u}^ε é Ω -periódico em \mathbf{Y} e contínuo em \mathbf{X} , assim são $\mathbf{v}^{(0)}$ e $\mathbf{u}^{(p)}$. Ainda mais, por causa da Ω -periodicidade em \mathbf{Y} de $\mathbf{u}^{(p)}$, segue que $\left\langle \frac{\partial u_i^{(p)}}{\partial Y_j} \right\rangle = 0$, em que $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (\cdot) d\mathbf{Y}$ é o operador do valor médio. Para evitar indeterminações por causa de translações rígidas, impõe-se a condição (PRUCHNICKI, 1998)

$$\left\langle \mathbf{u}^{(p)} \right\rangle = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Substituindo (9) em (1)₂ e usando a regra da cadeia, obtém-se a série assintótica para \mathbf{F}^ε como

$$F_{ij}^\varepsilon = F_{ij}^{(0)} + \varepsilon^p F_{ij}^{(p)}, \quad (11)$$

em que $\mathbf{F}^{(q)} \in \mathcal{L}_{\mathcal{B} \times \Omega}$, $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, são Ω -periódicos em \mathbf{Y} e contínuos em \mathbf{X} e definidos por

$$F_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} + \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial Y_j} \quad \text{e} \quad F_{ij}^{(p)} = \frac{\partial u_i^{(p)}}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^{(p+1)}}{\partial Y_j}. \quad (12)$$

Para obter a série assintótica para \mathbf{P}^ε , especifica-se o endomorfismo em duas escalas $\boldsymbol{\Pi}^\varepsilon$ como os dois primeiros termos da série de Taylor do endomorfismo constitutivo $\boldsymbol{\Pi}$ com centro em $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(0)}$ e avaliada em $\mathbf{F} = \mathbf{F}^\varepsilon$ segundo (11), ou seja,

$$F_{ij}^\varepsilon \xrightarrow{\boldsymbol{\Pi}_{ij}^\varepsilon} \boldsymbol{\Pi}_{ij}|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(0)}} + \varepsilon^p F_{kl}^{(p)} \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}_{ij}}{\partial F_{kl}} \right|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(0)}} \equiv P_{ij}^\varepsilon, \quad (13)$$

em que $\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial F_{kl}}$, $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$, define as componentes do módulo tangente incremental do corpo para cada comportamento material particular em função da deformação. Logo,

$$P_{ij}^\varepsilon = P_{ij}^{(0)} + \varepsilon^p P_{ij}^{(p)}, \quad (14)$$

em que, $\mathbf{P}^{(q)} \in \mathcal{L}_{\mathbf{B} \times \Omega}$, $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, são Ω -periódicos em \mathbf{Y} e contínuos em \mathbf{X} e definidos por

$$P_{ij}^{(0)} = \Pi_{ij}|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(0)}} \quad \text{e} \quad P_{ij}^{(p)} = F_{kl}^{(p)} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial F_{kl}} \Big|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(0)}}. \quad (15)$$

Substituindo (14) em (2), aplicando a regra da cadeia e igualando a zero os coeficientes das potências de ε obtêm-se as equações diferenciais que correspondem a cada ordem, ou seja,

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial P_{ij}^{(0)}}{\partial Y_j} = 0, \varepsilon^0 : \frac{\partial P_{ij}^{(0)}}{\partial X_j} + \frac{\partial P_{ij}^{(1)}}{\partial Y_j} + f_i = 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon^p : \frac{\partial P_{ij}^{(p)}}{\partial X_j} + \frac{\partial P_{ij}^{(p+1)}}{\partial Y_j} = 0. \quad (16)$$

De substituir (9) e (14) em (4) lembrando que $\mathbf{u}^{(p)}$, $\mathbf{F}^{(p)}$ e $\mathbf{P}^{(p)}$ são contínuos com respeito a \mathbf{X} , obtêm-se as condições de contato correspondentes a cada ordem, ou seja,

$$\varepsilon^0 : \left[P_{ij}^{(0)} \nu_j \right]_{\gamma_{rs}} = 0, \quad \varepsilon^p : \left[u_i^{(p)} \right]_{\gamma_{rs}} = 0 \quad \text{e} \quad \left[P_{ij}^{(p)} \nu_j \right]_{\gamma_{rs}} = 0. \quad (17)$$

Agora, define-se uma sequência de problemas $\mathcal{P}^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, para obter os micro-dislocamentos $\mathbf{u}^{(p)}$ em termos das soluções $\mathbf{u}^{(q)}$, $q \in \{1, \dots, p-1\}$, dos $p-1$ problemas anteriores e o macro-dislocamento $\mathbf{v}^{(0)}$.

Suponha-se que $\mathbf{v}^{(0)}$ é conhecido. Logo, o primeiro problema na sequência, $\mathcal{P}^{(1)}$, é chamado de problema local, ou, sobre a célula, e consiste de obter $\mathbf{u}^{(1)}$ que satisfaz (16)₁, (17)₁, (17)₂ e (10) para $p=1$, com $\mathbf{P}^{(0)}$ e $\mathbf{F}^{(0)}$ segundo (15)₁ e (12)₁, respectivamente. Explicitamente, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(1)} : \frac{\partial P_{ij}^{(0)}}{\partial Y_j} = 0, \quad \left[P_{ij}^{(0)} \nu_j \right]_{\gamma_{rs}} = 0, \quad \left[u_i^{(1)} \right]_{\gamma_{rs}} = 0, \quad \langle u_i^{(1)} \rangle = 0 \\ \text{em que } P_{ij}^{(0)} = \Pi_{ij}|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(0)}}, \quad F_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} + \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial Y_j} \end{aligned} \quad (18)$$

Uma vez que o problema $\mathcal{P}^{(1)}$ já está resolvido para $\mathbf{u}^{(1)}$ em termos de $\mathbf{v}^{(0)}$, considera-se o segundo problema na sequência, $\mathcal{P}^{(2)}$, o qual consiste de obter $\mathbf{u}^{(2)}$ que satisfaz (16)₂, (17)₂ com $p=2$, (17)₃ com $p=1$, e (10) com $p=2$, com $\mathbf{P}^{(q)}$ e $\mathbf{F}^{(q)}$, para $q=0, 1$, segundo (15) e (12), respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(2)} : \frac{\partial P_{ij}^{(0)}}{\partial X_j} + \frac{\partial P_{ij}^{(1)}}{\partial Y_j} + f_i = 0, \quad \left[P_{ij}^{(1)} \nu_j \right]_{\gamma_{rs}} = 0, \quad \left[u_i^{(2)} \right]_{\gamma_{rs}} = 0, \quad \langle u_i^{(2)} \rangle = 0 \\ \text{em que } \begin{cases} P_{ij}^{(0)} = \Pi_{ij}|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(0)}}, \quad P_{ij}^{(1)} = F_{kl}^{(1)} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial F_{kl}} \Big|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(0)}} \\ F_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} + \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial Y_j}, \quad F_{ij}^{(1)} = \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial Y_j} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Em geral, para $q \geq 3$, o problema de número q in the sequence, $\mathcal{P}^{(q)}$, consiste de obter $\mathbf{u}^{(q)}$ que satisfaz (16)₃ para $p=q-2$, (17)₂ para $p=q$, (17)₃ para $p=q-1$, e (10) para $p=q$, com $\mathbf{P}^{(p)}$ para $p \in \{q-2, q-1\}$ e $\mathbf{F}^{(p)}$, para $p \in \{0, q-2, q-1\}$, segundo (15)₂ e (12),

respectivamente. Assim,

$$\mathcal{P}^{(q)} : \frac{\partial P_{ij}^{(q-2)}}{\partial X_j} + \frac{\partial P_{ij}^{(q-1)}}{\partial Y_j} = 0, \quad \llbracket P_{ij}^{(q-1)} \nu_j \rrbracket_{\gamma_{rs}} = 0, \quad \llbracket u_i^{(q)} \rrbracket_{\gamma_{rs}} = 0, \quad \langle u_i^{(q)} \rangle = 0$$

$$\text{em que } \begin{cases} P_{ij}^{(p)} = F_{kl}^{(p)} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial F_{kl}} \Big|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(0)}}, & F_{ij}^{(p)} = \frac{\partial u_i^{(p)}}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^{(p+1)}}{\partial Y_j}, \quad p = q - 2, q - 1 \\ F_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} + \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial Y_j} \end{cases} \quad (20)$$

Para obter-se $\mathbf{v}^{(0)}$, deve-se resolver o chamado problema homogeneizado $\mathcal{P}^{(0)}$, o qual é definido pelas versões promediadas de (16)₂, (15)₁, (12)₁, e as condições de contorno que resultam de substituir (9), (12)₁ e (15)₁ em (5). Assim, lembrando que $\mathcal{P}^{(1)}$ é Ω -periódica junto à condição (10), o problema $\mathcal{P}^{(0)}$ é

$$\mathcal{P}^{(0)} : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial X_j} \langle P_{ij}^{(0)} \rangle + f_i = 0 \\ \delta_{ij} + \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial X_j} = \langle F_{ij}^{(0)} \rangle \xrightarrow{\hat{\Pi}_{ij}} \langle P_{ij}^{(0)} \rangle = \langle \Pi_{ij} |_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(0)}} \rangle \\ v_i^{(0)} |_{\partial \mathcal{B}_u} = \bar{u}_i, \quad \langle P_{ij}^{(0)} \rangle n_j |_{\partial \mathcal{B}_t} = \bar{t}_i \end{cases} \quad (21)$$

A equação diferencial (21)₁ é chamada de equação de equilíbrio homogeneizada, e a relação constitutiva homogeneizada (21)₂ é a lei efetiva do corpo, a qual define um endomorfismo $\hat{\Pi} : \mathcal{L}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$, $\bar{\mathbf{F}} \mapsto \bar{\mathbf{P}}$, em que $\bar{F}_{ij} = \langle F_{ij}^{(0)} \rangle$ e $\bar{P}_{ij} = \langle \Pi_{ij} |_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(0)}} \rangle$. Assim, escreve-se o gradiente de deformação microscópico de ordem zero, $\mathbf{F}^{(0)}$, como a soma de um tensor macroscópico homogêneo, $\bar{\mathbf{F}}$, e um tensor rapidamente oscilante localmente periódico, \mathbf{F}' , ou seja, $\mathbf{F}^{(0)} = \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{F}'$, em que as componentes destes tensores são, respectivamente, $\bar{F}_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial X_j}$ e $F'_{ij} = \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial Y_j}$. Além disso, nota-se que a lei efetiva (21)₂ depende da solução $\mathbf{u}^{(1)}$ do problema local $\mathcal{P}^{(1)}$ mediante $\mathbf{F}^{(0)}$, embora, de fato, para obter (21)₂ não é necessário ter-se $\mathbf{v}^{(0)}$ nem $\mathbf{u}^{(1)}$ senão dos seus gradientes com respeito a \mathbf{X} e \mathbf{Y} , respectivamente.

Quando ε é suficientemente pequeno, como no caso de corpos micro-heterogêneos, a contribuição provida pelas soluções $\mathbf{u}^{(p)}$ dos problemas $\mathcal{P}^{(p)}$, $p \geq 2$, é desprezível e só o macro-deslocamento $\mathbf{v}^{(0)}$ e a correção de ordem $O(\varepsilon)$ $\mathbf{u}^{(1)}$ são relevantes ao prover a aproximação $\mathbf{u}^\varepsilon \approx \mathbf{v}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}$ da solução \mathbf{u} do problema original. Por isso, na prática, é suficiente resolver somente problemas $\mathcal{P}^{(0)}$ (21) e $\mathcal{P}^{(1)}$ (18).

Aplicação à obtenção da lei efetiva de bilaminados

Agora, considera-se um bilaminado ($N = 2$) com formado por lâminas perfeitamente coladas as quais se alternam periodicalmente na direção Y_h em que $h \in \{1, 2, 3\}$ é fixo. Tal arranjo das lâminas é conhecido como conectividade em paralelo para $h = 1, 2$ e em série para $h = 3$ como mostra a Figura 2.

Considera-se também que cada lâmina é funcionalmente gradada na direção da laminação Y_h e homogênea com respeito às outras duas direções. Assim, as propriedades dos materiais constituintes variam continuamente. Com estas considerações, segue que as grandezas envolvidas nos problemas definidos acima dependem da variável local \mathbf{Y} somente através de Y_h .

Seja $c_r = \langle \chi_r \rangle = \frac{|\Omega_r|}{|\Omega|} \in (0, 1)$ a fração de volume da fase $r = 1, 2$, com $c_1 + c_2 = 1$. A célula periódica é o cubo unitário $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, em que a superfície de contato $\gamma_{12} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ é o plano definido por $Y_h = c_1$, e $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{e}_h$ é o vetor normal a γ_{12} com $\mathbf{e}_h \in \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 . Logo, segue de (12)₁ e (16)₁ que das componentes de $\mathbf{F}^{(0)}$ e $\mathbf{P}^{(0)}$ só $F_{ih}^{(0)}$ e $P_{ij}^{(0)}$,

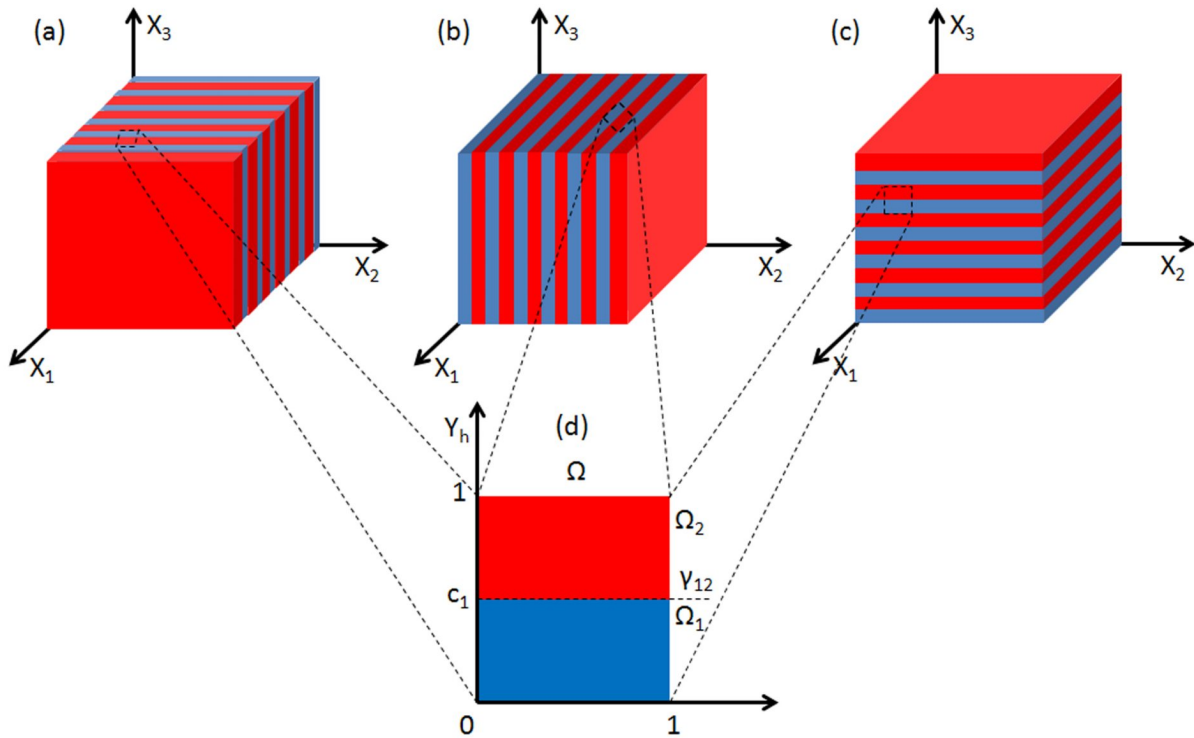


Figura 2: Bilaminados com conectividades (a) e (b) em paralelo, e (c) em série, e (d) representação bidimensional da célula periódica.

$j \neq h$, respectivamente, dependem da variável local Y_h . Ainda mais, $F'_{ij} = \delta_{jh} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial Y_h}$, ou seja, só as componentes F'_{ih} de \mathbf{F}' são não nulas.

Como $\mathbf{u}^{(1)}$ é Ω -periódico, tem-se que $\langle \mathbf{F}' \rangle = \mathbf{0}$. Agora, assumindo que \mathbf{F}' é constante em cada fase, é possível afirmar que $\mathbf{F}' = \phi' \left(\chi_1 - \frac{c_1}{c_2} \chi_2 \right)$, em que $\phi' = \mathbf{F}'|_{\Omega_1}$, a restrição de \mathbf{F}' à fase 1, é um tensor constante que, pelo visto acima, só as suas componentes ϕ'_{ih} são não nulas. Logo, escreve-se

$$F_{ij}^{(0)} = \bar{F}_{ij} + \phi'_{ij} \left(\chi_1 - \frac{c_1}{c_2} \chi_2 \right). \tag{22}$$

Logo, $P_{ih}^{(0)}$ são as componentes da tração atuando no plano de contato γ_{12} com vetor normal ν . A continuidade da tração através da superfície de contato segue de (17)₃, ou seja, $\llbracket P_{ih}^{(0)} \rrbracket_{\gamma_{12}} = 0$, a qual, usando (14)₂ e (22), resulta em

$$\Pi_{ih}^{(1)} \Big|_{\mathbf{F}=\bar{\mathbf{F}}+\phi'} = \Pi_{ih}^{(2)} \Big|_{\mathbf{F}=\bar{\mathbf{F}}-\frac{c_1}{c_2}\phi'}, \tag{23}$$

com $\mathbf{Y} \in \gamma_{12}$. Lembre-se que a lei efetiva (21)₂ depende da solução $\mathbf{u}^{(1)}$ do problema local $\mathcal{P}^{(1)}$ somente através do seu gradiente. Assim, basta obter ϕ' em termos de $\bar{\mathbf{F}}$ resolvendo a condição de contato perfeito (23). Finalmente, a lei efetiva (21)₂ vira

$$\bar{F}_{ij} \xrightarrow{\hat{\Pi}_{ij}} \bar{P}_{ij} = c_r \left\langle \Pi_{ij}^{(r)} \Big|_{\mathbf{F}=\bar{\mathbf{F}}+\delta_{jh}\Delta^{(r)}\phi'} \right\rangle_r, \quad \Delta^{(r)} = \begin{cases} 1, & r = 1 \\ -\frac{c_1}{c_2}, & r = 2 \end{cases}, \tag{24}$$

em que $\langle \cdot \rangle_r = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} (\cdot) d\mathbf{Y}$.

Resultados

Estudos preliminares

Primeiro, considera-se um comportamento constitutivo com expressão analítica simples para o qual é possível obter resultados analiticamente. Tal comportamento do corpo responde à função de energia e à lei constitutiva seguintes (PRUCHNICKI, 1998)

$$W = \mu I(\mathbf{F} - \mathbf{1}), \quad P_{ij} = 2\mu (F_{ij} - \delta_{ij}) \quad (25)$$

em que $I(\boldsymbol{\tau}) = \tau_{ij}\tau_{ij}$ é o primeiro invariante do tensor $\boldsymbol{\tau}$ e $\mathbf{1} = (\delta_{ij})_{i,j \in \{1,2,3\}}$ é o tensor identidade. Cada realização particular da heterogeneidade é descrita especificando a propriedade $\mu = \mu(Y_h)$. Nesta seção, consideram-se três casos de heterogeneidade. O primeiro consiste de materiais formados por uma única fase funcionalmente gradada (Figura 3 (a)) e, nesse caso, a propriedade $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua. No segundo caso, estudam-se bilaminados com fases funcionalmente gradadas (Figura 3 (b)) e, portanto, a propriedade $\mu = \chi_r \mu_r$, $\mu_r : \Omega_r \rightarrow \mathbb{R}_+$, é uma função contínua por partes. O terceiro caso consiste de bilaminados com fases homogêneas (2) e que apresentam amolecimento, ou seja, a propriedade $\mu = \chi_r \mu_r$, $\mu_r \in \mathbb{R}_+$, é constante por partes e devem considerar-se a função de energia ψ e a energia crítica $\Phi = \chi_r \Phi_r$, $\Phi_r \in \mathbb{R}_+$, segundo (6).

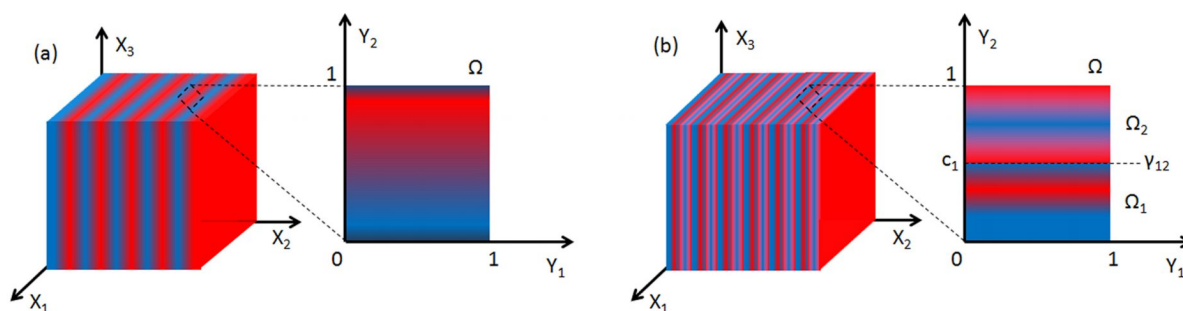


Figura 3: Laminados periódicos com gradadação funcional: uma (a) e duas (b) fases.

Para obter $\bar{\mathbf{P}}$ segundo a lei efetiva (24), as componentes \bar{P}_{ih} seguem de substituir (25)₂ em (23) e resolver as equações resultantes para ϕ'_{ih} em termos das componentes de $\bar{\mathbf{F}}$, tendo-se que

$$\phi'_{ih} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \frac{c_1}{c_2} \mu_2} (\bar{F}_{ih} - \delta_{ih}), \quad (26)$$

do qual, substituindo (26) em (24) com (25)₂, segue que

$$\bar{P}_{ih} = 2 \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} (\bar{F}_{ih} - \delta_{ih}), \quad \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} = \left\{ c_r \left\langle \frac{1}{\mu_r} \right\rangle_r \right\}^{-1}. \quad (27)$$

Para obter as componentes \bar{P}_{ij} , $j \neq h$, basta substituir (25)₂ em (24), tendo-se

$$\bar{P}_{ij} = 2 \langle \mu \rangle (\bar{F}_{ij} - \delta_{ij}), \quad j \neq h, \quad \langle \mu \rangle = c_r \langle \mu_r \rangle_r. \quad (28)$$

Logo, de (27) e (28) segue que o comportamento efetivo do bilaminado periódico com fases constituintes segundo (25) é descrito completamente mediante as duas grandezas $\langle \mu \rangle$ e $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ e, portanto, é possível escrever a lei efetiva como

$$\bar{P}_{ij} = 2 \hat{\mu}_{ij} (\bar{F}_{ij} - \delta_{ij}), \quad \hat{\mu}_{ij} = \begin{cases} \langle \mu \rangle & j \neq h \\ \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} & j = h \end{cases}. \quad (29)$$

Note-se que a lei efetiva (29) é válida para qualquer realização particular da propriedade $\mu = \mu(Y_h)$ incluindo ambos os dois primeiros casos mencionados acima. Note-se também que (29) é linear com respeito a $\bar{\mathbf{F}}$ qualquer seja μ e, portanto, a variação de $\bar{\mathbf{P}}$ acompanhará à da propriedade efetiva $\hat{\mu}$, ou seja, $\bar{\mathbf{P}}$ e $\hat{\mu}$ são diretamente proporcionais sendo $2(\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{1})$ a constante de proporcionalidade. Logo, nesse caso, basta estudar o comportamento de $\hat{\mu}$ para conhecer o comportamento qualitativo de $\bar{\mathbf{P}}$.

Por outro lado, o terceiro caso requer uma análise diferente pois, ao considerar a possível ocorrência de amolecimento, (6) e (7) também devem ser empregados. Assim, substituindo (25)₁ em (7), segue que cada fase responde a uma lei do tipo

$$P_{ij} = 2\mu(F_{ij} - \delta_{ij}) \exp\left\{-\frac{\mu}{\Phi} I(\mathbf{F} - \mathbf{1})\right\}. \quad (30)$$

Agora, substituindo (30) em (23), obtém-se um sistema de três equações algébricas não lineares para obter ϕ'_{ih} em termos das componentes de $\bar{\mathbf{F}}$ dado por

$$\mu_1(\bar{F}_{ih} + \phi'_{ih} - \delta_{ih}) \exp\{E_{\phi'}\} - \mu_2\left(\bar{F}_{ih} - \frac{c_1}{c_2}\phi'_{ih} - \delta_{ih}\right) = 0, \quad (31)$$

em que, com soma por i e j e lembrando que h é fixo,

$$E_{\phi'} = \left(\frac{\mu_2}{\Phi_2} - \frac{\mu_1}{\Phi_1}\right)(\bar{F}_{ij}\bar{F}_{ij} - 2\bar{F}_{ii} + 3) - 2\left(\frac{\mu_1}{\Phi_1} + \frac{c_1}{c_2}\frac{\mu_2}{\Phi_2}\right)(\bar{F}_{ih}\phi'_{ih} - 2\phi'_{hh}) - \left[\frac{\mu_1}{\Phi_1} - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2\frac{\mu_2}{\Phi_2}\right]\phi'_{ih}\phi'_{ih}. \quad (32)$$

Finalmente, a lei efetiva para o terceiro caso é

$$\bar{P}_{ij} = 2c_r\mu_r\left(\bar{F}_{ij} + \delta_{jh}\Delta^{(r)}\phi'_{ih} - \delta_{ij}\right) \exp\left\{-\frac{\mu_r}{\Phi_r} I(\bar{\mathbf{F}} + \delta_{jh}\Delta^{(r)}\phi' - \mathbf{1})\right\}. \quad (33)$$

Um material com uma fase funcionalmente gradada

Agora, considera-se que a propriedade $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ varia continuamente sobre toda a célula periódica (Figura 3(a)) e é tal que $\langle \mu \rangle = 1$. A seguir, apresentam-se cinco definições para a variação de μ : linear, exponencial, senoidal, cossenoidal e tipo onda quadrada (SARAVANAN; RAJAGOPAL 2003). Em cada caso, μ depende também de um ou dois parâmetros (δ e k) que permitem controlar diferentes características de sua variação como sinal, tendência, monotonicidade, amplitude e frequência. Além disso, tais parâmetros também podem determinar se a propriedade efetiva é finita ou infinita, real ou complexa (por exemplo, a parte imaginária de uma propriedade complexa poderia estar relacionada a um mecanismo de perda de energia na forma de calor dissipado). Por enquanto, são de interesse apenas as realizações reais finitas. Assim, além das expressões de $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ para cada caso, apresentam-se também os domínios em que esses parâmetros mantêm $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ real e finita.

Variação linear:

$$\mu = 2(1 - \delta)Y_h + \delta, \quad \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} = \begin{cases} \frac{2(1 - \delta)}{\ln \frac{2 - \delta}{\delta}}, & \delta \in (0, 2) \setminus \{1\} \\ 1, & \delta = 1 \end{cases}. \quad (34)$$

Variação exponencial:

$$\mu = \begin{cases} \frac{\delta e^{\delta Y_h}}{e^\delta - \delta}, & \delta \neq 0 \\ 1, & \delta = 0 \end{cases}, \quad \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} = \begin{cases} \frac{e^\delta \delta^2}{(e^\delta - 1)^2}, & \delta \neq 0 \\ 1, & \delta = 0 \end{cases}. \quad (35)$$

Varição senoidal ou cossenoidal:

$$\mu = 1 + \delta \sin(2k\pi Y_h) \text{ ou } \mu = 1 + \delta \cos(2k\pi Y_h), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\langle \mu^{-1} \rangle^{-1} = \sqrt{1 - \delta^2}, \quad \delta \in (0, 1) \quad (36)$$

Varição tipo onda quadrada:

$$\mu = \delta + 2(1 - \delta)C_k \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n H\left(Y_h - \frac{n}{k}\right), \quad C_k = \begin{cases} \frac{k}{k+1}, & k \text{ ímpar} \\ 1, & k \text{ par} \end{cases},$$

$$\langle \mu^{-1} \rangle^{-1} = \begin{cases} \frac{(1-k)\delta^2 + 2k\delta}{2\delta + k - 1}, & \delta \neq \frac{1-k}{2}, \quad k \text{ ímpar} \\ \delta(2 - \delta), & k \text{ par} \end{cases}, \quad (37)$$

em que $H(\cdot)$ é a função degrau de Heaviside.

A Figura 4 apresenta a variação das componentes $\hat{\mu}_{ih} = \langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ da propriedade efetiva $\hat{\mu}$ segundo (34)₂, (35)₂, (36)₂ e (37)₂ ($k = 4, 5$) com respeito ao parâmetro δ . Lembre-se que, neste caso, as outras componentes de $\hat{\mu}$ são $\hat{\mu}_{ij} = \langle \mu \rangle = 1$, $j \neq h$.

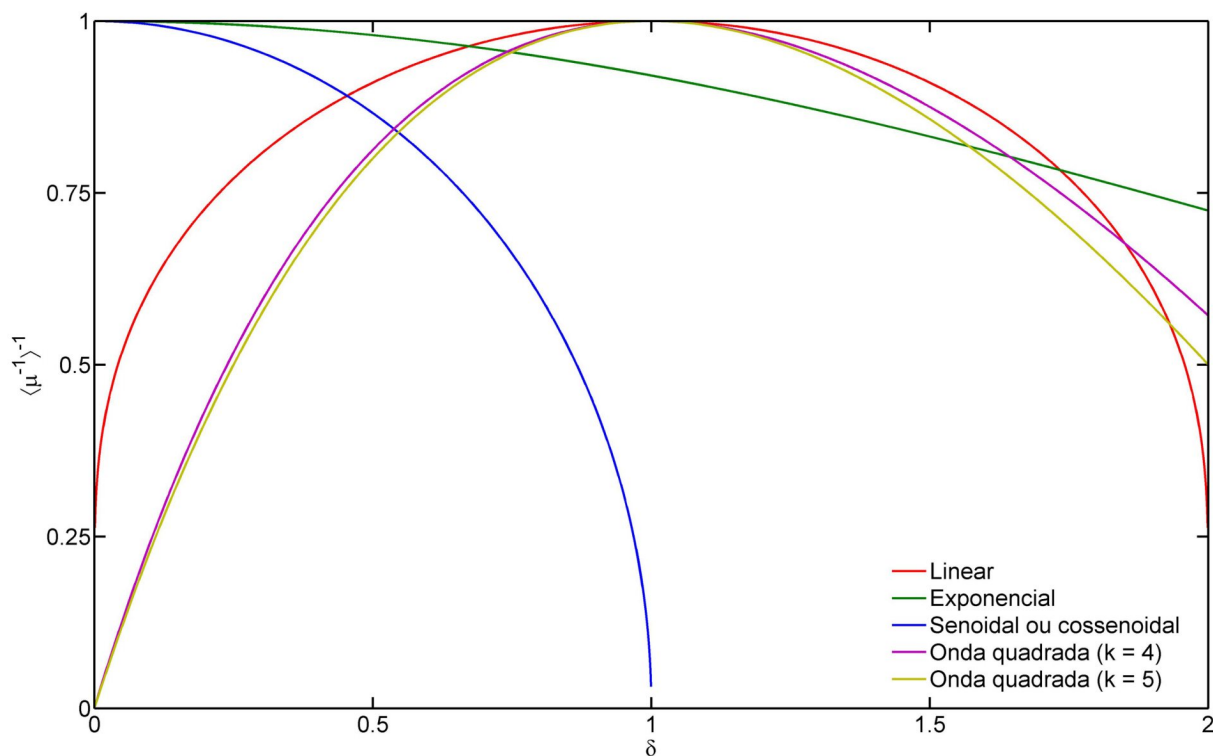


Figura 4: A propriedade efetiva $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ de materiais formados por uma fase funcionalmente gradada com respeito ao parâmetro δ para diferentes tipos de graduação funcional.

Na Figura 4, observa-se que todas as curvas para $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ são côncavas, sendo que a concavidade estrita ocorre, no intervalo estudado, somente para as variações linear e tipo onda quadrada para as quais o máximo ocorre em $\delta = 1$, sendo que para as variações exponencial, senoidal e cossenoidal o máximo é atingido em $\delta = 0$. Em todos os casos, escolher o valor de δ que maximiza a $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ implica escolher $\mu = 1$, ou seja, o material com a propriedade efetiva $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ maximizada é, de fato, homogêneo com $\mu = 1$.

Um bilaminado com fases funcionalmente gradadas

Agora, considera-se o caso do bilaminado periódico com propriedade constitutiva μ variando continuamente em cada fase (Figura 3(b)). Note que, ao contrário do caso anterior de só uma fase continuamente heterogênea, mesmo se μ varia segundo uma ou duas das leis (34)₁, (35)₁, (36)₁ e (37)₁, já $\langle \mu \rangle$ não é mais unitário. Em particular, para duas fases lineares (34)₁, duas exponenciais (35)₁, e duas senoidais (36)₁, as componentes da propriedade efetiva $\hat{\mu}$ são os seguintes:

Dois fases lineares:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= 1 + c_2 [(1 - \delta_2)(1 + c_1 + \delta_2) - (1 - \delta_1)(1 + c_1 + \delta_1)], \\ \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} &= 2 \left\{ \ln \left[\left(\frac{2(1 - \delta_1)c_1 + \delta_1}{\delta_1} \right)^{\frac{1}{1-\delta_1}} \left(\frac{2 - \delta_2}{2(1 - \delta_2)c_1 + \delta_2} \right)^{\frac{1}{1-\delta_2}} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (38)$$

Dois fases exponenciais:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= \delta_1 \frac{e^{\delta_1 c_1} - 1}{e^{\delta_1} - 1} + \delta_2 \frac{e^{\delta_2} - e^{\delta_2 c_1}}{e^{\delta_2} - 1}, \\ \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} &= \left\{ \frac{(1 - e^{\delta_1})(1 - e^{\delta_1 c_1})}{\delta_1^2 e^{\delta_1 c_1}} + \frac{(1 - e^{\delta_2})(e^{\delta_2 c_1} - e^{\delta_2})}{\delta_2^2 e^{\delta_2(1+c_1)}} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Dois fases senoidais:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= 1 + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\delta_2}{k_2} \sin[\pi k_2(1 + c_1)] \sin[\pi k_2 c_2] - \frac{\delta_1}{k_1} \sin[\pi k_1(1 + c_1)] \sin[\pi k_1 c_2] \right\}, \\ \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} &= \left\{ \frac{1}{k_1 \sqrt{1 - \delta_1^2}} \left\{ \left[\left[k_1 c_1 + \frac{1}{2} \right] \right] + \frac{1}{\pi} \arctan \left[\frac{\sqrt{1 - \delta_1^2} \tan(\pi k_1 c_1)}{1 + \delta_1 \tan(\pi k_1 c_1)} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k_2 \sqrt{1 - \delta_2^2}} \left\{ k_2 - \left[\left[k_2 c_1 + \frac{1}{2} \right] \right] - \frac{1}{\pi} \arctan \left[\frac{\sqrt{1 - \delta_2^2} \tan(\pi k_2 c_1)}{1 + \delta_2 \tan(\pi k_2 c_1)} \right] \right\} \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (40)$$

em que $\llbracket \cdot \rrbracket$ denota o operador da parte inteira. Note-se que, para $\delta_1 = \delta_2$ e $k_1 = k_2$ ou $c_1 = 0, 1$, de (38)-(40) recuperam-se os resultados correspondentes a esses casos para o material periódico com μ variando continuamente na única fase, ou seja, as propriedades (34)₂, (35)₂ e (36)₂, respectivamente, e $\langle \mu \rangle = 1$.

Lembre-se que a lei efetiva (29) é linear com respeito a $\bar{\mathbf{F}}$ e, portanto, o comportamento de $\bar{\mathbf{P}}$ definido por ela será proporcional ao da propriedade efetiva $\hat{\mu}$. Por isso, neste caso também mostra-se somente o comportamento de $\hat{\mu}$ dado por (38)-(40) para as diferentes variações (linear, exponencial e senoidal) da propriedade constitutiva μ do bilaminado periódico. Especificamente, mostra-se o comportamento de $\hat{\mu}$ com respeito aos parâmetros de fase δ_r e k_r , e às concentrações de volume das fases c_r .

Na Figura 5, apresentam-se as componentes $\langle \mu \rangle$ e $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ da propriedade efetiva $\hat{\mu}$ com respeito aos parâmetros de fase δ_r para $c_1 = 0.5$, $k_1 = 2$ e $k_2 = 3$. Em todos os casos consegue-se observar que o comportamento de ambas $\langle \mu \rangle$ e $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ apresenta monotonicidade, seja crescente, seja decrescente, na direção definida por qualquer segmento de reta orientado contido no plano (δ_1, δ_2) .

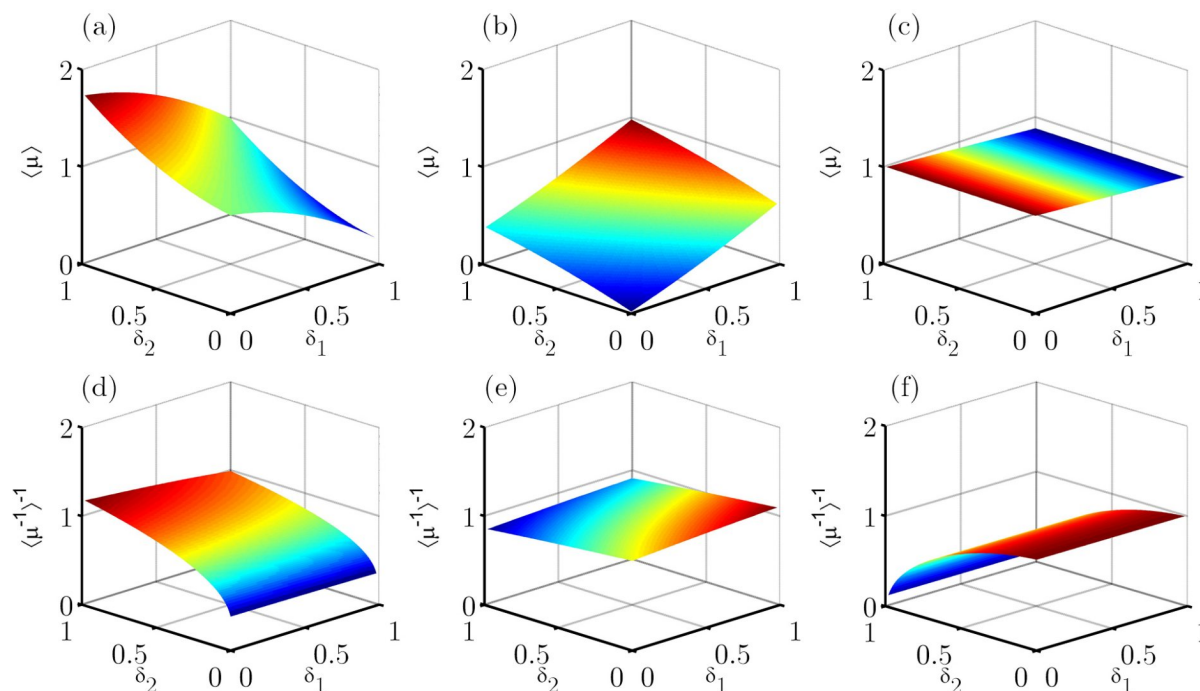


Figura 5: Variação com respeito aos parâmetros δ_r das propriedades efetivas $\langle \mu \rangle$ e $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ de bilaminados com fases funcionalmente gradadas segundo leis (a) e (d) lineares, (b) e (e) exponenciais, e (c) e (f) senoidais, respectivamente.

Na Figura 6, apresentam-se as componentes $\langle \mu \rangle$ e $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ da propriedade efetiva $\hat{\mu}$ com respeito à concentração de volume c_1 para $\delta_1 = 0.1$, $\delta_2 = 0.5$, $k_1 = 2$ e $k_2 = 3$. Na Figura 6(a), que corresponde ao bilaminado com fases com variação linear, ambas as curvas definidas por (38) são estritamente convexas com mínimos ocorrendo para valores diferentes de c_1 . Na Figura 6(b), que corresponde ao bilaminado com fases com variação exponencial acontece que ambas as curvas definidas por (39) são côncavas, sendo estrita somente a de $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ enquanto a de $\langle \mu \rangle$ é decrescente. Na Figura 6(c), que corresponde ao bilaminado com fases com variação senoidal, ambas as curvas definidas por (40) apresentam comportamentos oscilatórios, ou seja, as duas têm extremos tanto absolutos quanto relativos, sendo a principal diferença a tendência crescente da curva de $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$.

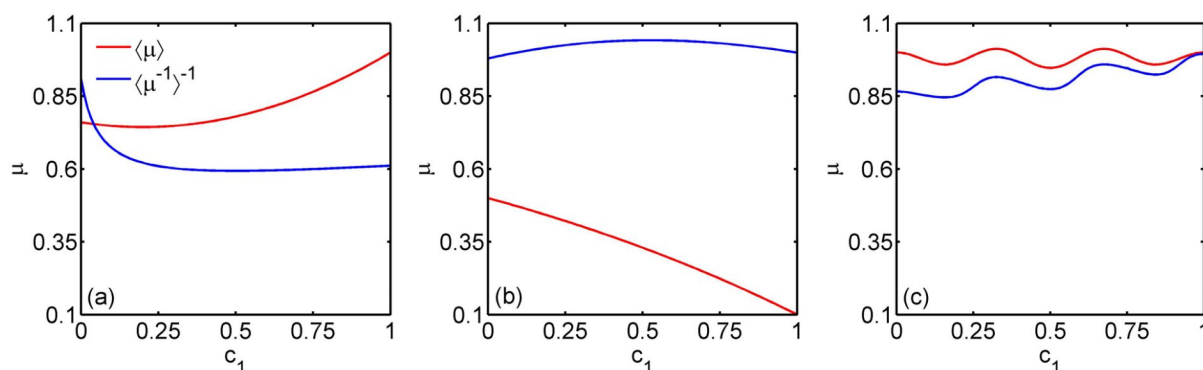


Figura 6: Variação com respeito à fração de volume c_1 das propriedades efetivas $\langle \mu \rangle$ e $\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}$ de bilaminados com fases funcionalmente gradadas segundo leis (a) lineares, (b) exponenciais, e (c) senoidais.

Um bilaminado com fases com amolecimento submetido a extensão uniaxial na direção da laminação

Agora, considera-se o caso do bilaminado formado por fases homogêneas com amolecimento apresentado acima submetido à extensão uniaxial na direção da heterogeneidade Y_h (Figura 7), ou seja, as componentes de $\bar{\mathbf{F}}$ são definidas como

$$\bar{F}_{hh} = \lambda, \quad \bar{F}_{ii} = \sqrt{\frac{\bar{J}}{\lambda}}, \quad i \neq h, \quad \bar{F}_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (41)$$

em que λ é a deformação principal na direção da heterogeneidade Y_h , e $\bar{J} = \det \bar{\mathbf{F}}$.

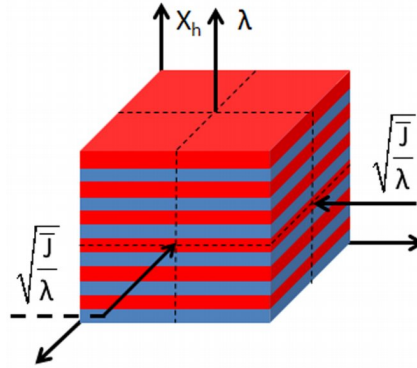


Figura 7: Representação da extensão uniaxial definida por (41).

Neste caso, de substituir (41) no sistema de equações definido por (31) e (32) resulta que $\phi'_{ih} = 0$ para $i \neq h$ e, portanto, segue uma única equação para ϕ'_{hh} , ou seja,

$$\mu_1 (\lambda + \phi'_{hh} - 1) \exp \left\{ \frac{\mu_2}{\Phi_2} E'_{\phi'_{hh}} - \frac{\mu_1}{\Phi_1} E'_{\phi'_{hh}} \right\} - \mu_2 \left(\lambda - \frac{c_1}{c_2} \phi'_{hh} - 1 \right) = 0, \quad (42)$$

em que

$$E'_{\phi'_{hh}} = E_\lambda + 2 \left(\sqrt{\frac{\bar{J}}{\lambda}} - 1 \right) \Delta^{(r)} \phi'_{hh} + \left(\Delta^{(r)} \phi'_{hh} \right)^2, \quad E_\lambda = (\lambda - 1)^2 + 2 \left(\sqrt{\frac{\bar{J}}{\lambda}} - 1 \right)^2. \quad (43)$$

Assim, de considerar (41) na lei efetiva (33) segue que $\bar{P}_{ij} = 0$ para $i \neq j$, enquanto

$$\bar{P}_{ii} = \begin{cases} 2\mu_1 (\lambda + \phi'_{hh} - 1) \exp \left\{ -\frac{\mu_1}{\Phi_1} E'_{\phi'_{hh}} \right\}, & i = h \\ 2c_r \mu_r \left(\sqrt{\frac{\bar{J}}{\lambda}} - 1 \right) \exp \left\{ -\frac{\mu_r}{\Phi_r} E_\lambda \right\}, & i \neq h \end{cases}. \quad (44)$$

Resulta de interesse apresentar também a realização da lei efetiva do caso sem amolecimento (29) para a deformação (41), ou seja,

$$\bar{P}_{ii} = \begin{cases} 2 \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} (\lambda - 1), & i = h \\ 2 \langle \mu \rangle \left(\sqrt{\frac{\bar{J}}{\lambda}} - 1 \right), & i \neq h \end{cases}, \quad (45)$$

com a qual compara-se a lei efetiva (44) na Figura 8, em que apresenta-se a variação das componentes não nulas de $\bar{\mathbf{P}}$, \bar{P}_{hh} e \bar{P}_{ii} com $i \neq h$, segundo as leis efetivas (45) e (44) de bilaminados

com fases hiperelásticas nas versões clássica e com amolecimento, respectivamente, com propriedades $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 4$, e $\Phi_1 = \Phi_2 = 1$, e submetidos à extensão uniaxial na direção da laminação Y_h definida por (41). As curvas são plotadas com respeito a $\bar{J} = \det \bar{\mathbf{F}}$ para $\lambda = 1.1$ e $c_1 = 0.51$ (Figuras 8(a) e (d)), $\lambda = \bar{F}_{hh}$ para $\bar{J} = 1.2$ e $c_1 = 0.51$ (Figuras 8(b) e (e)), e c_1 para $\bar{J} = 1.2$ e $\lambda = 1.1$ (Figuras 8(c) e (f)).

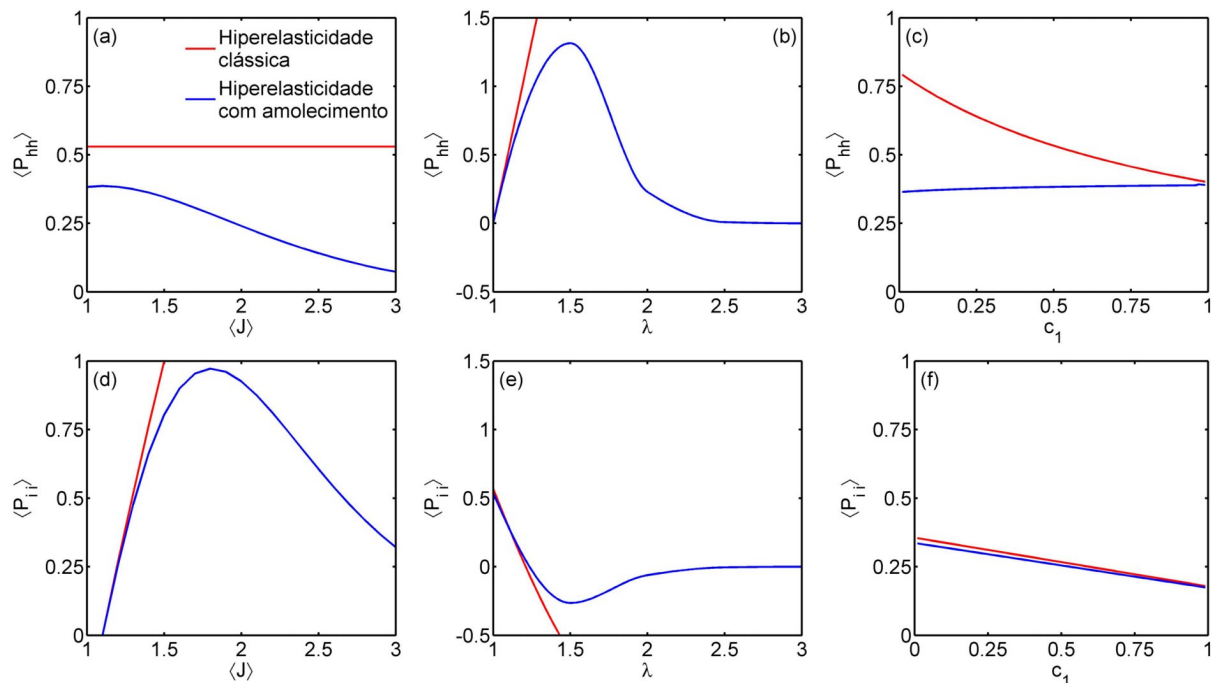


Figura 8: Variação das componentes \bar{P}_{hh} e \bar{P}_{ii} segundo as leis efetivas (44) e (45) dos casos com e sem amolecimento com respeito ao determinante Jacobiano \bar{J} ((a) e (d)), a deformação na direção da laminação λ ((b) e (e)), e a concentração de volume da fase 1 c_1 ((c) e (f)).

Na Figura 8(a) observa-se que a componente \bar{P}_{hh} do bilaminado sem amolecimento é constante com respeito a \bar{J} , enquanto para o bilaminado com amolecimento cresce até atingir um valor máximo em $\bar{J} \sim 1.1$ e depois decresce monotonicamente. Na Figura 8(d) observa-se que a componente \bar{P}_{ii} do bilaminado sem amolecimento cresce monotonicamente com respeito a \bar{J} , enquanto para o bilaminado com amolecimento cresce até atingir um valor máximo em $\bar{J} \sim 1.8$ e depois decresce monotonicamente. Nas Figura 8(b) e (e) observa-se que, para ambos os bilaminados, sob deformações pequenas, à extensão na direção de laminação corresponde um aumento na tensão nessa direção \bar{P}_{hh} e um decremento na tensão na direção perpendicular à de laminação. Além disso, para grandes deformações o comportamento de \bar{P}_{hh} e \bar{P}_{ii} é estritamente monotônico para o bilaminado sem amolecimento, enquanto \bar{P}_{hh} e \bar{P}_{ii} atingem valores extremos, máximo e mínimo, respectivamente, para $\lambda \sim 1.5$ para depois se aproximar monotonicamente a zero. Nas Figura 8(c) e (f) observa-se que, para ambos os bilaminados, a componente \bar{P}_{ii} é estritamente decrescente com respeito a c_1 , enquanto \bar{P}_{hh} cresce para o bilaminado com amolecimento e decresce para o bilaminado sem amolecimento.

Bilaminados com fases neo-Hookeanas compressíveis

A seguir, considera-se que comportamento constitutivo das lâminas é neo-Hookeano compressível, ou seja, aquele com função de energia e lei constitutiva (LOPEZ-PAMIES; PONTE CASTAÑEDA, 2009; OGDEN, 1997)

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{\mu}{3}\right) (J - 1)^2 + \frac{\mu}{2} (I(\mathbf{F}) - 3 - 2 \ln J), \\ P_{ij} &= \mu F_{ij} + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) (J - 1) - \frac{\mu}{J} \right] \text{cof} F_{ij}, \end{aligned} \quad (46)$$

em que κ e μ são, respectivamente, os módulos de volume e cisalhamento. Assim, a lei efetiva de tal bilaminado é

$$\begin{aligned} \bar{P}_{ij} &= c_r \langle \mu_r \rangle_r \left(\bar{F}_{ih} + \delta_{jh} \Delta^{(r)} \phi'_{ih} \right) \\ &+ \left[\left(c_r \langle \kappa_r \rangle_r - \frac{2}{3} c_r \langle \mu_r \rangle_r \right) (\bar{J} + \delta_{jh} \Delta^{(r)} J' - 1) - \frac{c_r \langle \mu_r \rangle_r}{\bar{J} + \delta_{jh} \Delta^{(r)} J'} \right] \text{cof} \bar{F}_{ij}, \end{aligned} \quad (47)$$

em que ϕ' é solução do sistema de equações algébricas definido por

$$\begin{aligned} \mu_1 (\bar{F}_{ih} + \phi'_{ih}) - \mu_2 \left(\bar{F}_{ih} - \frac{c_1}{c_2} \phi'_{ih} \right) + \text{cof} \bar{F}_{ij} \left[\frac{\mu_2}{\bar{J} - \frac{c_1}{c_2} J'} - \frac{\mu_1}{\bar{J} + J'} \right. \\ \left. + \left(\kappa_1 - \frac{2}{3} \mu_1 \right) (\bar{J} + J' - 1) - \left(\kappa_2 - \frac{2}{3} \mu_2 \right) \left(\bar{J} - \frac{c_1}{c_2} J' - 1 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

com $Y_h = c_1$. Aqui inclui-se também o caso de lâminas funcionalmente gradadas. Por outro lado, também resulta de interesse estudar o caso de lâminas com amolecimento, ou seja, aquelas que respondem à lei constitutiva

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \left\{ \mu F_{ij} + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) (J - 1) - \frac{\mu}{J} \right] \text{cof} F_{ij} \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{\Phi} \left[\left(\frac{\kappa}{2} - \frac{\mu}{3}\right) (J - 1)^2 + \frac{\mu}{2} (I(\mathbf{F}) - 3 - 2 \ln J) \right] \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

cuja lei efetiva é obtida ao substituir (49) em (24) com ϕ' solução do sistema de equações que resulta de substituir (49) em (23). Não serão apresentadas as expressões analíticas da lei efetiva e o sistema de equações para este caso devido à sua complexidade. Basta dizer que (47) e (48) estão completamente contidas nas expressões analíticas da lei efetiva e o sistema de equações para este caso.

Extensão uniaxial na direção da laminação

Neste caso, apresentam-se resultados da lei efetiva (47) de um bilaminado com fases homogêneas submetido à extensão uniaxial na direção da laminação como definida por (41) e representada na Figura 7. As propriedades dos materiais das lâminas são $\kappa_1 = 100$, $\mu_1 = 1$, e $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 20$. A Figura 9 apresenta as componentes não nulas de $\bar{\mathbf{P}}$, \bar{P}_{hh} e \bar{P}_{ii} , com respeito a \bar{J} para $\lambda = 1.1$ e $c_1 = 0.7$ (Figura 9(a)), λ para $\bar{J} = 1.2$ e $c_1 = 0.7$ (Figura 9(b)), e c_1 para $\bar{J} = 1.2$ e $\lambda = 1.1$ (Figura 9(c)). Note-se que o comportamento, em todos os casos, é estritamente monotônico, sendo ambas \bar{P}_{hh} e \bar{P}_{ii} crescentes com respeito a \bar{J} e decrescentes com respeito a c_1 , enquanto \bar{P}_{ii} cresce e \bar{P}_{hh} decresce com respeito a λ .

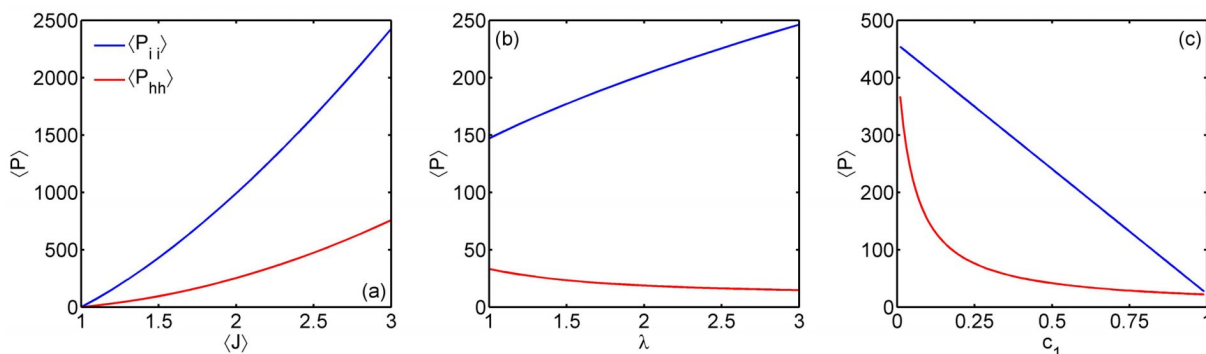


Figura 9: Variação das componentes \bar{P}_{hh} e \bar{P}_{ii} segundo a lei efetiva (47) com respeito ao determinante Jacobiano \bar{J} (a), a deformação na direção da laminação λ (b), e a concentração de volume da fase 1 c_1 (c).

Comportamento efetivo e evolução da microestrutura sob a ação de deformação plana

Agora, apresentam-se resultados da lei efetiva (47) de um bilaminado com fases homogêneas quando é submetido à deformação plana (Figura 10)

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{50}$$

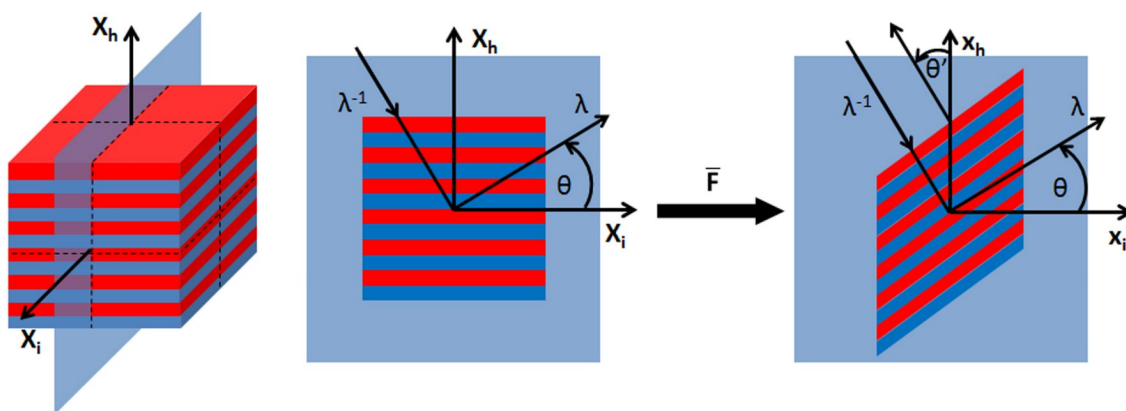


Figura 10: Representação da deformação plana definida por (50).

O bilaminado é o mesmo que na seção anterior, ou seja, as propriedades dos materiais das lâminas são $\kappa_1 = 100$, $\mu_1 = 1$, e $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 20$. A Figura 11 apresenta as componentes não nulas de $\bar{\mathbf{P}}$, \bar{P}_{ii} (Figura 11(a)), \bar{P}_{hi} (Figura 11(b)), \bar{P}_{ih} (Figura 11(c)) e \bar{P}_{hh} (Figura 11(d)), com respeito a λ para $c_1 = 0.7$ e $\theta \in \{0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ\}$. Além disso, a Figura 11(e) apresenta o desvio θ' da direção de laminação original acontecido após a deformação como representado na Figura 10. O desvio θ' , que é dado por

$$\theta' + \frac{\pi}{2} = \arccos \left\{ \frac{\frac{1}{2}(1 - \lambda^2) \sin 2\theta}{\sqrt{\lambda^4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} \right\}, \tag{51}$$

representa uma medida da evolução da microestrutura pois descreve a mudança de uma das suas características estruturais, a direção de laminação, no bilaminado deformado.

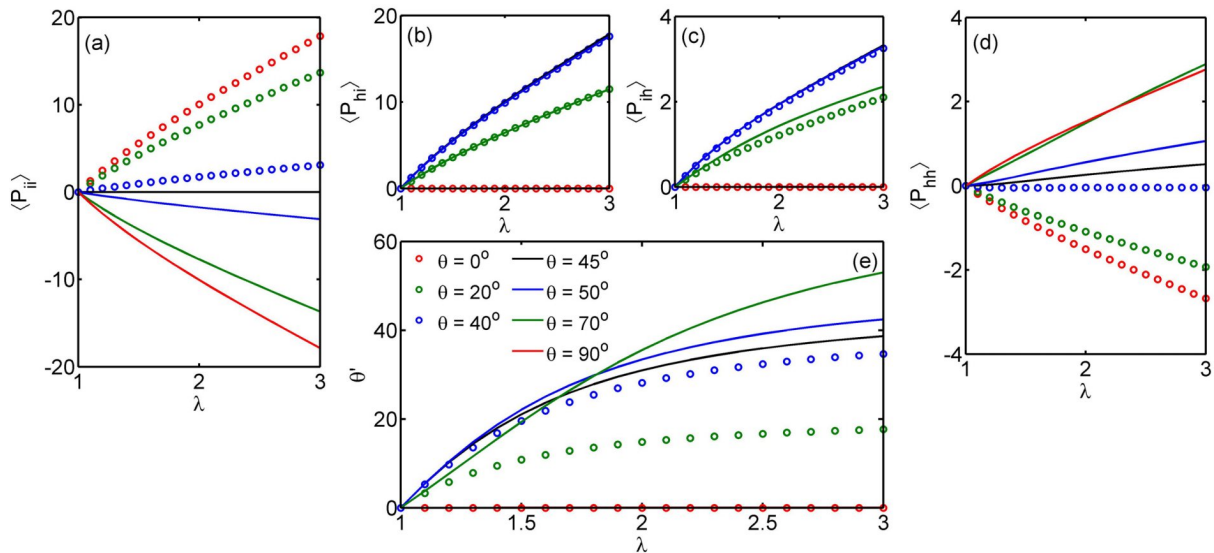


Figura 11: Variação das componentes não nulas de $\bar{\mathbf{P}}$ ((a)-(d)) e o desvio da direção de laminação original (e) do bilaminado submetido à deformação plana (50) plotadas para diferentes valores complementários de θ .

Primeiro, nas Figuras 11(a) e (d), note-se que, para $\theta \in 0^\circ, 90^\circ$, somente as componentes \bar{P}_{ii} e \bar{P}_{hh} são não nulas. Além disso, para θ fixo, \bar{P}_{ii} cresce enquanto \bar{P}_{hh} decresce, e vice-versa. Por outro lado, nas Figuras 11(b) e (c), note-se que, para $\theta \notin 0^\circ, 90^\circ$, as componentes \bar{P}_{hi} e \bar{P}_{ih} são estritamente crescentes. Nas Figuras 11(a)-(d), note-se que, quantitativamente, \bar{P}_{ii} e \bar{P}_{hh} aparentam ser inversamente proporcionais, enquanto \bar{P}_{hi} e \bar{P}_{ih} aparentam ser diretamente proporcionais. Finalmente, na Figura 11(e), note-se que a direção de laminação não muda para $\theta \in 0^\circ, 90^\circ$ no bilaminado deformado, enquanto para $\theta \notin 0^\circ, 90^\circ$ a direção de laminação no bilaminado deformado se desvia da direção de laminação original na medida que a deformação aumenta.

O limite de incompressibilidade sob extensão equibiaxial na presença de amolecimento e gradação funcional

Neste caso, assume-se que κ_r é constante enquanto μ_r varia linearmente segundo (34)₁ para ambos os bilaminados formados por fases com e sem amolecimento. Os bilaminados estarão submetidos à ação de uma extensão equibiaxial em planos paralelos à direção de laminação (Figura 12). Formalmente, escreve-se

$$\bar{F}_{ii} = \bar{F}_{hh} = \lambda, \quad \bar{F}_{jj} = \lambda', \quad \bar{F}_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (52)$$

em que λ' acontece na direção perpendicular ao plano da extensão equibiaxial e é obtida da condição $\langle P_{jj} \rangle = 0$. Interessamos estudar o comportamento destes bilaminados no limite de incompressibilidade, ou seja, para $\kappa_r \rightarrow \infty$ que deve implicar que $\bar{J} = \lambda' \lambda^2 \rightarrow 1$. Dito de uma outra forma, $\kappa_r \rightarrow \infty$ implicará que $\bar{J} = \lambda' \rightarrow \frac{1}{\lambda^2}$.

A Figura 13 apresenta resultados numéricos de \bar{P}_{hh} e \bar{J} obtidos segundo a lei efetiva para $\kappa_1 \in \{1.51, 10, 10^6\}$, $\delta_1 = 0.49$, $c_1 = 0.51$, $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = 1.5$, $\frac{\delta_2}{\delta_1} = 1.1$, e $\Phi_1 = \Phi_2 = 1$. As curvas plotadas com símbolos “o” e linhas sólidas representam, respectivamente, os bilaminados formados por fases com e sem amolecimento. As cores indicam os diferentes valores de κ_1 .

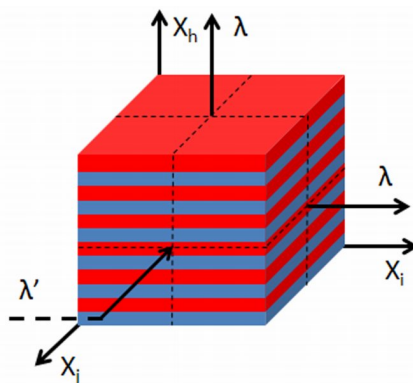


Figura 12: Representação da extensão equibiaxial definida por (52).

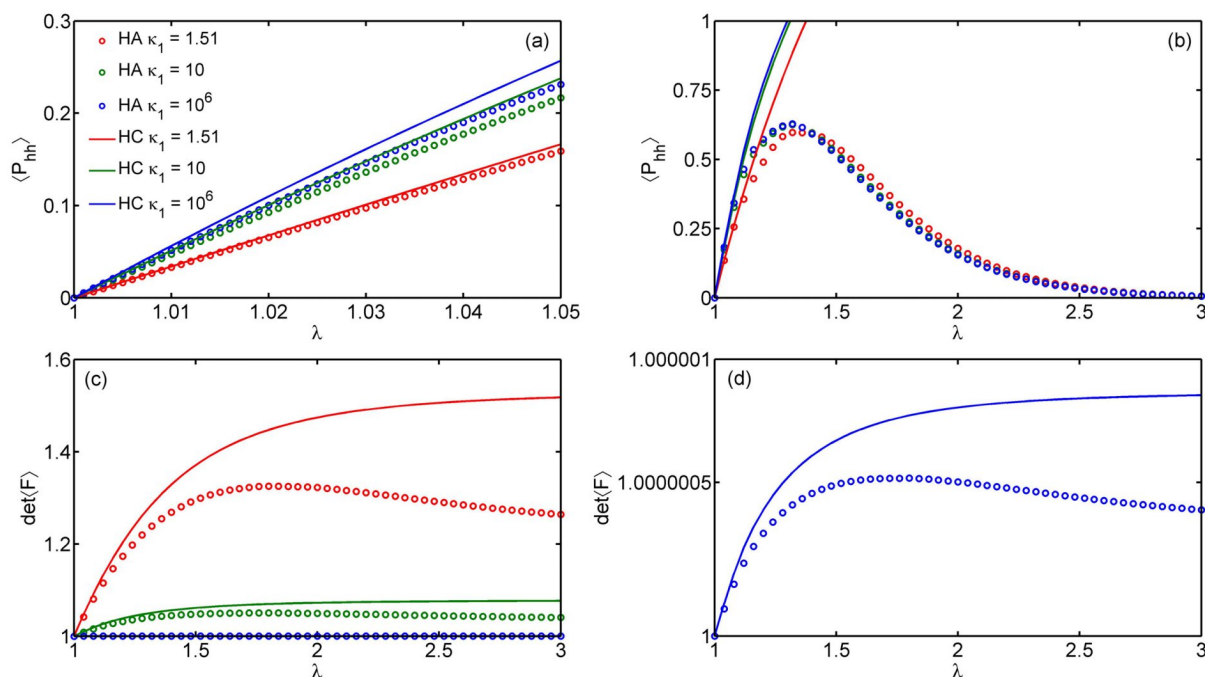


Figura 13: Variação da componente \bar{P}_{hh} ((a) e (b)) e o determinante Jacobiano \bar{J} ((c) e (d)) de bilaminados com e sem amolecimento com respeito a λ para valores crescentes de κ_r .

Na Figura 13(a) observa-se que, para deformações pequenas, os comportamentos efetivos de ambos os bilaminados são similares e reproduzem a hiperelasticidade clássica, ou seja, sem amolecimento. Na Figura 13(b) observa-se que, assim que a deformação cresce, a lei efetiva do bilaminado sem amolecimento cresce monotonicamente, enquanto a lei efetiva do bilaminado com amolecimento cresce até atingir um valor máximo em $\lambda \sim 1.3$ e depois decresce monotonicamente a zero. Além disso, na Figura 13(b) se observa que as curvas para $\kappa_1 \geq 10$ são praticamente indistinguíveis para ambos os bilaminados, o que sugere a existência de curvas limite para $\kappa_r \rightarrow \infty$. Na Figuras 13(c) e (d) observa-se que \bar{J} cresce monotonicamente para o bilaminado sem amolecimento, enquanto atinge um valor máximo para $\lambda \sim 1.7$ e depois decresce monotonicamente. Além disso, Figuras 13(c) e (d) confirmam que $\bar{J} \rightarrow 1$ para $\kappa_r \rightarrow \infty$ ambos os bilaminados, ou seja, eles são praticamente incompressíveis.

Considerações finais

O amolecimento das fases de um compósito é um mecanismo de falha que pode se manifestar macroscopicamente para deformações suficientemente grandes. O amolecimento macróscopico de compósitos pode ser predito mediante o método de homogeneização assintótica utilizado neste trabalho. Em particular, estudou-se o comportamento macróscópico de bilaminados no regime de deformação finita e analisaram-se inúmeros casos de comportamento constitutivo, a saber, combinações de hiperelasticidade com e sem amolecimento e gradação funcional (linear, exponencial, senoidal, cossenoidal, e tipo onda quadrada) sob diferentes tipos de deformação (cisalhamentos simples e puro, extensões uniaxial e equibiaxial, e deformação plana). Analisou-se a influência de vários parâmetros no comportamento efetivo, a saber, parâmetros que controlam a gradação funcional, a compressibilidade, e o amolecimento. Com estes resultados foram generalizados trabalhos anteriores referentes a barras e laminados com leis constitutivas não lineares sob deformações pequenas (DÉCIO JR et al., 2019, 2021; LÓPEZ-REALPOZO et al., 2008; PÉREZ-FERNÁNDEZ; BECK, 2014; PÉREZ-FERNÁNDEZ et al., 2007).

Referências

- BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. P. *Homogenization: Averaging processes in periodic media*. Dordrecht: Kluwer. 1989. 402p. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-2247-1>
- BERAN, M. J. *Statistical continuum theories*. New York: Wiley. 1968. 424p.
- DÉCIO JR, R. M. S.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J. Modeling of mechanical behaviour of a 1d, linear and microperiodic composite, with failure, via the asymptotic homogenization method. *Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão*, v.6, n.3, p.36901-36912, 2021a. <http://dx.doi.org/10.21575/25254782rmetg2021vol6n31685>
- DÉCIO JR, R. M. S.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J. Effective behavior of nonlinear microperiodic composites with imperfect contact via the asymptotic homogenization method. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, v.22, n.1, p.79-90, 2021b. <https://doi.org/10.5540/tcam.2021.022.01.00079>
- DÉCIO JR, R. M. S.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J. Exactness of formal asymptotic solutions of a Dirichlet problem modeling the steady state of functionally-graded microperiodic nonlinear rods. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, v.18, n.3, p.45-56, 2019. <https://doi.org/10.17512/jamcm.2019.3.04>
- HILL, R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.11, n.5, p.357-372, 1963. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90036-X)
- LOPEZ-PAMIES, O.; PONTE CASTAÑEDA, P. Microstructure evolution in hyperelastic laminates and implications for overall behavior and macroscopic stability. *Mechanics of Materials*, v.41, n.4, p.364-374, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2009.01.006>
- LÓPEZ-REALPOZO, J. C.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; GUINOVART-DÍAZ, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; SABINA, F. J.; MAUGIN, G. A. Effective properties of non-linear elastic laminated composites with perfect and imperfect contact conditions. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, v.15, n.5, p.375-385,

2008. <http://dx.doi.org/10.1080/15376490801977742>

OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformations*. New York: Dover. 1997. 544p.

<https://store.doverpublications.com/0486696480.html>

PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BECK, A. T. Failure detection in umbilicals via electroactive Elements - a mathematical homogenization approach. *International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry*, v.8, n.1, p.34-39, 2014.

PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; GÓMEZ-MUÑOZ, J. L.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVARTE-DÍAZ, R.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J.; SABINA DE LIS, J. C. An integrated approach for nonlinear model of composite rod (asymptotic homogenization vs. variational principles). *Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, v.13, n.1(27), p.50-63, 2007.

PRUCHNICKI, E. Hyperelastic law for reinforced elastomer at finite strain with edge effects. *Acta Mechanica*, v.129, n.3-4, p.139-162, 1998. <https://doi.org/10.1007/BF01176742>

SARAVANAN, U.; RAJAGOPAL, K. R. A comparison of the response of isotropic inhomogeneous elastic cylindrical and spherical shells and their homogenized counterparts. *Journal of Elasticity*, v.71, n.1-3, p.205-233, 2003.

<https://doi.org/10.1023/B:ELAS.0000005547.48580.7f>

VOLOKH, K. Y. Hyperelasticity with softening for modeling materials failure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.55, n.10, p.2237-2264, 2007.

<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2007.02.012>

ZEMAN, J.; ŠEJNOHA, M. Numerical evaluation of effective elastic properties of graphite fiber tow impregnated by polymer matrix. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.49, n.1, p.69-90, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(00\)00027-2](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(00)00027-2)