

O modelo polinomial ortogonal múltiplo com distribuição normal no estudo da fadiga em madeira

Júlio César Oliveira^{1†}, Mariano Espinosa²

¹Graduando em Estatística, Universidade Federal do Mato Grosso, campus Cuiabá.

²Professor Titular da Universidade Federal de Mato Grosso - Campus Cuiabá, lotado no Departamento de Estatística. E-mail: marianomphd@gmail.com.

Resumo: *O objetivo do trabalho foi apresentar o modelo polinomial ortogonal (MPO) com distribuição normal para estimar a vida à fadiga em emendas dentadas de madeira laminada colada. Os resultados obtidos mostram que o MPO Múltiplo da distribuição normal, sob um planejamento fatorial, foi adequado para o estudo da fadiga em corpos-de-prova de madeira laminada colocada com emendas dentadas.*

Palavras-chave: Fadiga; madeira; modelo polinomial ortogonal.

Abstract: *The aim this present work was to present the orthogonal polynomial model with normal distribution to estimate the fatigue life in glued laminated timber the joined finger joints. The results show that the Multiple Orthogonal Polynomial model of the normal distribution based on a factorial design, was adequate for the study of fatigue life in glued laminated timber the joined finger joints.*

Keywords: Fatigue; wood; orthogonal polynomial model.

Introdução

A ruptura ou falha dos materiais podem ser ocasionadas por diversas solicitações, sendo uma destas por fadiga. A fadiga é o processo de mudança estrutural permanente, localizada e progressiva que ocorre num material sujeito a variações de tensões e deformações no mesmo ponto ou pontos e que pode culminar em trincas ou ruptura completa após um número suficiente de variações de tensões (ASTM: E1150/87). Estas rupturas na área de ciências e engenharia dos materiais representam uma preocupação importante. Uma vez que as mesmas podem ocorrer a uma tensão consideravelmente menor que o limite de resistência do material considerando cargas estáticas.

Em particular as propriedades da fadiga em madeira e produtos de madeira (por exemplo, madeira laminada) são influenciadas pelos seguintes fatores (HANSEN, 1991): os gêneros de madeira, por exemplo coníferas e dicotiledôneas, densidade, espécie, etc.; tamanho e forma do corpo-de-prova; o teor de umidade tem uma influência significativa nas características da madeira, incluindo as propriedades de fadiga; o tipo de solicitação (ensaios de tração, compressão, flexão ou cisalhamento ou uma combinação destes) e outros fatores

† Autor correspondente: juliocm.oliveira@uol.com.br.

que podem afetar as propriedades da fadiga em madeira são a temperatura, tratamentos químicos, adesivos, a colagem, os tipos de ligações, etc.

No caso da MLC um dos fatores mais importantes é a resistência das emendas dentadas, que pode ser afetada por outros fatores tais como: geometria e usinagem da emenda, adesivo e a técnica de colagem usada, que inclui a aplicação e secagem do adesivo, montagem da emenda e teor de umidade da madeira. Outros aspectos da técnica da manufatura, também afetam as propriedades de resistência destas emendas (MACÊDO, 1996).

A utilização de um planejamento fatorial no estudo da fadiga na tração em emendas dentadas em particular, é justificada por varias causas, tais como: menor número de ensaios, menor tempo nos ensaios e, por conseguinte menor custo, menor variabilidade nos resultados, entre outros. Porém, a causa principal é poder conhecer os efeitos que algumas variáveis exercem sobre outras, relacionando-as por meio de um modelo estatístico e assim otimizando o sistema (MARTÍNEZ; CALIL, 2000).

Em muitas situações experimentais de engenharia quando alguma resposta é influenciada por certos fatores, pode-se mostrar que em geral os planejamentos fatoriais são os planejamentos estatísticos de experimentos mais eficientes. Em um planejamento fatorial são investigadas as influências de todas as possíveis combinações dos níveis ou categorias das variáveis experimentais ou fatores de interesse em cada ensaio (MENDENHALL, 2016; CALADO; MONTGOMERY, 2003).

Um planejamento fatorial é usado com a finalidade de (MONTGOMERY; RUNGER, 2014):

- a) direcionar a pesquisa, pois são especialmente úteis na etapa exploratória da pesquisa;
- b) indicar o tamanho da amostra a ser selecionada;
- c) permitir fazer múltiplas comparações e, por conseguinte facilitar o desenvolvimento e crítica dos modelos;
- d) proporcionar estimadores de parâmetros altamente eficientes (estimadores cuja variância é pequena).

Das finalidades descritas a (c) é a mais importante, pois os planejamentos fatoriais permitem o desenvolvimento de uma relação funcional.

Os planejamentos fatoriais com três níveis são formados por k fatores, cada um com três níveis (-1: baixo; 0: intermediário; +1: alto). Tais planejamentos são especialmente úteis na etapa exploratória de uma pesquisa, quando um sistema não é muito conhecido e o modelo é ainda identificado. Num planejamento 3^k ou em qualquer planejamento fatorial, na prática é conveniente não ter que tratar com as medidas numéricas atuais das variáveis x_i^* , em vez disso é conveniente trabalhar com variáveis codificadas x_i^c , isto é, codificando os níveis dos fatores (MARTINEZ; CALIL, 2000):

- a) Se as variáveis independentes são qualitativas, elas não são numéricas, portanto é necessário codificar seus níveis para estimar um modelo de regressão.
- b) Se as variáveis independentes são quantitativas, também se deve codificar para estimar um modelo de regressão por duas razões principais:
 - b.1) Para estimar os parâmetros do modelo deve-se inverter uma matriz denotada por $(X^* X^*)$. Durante o processo de inversão desta, podem ocorrer erros consideráveis de arredondamento se os números da matriz $(X^* X^*)$ variam grandemente em valor absoluto, o qual geralmente produz erros nas estimativas dos parâmetros. Com a codificação se facilita a inversão da matriz, desta maneira

reduzindo os erros de cálculos e, portanto, conduzindo a uma estimativa mais precisa dos parâmetros.

- b.2) A segunda razão para codificar as variáveis quantitativas, são os problemas de multicolinearidade. Quando modelos de regressão (exemplo, modelos de ordem maior ou igual que dois) são estimados, o problema de multicolinearidade é inevitável, especialmente quando são estimados termos de ordem alta. Por exemplo, nos modelos quadráticos, as duas variáveis x_1^* e x_1^{2*} geralmente são altamente correlacionadas. Também a probabilidade de erros de arredondamento nos coeficientes de regressão aumenta na presença de multicolinearidade. Com a codificação em geral são eliminados estes problemas.

Uma expressão polinomial de grau d pode ser considerada como uma expansão da Serie de Taylor da função teórica verdadeira básica $f(\tilde{X}^c)$ truncada depois do termo de ordem d , onde as seguintes propriedades usualmente se cumprem (BOX; DRAPER, 1987):

- A ordem mais alta da função aproximada, ou mais fechada da serie de Taylor pode aproximar a função verdadeira.
- Quanto menor é a região sobre a qual a aproximação é feita, melhor será a possível aproximação com uma função polinomial de um dado grau.

Geralmente, na prática podemos supor que, sobre regiões limitadas do espaço dos fatores, um polinômio de primeiro ou segundo grau pode representar adequadamente a função verdadeira (BOX; DRAPER, 1987).

A forma geral de um modelo de segunda ordem, considerando os planejamentos fatoriais com 3 níveis será dado por:

$$Y_i = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i^c + \sum_{i=1}^k a_{ii} x_i^{2c} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=2}^k a_{ij} x_i^c x_j^c + \varepsilon_i^c \quad (1)$$

$i < j$

na qual a resposta Y_i em problemas de fadiga em geral representa o logaritmo de N ($\ln(N)$), $x_1^c, x_2^c, \dots, x_k^c$ são as variáveis independentes codificadas que influem na resposta Y_i , a_0 , a_i ($i = 1, 2, \dots, k$), a_{ii} ($i = 1, 2, \dots, k$), a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, k$), são os parâmetros desconhecidos a ser determinados e ε_i^c é o erro aleatório (resíduo), onde a c minúscula indica o resíduo do modelo com as variáveis independentes codificadas.

Para a formulação do modelo da equação (2) foi considerado um planejamento fatorial, por este motivo, os valores das variáveis independentes foram codificadas. Neste caso os valores das variáveis que formam a matriz X^c dada pelo modelo da equação (1) podem ser ortogonalizados com bastante facilidade, a matriz X^c ortogonalizada, em forma geral, pode ser representada da seguinte maneira:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

As variáveis x_{ip} e x_{iq} são chamadas ortogonais uma em relação a outra se $x_{ip}x_{iq} = 0$, para $p \neq q$ (KHURI; CORNEEL, 2018).

Assim utilizando a matriz dada pela equação (2) o modelo dado pela equação (1) pode ser escrito como:

$$\tilde{Y} = X\tilde{A} + \tilde{\varepsilon} \quad (3)$$

que é o modelo polinomial ortogonal múltiplo da distribuição normal, onde $\tilde{\varepsilon}$ é o erro aleatório do modelo com distribuição normal, com média zero e variância constante.

O objetivo do presente trabalho foi apresentar o modelo polinomial ortogonal com distribuição normal para estimar a vida à fadiga em emendas dentadas de madeira laminada colada.

Material e Métodos

O material empregado na pesquisa foram 54 corpos-de-prova, com emendas dentadas, da espécie Eucalipto Grandis, utilizando o adesivo CASCOPHEN RS-216M e o método de amostragem utilizado o aleatório simples (MARTINEZ et al., 2000). A dimensão e confecção dos corpos-de-prova foi realizada de acordo com Marcêdo (2000) e a NBR 7190/97 e a execução dos ensaios estáticos e cíclicos foram realizados na máquina universal de ensaios DARTEC M1000/RC.

Nesta pesquisa o planejamento estatístico aplicado foi um planejamento fatorial 3^2 e a variável resposta o número total de ciclos até a falha (N), considerando os fatores tensão (S) e frequência (f) e os níveis de S para os carregamentos cíclicos: 60%, 75% e 90% da resistência do material (f_{t0}), estimados nos ensaios estáticos dos corpos-de-prova gêmeos e as f consideradas: 1; 5 e 9 HZ.

O *software* utilizado para o tratamento dos dados foi o *software* R versão 3.6.3 (R CORE TEAM, 2020).

Resultados e Discussão

O Estudo foi realizado para avaliar a resistência à fadiga em 54 corpos de prova com emendas dentadas, para a espécie de Eucalipto Grandis com o adesivo CASCOPHEN RS-216M, obtidos no Laboratório de Madeira e Estruturas de Madeira (LaMEM) da Universidade de São Paulo de São Carlos (USP) no ano 2000 (MACÊDO, 2000). Os resultados experimentais são apresentados na Tabela 1.

A análise dos dados da Tabela 1 foi realizada com o modelo de regressão da expressão (3) e considerando as duas variáveis independentes, assim como seus efeitos de interação e efeitos quadráticos de ambas as variáveis. Obtendo-se o seguinte modelo:

$$\hat{N} = 9292 - 24581x_1^c + 13458x_2^c - 14239x_1^c x_2^c + 11118x_1^{2c} + 6571x_2^{2c}, \quad (4)$$

no qual x_1^c representa o efeito principal da variável tensão (S) e x_2^c o efeito principal da variável frequência (f).

Tabela 1 Dados da vida à fadiga para corpos-de—prova com emendas dentadas para espécie de Eucalipto Grandis com o adesivo CASCOPHEN RS-216M obtidos no LaMEM (MACÊDO, 2000).

Ensaio (i)	RESPOSTA (N)						Fatores	
	N_{i1}	N_{i2}	N_{i3}	N_{i4}	N_{i5}	N_{i6}	S (%)	f (HZ)
1	30000	26052	16135	36250	25161	16019	60	1
2	6007	2924	6014	2075	4321	5378	75	1
3	69	31	108	67	49	40	90	1
4	50073	35106	26022	66561	21410	47202	60	5
5	9205	4138	13371	6027	10327	9535	75	5
6	325	264	139	216	413	335	90	5
7	80135	40166	70910	101142	104429	95920	60	9
8	25796	51125	30239	10556	17613	31451	75	9
9	627	155	198	400	130	203	90	9

Nota: N_{i1}, \dots, N_{i6} na Tabela 1 indicam as réplicas da resposta N para cada combinação.

Para verificar a adequação do modelo (4), foi utilizada uma análise residual. Inicialmente, construiu-se o gráfico dos resíduos contra os valores ajustados para verificar a suposição de variância constante dos resíduos (Figura 1), neste gráfico observa-se uma forma de funil, indicando um aumento de variância, e, portanto, deve-se fazer uma transformação dos dados para verificar se é possível estabilizá-la. E posteriormente, para verificar a distribuição normal dos resíduos foi construído um gráfico de probabilidade normal (Figura 2), nesta figura observa-se que os pontos não estão localizados ao longo de uma reta, indicando que os resíduos do modelo não seguem uma distribuição normal. Assim, concluindo que o modelo dos dados sem transformar não é adequado para analisar os dados da Tabela 1.

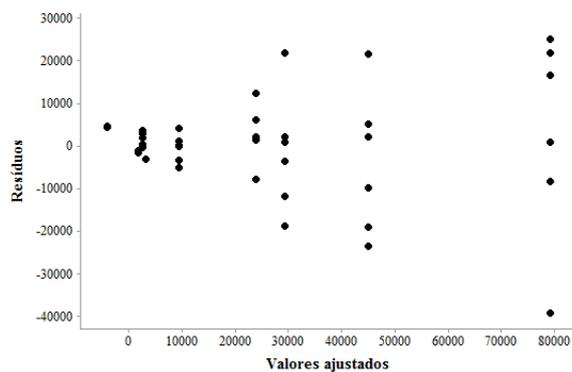


Figura 1 Gráfico dos resíduos contra valores ajustados para os dados da Tabela 1 (sem transformar).

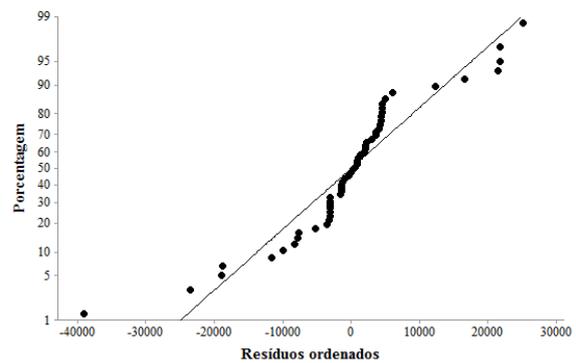


Figura 2 Gráfico de probabilidade normal dos resíduos para os dados da Tabela 1 (sem transformar).

A seguir foi realizada uma transformação logarítmica dos dados ($\log(N)$) da Tabela 1 e uma nova análise de regressão, utilizando o modelo (4). Neste caso o modelo final foi:

$$\log(\hat{N}) = 3,9753 - 1,2160x_1^c + 0,3218x_2^c - 0,5736x_1^{2c} \tag{5}$$

Na Figura 3 é apresentado o gráfico dos resíduos contra os valores ajustados deste novo modelo e verifica-se com este gráfico, que a variância é constante para os dados da resposta transformados. Para confirmar a suposição de normalidade dos dados transformados ($\log(N)$) foi utilizado o teste estatístico de Shapiro-Wilk ($p^* > 0,10$) e concluiu-se que a suposição de normalidade não foi rejeitada pelos dados amostrais considerados ao nível de 5% de significância conforme pode ser observado na Figura 4.

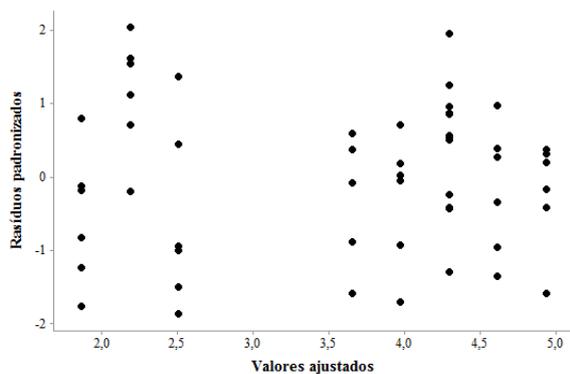


Figura 3 Gráfico dos resíduos padronizados contra valores ajustados para os dados da Tabela 1 (transformados).

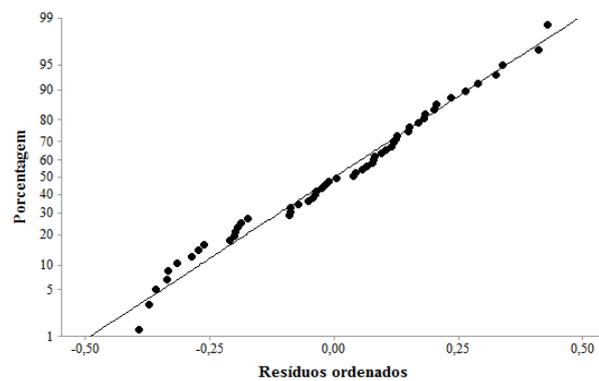


Figura 4 Gráfico de probabilidade normal dos resíduos para os dados da Tabela 1 (transformados).

Na Tabela 2 são apresentados os coeficientes dos efeitos principais dos fatores, tensão (em %), frequência (em HZ) e o efeito quadrático da tensão, os desvios padrão dos coeficientes, os intervalos de confiança de 95% e os valores de p para cada coeficiente, do modelo de regressão da Expressão (5). Também nesta tabela é apresentado o coeficiente de determinação (R^2), o tamanho de amostra (n), o desvio padrão e p-valor deste modelo.

Tabela 2 Coeficientes de regressão das variáveis independentes, DP, IC e p-valor, para os dados do modelo da expressão (1).

Variável	Coeficiente	DP	IC 95%	p-valor
Constante	3,9753	0,0512	(3,8725 ; 4,0781)	<0,001
x_1^c	-1,2160	0,0362	(-1,2887 ; -1,1433)	<0,001
x_2^c	0,3218	0,0362	(0,2491 ; 0,3945)	<0,001
x_1^{2c}	-0,5736	0,0627	(-0,6995 ; -0,4477)	<0,001
$R^2 = 0,9605$ $n = 54$ $s = 0,2171$ $p < 0,001$				

De acordo com a Tabela 2, analisa-se que os efeitos principais dos fatores tensão e frequência e o efeito quadrático da tensão são estatisticamente significativos nos níveis usuais e se observa que o efeito principal e quadrático da tensão, diminui a vida à fadiga e o efeito principal da frequência aumenta, nas emendas dentadas de madeira laminada colada com o adesivo CASCOPHEN RS-216M dos corpos de prova.

Considerações Finais

O uso de um planejamento fatorial em estudos de fadiga de madeira laminada colada com emendas dentadas, coladas com o adesivo CASCOPHEN RS-216M, diminui o número de ensaios e pode aumentar grandemente a eficiência destes experimentos. Para analisar os dados de fadiga em corpos-de-prova da madeira com emendas dentadas se deve utilizar uma transformação logarítmica dos dados originais da resposta e uma codificação dos fatores. Os resultados obtidos mostram que o modelo Polinomial Ortogonal Múltiplo da distribuição normal, baseado em um planejamento fatorial, foi adequado para o estudo da fadiga em corpos-de-prova de madeira laminada colocada com emendas dentadas. Também, como o efeito da tensão e da frequência foram estatisticamente significativos, o pesquisador deve considerar estes dois fatores para estimar o número total de ciclos até a falha e não unicamente em função da tensão como é usual na prática de engenharia.

Referências Bibliográficas

ASTM: E1150/87 Standard Definitions of Terms Relating to Fatigue. American Society for testing and Materials, p1-10, 1987.

BOX, G.E.P.; DRAPER, N.R. Empirical Model- Buldiging and response surfaces. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1987.

CALADO, V.; MONTGOMERY, D. C. Planejamento de Experimentos usando *Statistica*. Rio de Janeiro: E-Papers Serviços. 2003. 260p.

HANSEN, L. P. Experimental investigation of fatigue properties of Laminated Wood Beams. Timber Engineering conference London, Pap – 3742, 1991.

KHURIA, I.; CORNELL, J. A.; Response Surfaces: Designs and Analysis. Marcel Dekker, Inc. New York, 2018.

MACÊDO, A. N. Fadiga em Emendas Dentadas em Madeira Laminada Colada (MLC). São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, SET, 2000.

MACÊDO, A. N. Estudo de Emendas Dentadas em Madeira Laminada Colada (MLC): Avaliação de Métodos de ensaios. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, SET, 1996.

MARTÍNEZ, E. M.; CALIL, C. J. Statistical Design of Experiments of Fatigue in MDF. Journal Materials Research, v.3, N.3, p84-91, July, ISSN: 1516-1439, 2000.

MARTÍNEZ, M. E.; CALIL, C. J.; SALES, A. Un método de muestreo para la determinación de las propiedades físicas y mecánicas de la madera. Revista Madera Ciencia y Tecnología, v. 2, n. 1, p. 5-20. ISSN: 01717-3644, 2000.

MARTÍNEZ, E. M.; CALIL, C. J. Statistical Design of Experiments of Fatigue in MDF. Journal Materials Research, v3, No. 3, p84-91, July. ISSN: 1516-1439, 2000 a.

MARTÍNEZ, E. M.; CALIL, C. J. FADIGA EM EMENDAS DENTADAS DE MADEIRA: MODELO ESTATÍSTICO. Madeira Arquitetura e Engenharia, v. 8, No. 15, 2000.

MENDENHALL, W. Statistical for the Engineering and the Sciences. **Sixth Edition**. CRC Press, New York, 2016.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. Applied Statistical and Probability for Engineers. Sixth Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2014

NBR 7190/97. Norma Brasileira: Projeto de Estruturas de Madeira. Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), mar, 1997.

R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2020. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.