

## Correlação entre retornos de ações da BM&FBOVESPA: uma análise via cópula dinâmica

Marcela de Marillac Carvalho<sup>†</sup>, Kelly Pereira de Lima, Thelma Sáfadi

*Departamento de Estatísticas, Universidade Federal de Lavras*

**Resumo:** *O comportamento da dependência entre retornos de ativos financeiros é importante para a compreensão de questões em finanças. Neste contexto, a teoria de cópulas dinâmicas constitui uma importante ferramenta, na análise multivariada de séries financeiras, graças à sua flexibilidade para construir funções de distribuição multivariadas que reproduzam diversos tipos de dependências e mensurar o movimento desta relação ao longo do tempo. Desta maneira, este trabalho tem como objetivo investigar e mensurar a estrutura e o movimento da correlação existente entre pares de retornos de ações referentes as empresas Ambev, Itaú Unibanco, Petrobrás cotadas na Bolsa de Valores e Mercadorias de São Paulo (BM&FBOVESPA) no período de 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017. Para tanto, utilizou a cópula condicional Normal com parâmetro tempo-variante especificada por Patton (2006) que quantifica e capta a trajetória temporal do coeficiente de correlação linear, que configura uma relevante medida de dependência. Os resultados da magnitude da dependência e a trajetória ao longo do tempo aferidos entre estes pares de ações, refletem as peculiaridades dos setores de atuação de cada companhia, bem como a influência da incerteza do mercado, o que demonstra a importância da diversificação de ativos em análise de investimentos.*

**Palavras-chave:** *Cópulas; retornos de ações; correlação.*

**Abstract:** *The behavior of the dependence among returns on financial assets is important for the understanding of finance issues. In this context, the dynamic copulas theory is an important tool in the multivariate analysis of financial series, thanks to its flexibility to construct multivariate distribution functions that reproduce several types of dependencies and measure the movement of this relationship over time. In this way, this work aims to investigate and measure the structure and the movement of the correlation between pairs of stock returns referring to the companies Ambev, Itaú Unibanco, Petrobras listed on the São Paulo Stock Exchange (BM&FBOVESPA) at the period from January 3, 2011, to June 21, 2017. For this, he used the conditional copula Normal with time-variant parameter specified by Patton (2006) that quantifies and captures the temporal trajectory of the linear correlation coefficient, which configures a relevant measure of dependency. The results of the magnitude of the dependence and the trajectory over time measured between these pairs of stocks reflect the peculiarities of the sectors of performance of each company, as well as the influence of market uncertainty, which demonstrates the importance of the diversification of assets in investment analysis.*

**Keywords:** *Copulas; stock returns; correlation.*

---

<sup>†</sup>Autor correspondente: marcela-carvalho@hotmail.com.

## Introdução

Na área de finanças o comportamento da dependência entre retornos financeiros é uma ferramenta essencial no processo de composição de carteiras e gerenciamento de risco. Uma medida usual empregada para análise das movimentações de diversos ativos financeiros é o coeficiente de correlação linear, com o objetivo de seleção/diversificação de carteiras e estimação de riscos tendo base o modelo de Média-Variância de Markovitz (1952) que é considerado uma importante ferramenta na teoria moderna de carteiras.

A modelagem de distribuições multivariadas é então aplicada no contexto da alocação de investimentos entre vários ativos, de forma a reduzir riscos. Assim, este trabalho propõe o uso de cópulas dinâmicas para análise do movimento da correlação entre o retorno de algumas das ações mais líquidas da Bolsa de Valores e Mercadorias de São Paulo (BM&FBOVESPA): Ambev, Itaú Unibanco e Petrobrás. Esta abordagem vem sendo bastante difundida na literatura de finanças devido sua flexibilidade, robustez e consistência na análise multivariada de dados financeiros. Com a metodologia de cópulas é possível reproduzir a natureza dinâmica da correlação linear existente nas relações comerciais e financeiras.

Conforme Nelsen (2006) uma cópula pode ser definida como uma função de distribuição conjunta com marginais uniformes distribuídas no intervalo  $[0,1]$ , obtidas por meio da transformação integral de probabilidade. A ideia de cópula é introduzida por Sklar (1959) e compreende em uma metodologia para modelar distribuições multivariadas de forma flexível, admitindo que toda distribuição desse tipo pode ser decomposta em distribuições marginais e em uma estrutura de dependência, representadas pelas funções cópulas que possibilitam captar diversas formas de dependência.

Dentre as funções cópulas existentes, a função cópula Normal têm sua estrutura de dependência capturada por uma matriz de correlação. No que se refere a análise dinâmica, em séries temporais o método paramétrico condicional de Patton (2006) possibilita o ajuste da cópula Normal com a especificação da evolução de seu parâmetro de dependência, refletindo a natureza dinâmica da correlação linear existente entre ativos financeiros. Nesta abordagem, o ajuste das cópulas é realizada com resíduos padronizados das marginais dos retornos, que são modeladas com processos de variância condicional da classe ARCH, desenvolvidos a partir de Engle et al. (1993), adequados para modelar e descrever peculiaridades de retornos de ativos financeiros.

Então para investigar e mensurar a estrutura e o movimento da correlação existente entre os pares de retornos diários de ações em questão, recorre-se a metodologia de cópulas condicionais bivariadas com o uso da cópula Normal com parâmetro de correlação tempo-variante especificada por Patton (2006). As marginais são obtidas como processos ARMA-APARCH definidos em Ding et al. (1993) que são adequados para modelar a volatilidade desses ativos e descrever especificidades, como efeito de alavancagem. O período analisado corresponde a 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017, em que importantes acontecimentos no âmbito político/econômico nacional e internacional impactaram no comportamento do mercado financeiro brasileiro, o que traz a importância da abordagem de dependência baseada na cópula dinâmica

## Materiais e Métodos

Na análise deste trabalho foram utilizados os log-retornos das cotações diárias das ações da carteira teórica da BM&FBOVESPA: ABEV3 (Ambev), ITUB4 (Itaú Unibanco) e PETR4 (Petrobrás). O período correspondente é de 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017 e os dados são provenientes da base de dados Economática, totalizando 1533 observações para cada série.

Seja  $X_{1t}$  e  $X_{2t}$  um par de séries temporais dos log-retornos das ações com respectivas distribuições marginais  $F_1(X_{1t}|w_1)$  e  $F_2(X_{2t}|w_2)$ , conforme Patton (2006) a partir do caso condicional do Teorema de Sklar(1959) existe uma função cópula condicional bivariada  $C$  tal que:

$$F(X_{1t}, X_{2t}|w) = C(F_1(X_{1t}|w_1), F_2(X_{2t}|w_2)|w)$$

sendo que se  $F$  é contínua, a função  $C(\cdot)$  é única, caso contrário é determinada somente em  $ImF_1 \times ImF_2$ . O conjunto  $w = (w_1, w_2)$  corresponde a informações passadas das séries com  $w_1$  e  $w_2$  subconjuntos com informações relevantes para  $X_{1t}$  e  $X_{2t}$ , respectivamente. Neste trabalho, as distribuições marginais para cada série temporal de retornos serão modelas por processos da classe ARMA-APARCH univariados sem variáveis exógenas.

Na abordagem para séries temporais no caso condicional uma função cópula pode ser obtida por meio da transformação integral de probabilidade nos resíduos padronizados ( $Z_{it}$ ) das marginais  $F_i(X_{it}|w_i)$ , para distribuição Uniforme $[0, 1]^2$ . Assim, a função cópula Normal condicional bivariada  $C_N$ , com parâmetro de correlação  $-1 \leq \rho \leq 1$ , pode ser expressa por:

$$C_N(u_t, v_t; \rho|w) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_t)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v_t)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dudv, \quad u_t, v_t \in [0, 1]^2 \quad (1)$$

em que  $u_t = F(Z_{1t}|w_1)$  e  $v_t = F(Z_{2t}|w_2)$  são as respectivas transformadas e  $\Phi^{-1}$  representa a inversa da distribuição Normal padrão univariada.

Neste trabalho o método de estimação utilizado é o Inferência para as Marginais (MIM), proposto por Joe na Xu (1996), a partir da maximização da função log-verossimilhança da densidade da conjunta condicional  $F$  dada por:

$$l(\theta_1, \theta_2, \theta_c|W) = \sum_{t=1}^T \ln(f_1(X_{1t}|w_1; \theta_1)) + \sum_{t=1}^T \ln(f_2(X_{2t}|w_2; \theta_2)) + \sum_{t=1}^T \ln(c_N(u_t, v_t|w; \rho)) \quad (2)$$

sendo  $c_N(u_t, v_t|w; \rho)$  a densidade da função cópula dada em (1), obtida pelas derivadas parciais em relação a  $u_t$  e  $v_t$ , e  $f_i(X_{it}|w_i; \theta_i)$  a densidade das marginais.

Pelo MIM o processo de estimação de (2) ocorre em dois estágios, em que inicialmente são estimados os parâmetros de cada marginal ( $\theta_1, \theta_2$ ) e depois o parâmetro da cópula ( $\rho$ ). Ou seja:

**Passo 1:** Estimação das marginais,

$$\hat{\theta}_1 = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln(f_1(X_{1t}|w_1; \theta_1))$$

$$\hat{\theta}_2 = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln(f_2(X_{2t}|w_2; \theta_2))$$

como dito anteriormente  $X_{it} \sim ARMA(p,q) - APARCH(1,1)$ , com erros  $\varepsilon_{it} \sim t - skewed(\nu_i, \xi_i)$ :

$$X_{it} = ARMA(p, q) + \varepsilon_{it},$$

$$\sigma_{it}^\delta = \omega + \alpha_1(|\varepsilon_{it-1}| - \gamma_1 \varepsilon_{it-1})^\delta + \beta_1 \sigma_{it-1}^\delta$$

em que  $\omega$  corresponde ao nível médio da volatilidade da variância condicional,  $\delta$  representa uma transformação Box-Cox em  $\sigma_t$  que possibilita a estimação de outras potências, para o desvio padrão condicional,  $\gamma_i$  capta o efeito de alavancagem e  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  retratam juntos a persistência da volatilidade. A adequabilidade de cada modelo foi determinada pelo critério de Informação de Akaike (AIC) e com a realização de diagnósticos nos resíduos, por meio do teste Box-Pierce.

**Passo 2:** A partir das pseudo-observações dos resíduos das marginais estima-se o parâmetro constante da cópula Normal dada em (1),

$$\hat{\theta}_c = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c_N(u_t, v_t|w; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \rho)$$

A evolução do parâmetro de correlação linear obtido segue um processo ARMA(1,10) da seguinte forma:

$$\rho_t = \Lambda_2(\omega_p + \beta_p \rho_{t-1} + \alpha_p \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{t-j}) \Phi^{-1}(v_{t-j}))$$

em que  $\Lambda_2(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$  é uma transformação logística modificada para que o parâmetro  $\rho_t$  permaneça, em todos os períodos, em seu espaço paramétrico  $[-1, 1]$ . O regressor  $\rho_{t-1}$  captura qualquer persistência no parâmetro de dependência. A variável motriz, que captura o movimento de variação na dependência, é a média do produto de  $\Phi^{-1}(u_{t-j})$  e  $\Phi^{-1}(v_{t-j})$  sobre as últimas 10 observações passadas.

A análise dos dados foi feita no software R com pacote rugarch de Ghalanos (2017), e utilizando *copula toolbox* e funções feitas por Andrew Patton (Universidade de Oxford, Departamento de Economia ) para o software Matlab.

## Resultados e Discussões

A Figura 1, mostra o comportamento dos retornos destas ações no período selecionado. Observa-se que as variâncias dos dados oscilam ao longo do tempo e a existência de *clusters* de volatilidade principalmente em PETR4. Durante o período analisado é importante frisar acontecimentos no país que impactaram em importantes companhias abertas brasileiras, principalmente ao longo dos anos de 2015-2016, como ambiguidades na política, desequilíbrio macroeconômico e comércio internacional desfavorável, devido a contração da demanda de países como a China, como mostra Lacerda (2017).

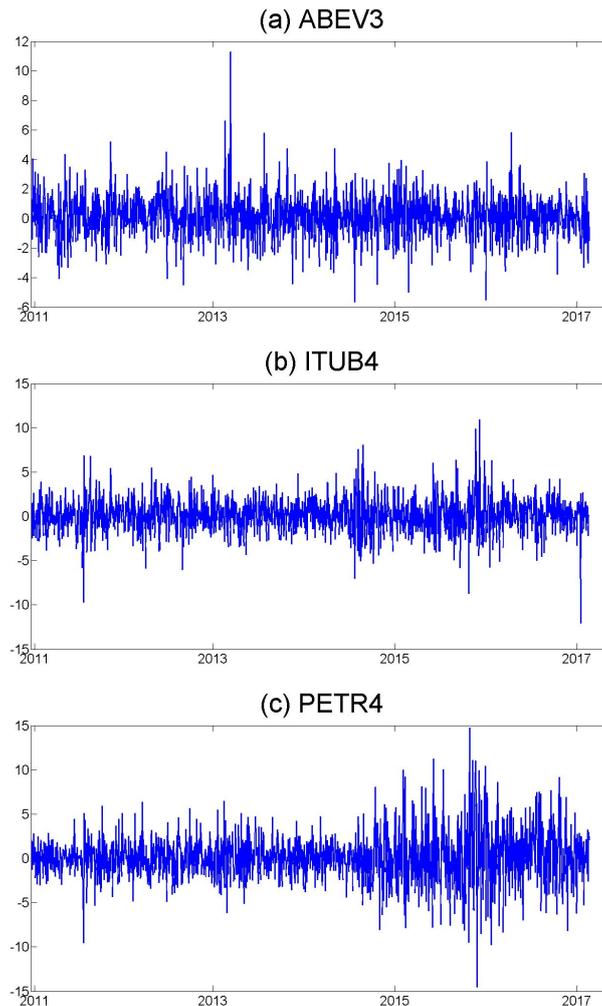


Figura 1: Log-retornos das ações das companhias (a) Ambev (b) Itáu Unibanco e (c) Petrobrás no período de 03 de janeiro de 2011 a 21 de junho de 2017

As especificações das marginais para cada série foram processos ARMA(0,0)-APARCH(1,1). As estimativas dos parâmetros das marginais das ações e o p-valor do teste de adequabilidade dos resíduos são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Modelos ARMA-APARCH para as distribuições marginais

Coefficientes	ABEV3	ITUB4	PETR4
$\omega$	0,066 (0,032)	0,066 (0,034)	0,015 (0,009)
$\alpha_1$	0,050 (0,014)	0,044 (0,014)	0,063 (0,012)
$\beta_1$	0,915 (0,031)	0,936 (0,019)	0,947 (0,011)
$\gamma_1$	0,627 (0,223)	0,473 (0,200)	0,518 (0,126)
$\delta_1$	0,809 (0,510)	1,409 (0,344)	0,760 (0,197)
$\xi$	1,020 (0,034)	1,025 (0,036)	1,019 (0,036)
$\nu$	6,624 (1,038)	8,306 (1,536)	6,831 (1,097)
$Q(20)$	0,448	0,962	0,957

Verifica-se que o efeito de alavancagem ( $\gamma_1$ ), foi significativo e positivo, para todos os retornos, indicando que choques negativos passados têm maior impacto sobre a volatilidade condicional no presente. Já a volatilidade incondicional, dada pelo parâmetro  $\omega$ , foi baixa e significativa para todos os retornos das ações.

A persistência da volatilidade dos retornos, dada pela soma dos coeficientes  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ , apresentou uma alta magnitude no período, indicando que choques do dia anterior persistirão no dia corrente. Ademais, o parâmetro de assimetria ( $\xi$ ) foi significativo e positivo e a estimativa de  $\nu$  captou a existência de caudas pesadas. Pelo resultado do teste Box-Pierce, constata-se a não correlação serial nos resíduos.

Os resultados da análise com cópulas referente a estimativa fixa do coeficiente de correlação linear, bem como as estimativas da sua evolução ao longo do tempo estão na Tabela 2. Verifica-se que todos os casos analisados as estimativas foram significativas. O coeficiente  $\beta_p$  indica que há uma autocorrelação de primeira ordem para a correlação linear entre os pares de retornos das ações. Já o coeficiente relacionado a variável motriz ( $\alpha_p$ ), que tenta captar o movimento conjunto das marginais transformadas, mostra que o comportamento conjunto das transformadas em períodos anteriores é importante na análise de dependência no tempo presente.

Tabela 2: Estimativas da cópula Normal dinâmica

Coefficientes	ABEV3/PETR4	ABEV3/ITUB4	ITUB4/PETR4
$\omega_p$	0,005 (0,004)	-0,026 (0,011)	-0,194 (0,030)
$\alpha_p$	1,454 (0,434)	1,349 (0,276)	2,558 (0,067)
$\beta_p$	-0,078 (0,069)	-0,067 (0,064)	0,075 (0,017)
$\rho$	0,011	-0,035	0,578

Os gráficos da dinâmica do parâmetro verificado na Figura 2 possibilitam captar e avaliar a trajetória da correlação linear entre os pares retornos de ações durante o período

analisado. As Figuras 2(a) e 2(b) apresentam um padrão semelhante de evolução, em diferentes magnitudes, da correlação linear entre os pares ABEV3/PETR4 e ABEV3/ITUB4, respectivamente. Observa-se um padrão ao longo do período não muito informativo, já que estes pares de ações apresentaram uma baixa correlação. Este resultado reflete o fato da demanda de bens de consumo básicos não se alterar, mesmo com instabilidades e pela menor volatilidade apresentada empresas deste setor. Ademais, ABEV3/ITUB4 apresentou uma correlação negativa e ABEV3/PETR4 positiva.

O par ITUB4/PETR4 apresentaram uma correlação moderada positiva, sendo que, de forma geral, o coeficiente de correlação linear oscilou em torno do seu valor constante apresentando variações no período, como verificado na Figura 2(c). Além da relevância destas empresas na economia brasileira, essa relação pode indicar, dentre outros fatores, a importância do papel das *commodities* no país. Destaca-se também que em meados de 2013 ocorreu uma brusca queda no coeficiente atingindo seu menor valor em torno de 0,35 reflexo da situação de instabilidade sobre economia do país em geral, bem como na bolsa de valores brasileira.

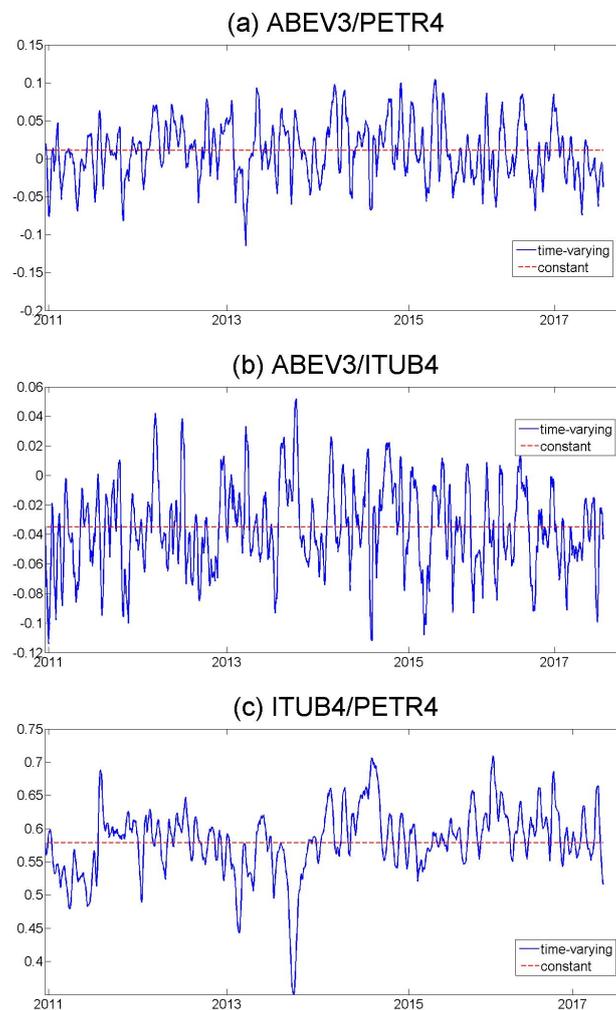


Figura 2: Parâmetros de dependência da cópulas Normal tempo-variante entre (a) ABEV3 e PETR4, (b) ABEV3 e ITUB4 (c) ITUB4 e PETR4.

## Considerações Finais

Neste trabalho, com o uso da abordagem dinâmica condicional de Patton (2006) para a função cópula Normal captou-se a estrutura de dependência bivariada simétrica, dada pelo coeficiente de correlação linear, existente entre o retorno de ações das empresas Ambev Itaú Unibanco, Petrobrás, cotadas na BM&FBOVESPA. Ademais, com a equação de evolução desta cópula obteve-se o movimento da dependência ao longo do período analisado.

Observa-se uma baixa dependência dos retornos da Ambev com as demais companhias, o que refletiu na evolução da correlação. Já o par referente a Itaú Unibanco e Petrobrás apresentou um expressiva relação, com uma queda brusca no momento mais instável do mercado no período. Estes resultados refletem peculiaridades dos setores de atuação de cada companhia, bem como a influencia da incerteza do mercado, o que demonstra a importância da diversificação de ativos em análise de investimentos.

Dessa forma, com o uso de metodologias flexíveis como a de cópulas dinâmicas é possível quantificar e analisar padrões de interdependência de ações, bem como captar sua evolução temporal. É possível então, entender melhor o comportamento de ativos financeiros, o que auxilia na tomada de decisões pelos agentes, no que se refere a composição e diversificação de carteiras de investimentos e gerenciamento de risco, visando otimizar os retornos e protegê-los em distintos ciclos econômicos.

## Agradecimentos

Agradecimento a Capes e CNPq pelo apoio financeiro.

## Referencias Bibliográficas

DING, Z.; GRANGER, C. W. J.; ENGLE, R. F. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, v. 1, n. 1, p. 83-106, 1993.

ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, v. 50, n. 4, p. 987-1007, 1982.

GHALANOS, A. rugarch: Univariate GARCH models. *R package version 1.3-8*. 2017.

JOE, H., & XU, J. J. The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. *Technical Report no. 166*. Department of Statistics, University of British Columbia, Vancouver, 1996.

LACERDA, A. C. D. Dinâmica e evolução da crise: discutindo alternativas. *Estudos Avançados*, v.31, n.89, p. 37-49, 2017.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

---

PATTON, A. J. Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, v. 47, n. 2, 2006.

SKLAR, A. Fonctions de répartition et leurs marges. *Publications de la Institut de Statistique de la Université de Paris*, 8, 229-231. 1959.

R CORE TEAM. *R*: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2019. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.