O Grau Topológico de Brouwer: Teoria e Aplicações

Jarne D. Ribeiro[1†], *Evandro Monteiro*[2]

[1] *Mestrando em Física e Matemática Aplicada, Universidade Federal de Itajubá*
[2] *Professor Adjunto I, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas.*
E-mail: evandro.monteiro@unifal-mg.edu.br.

Resumo: *O objetivo deste trabalho é compreender alguns dos conteúdos clássicos da Análise Funcional o Grau Topológico e aplicar a teoria às equações diferenciais para estudar problemas de existência de soluções e unicidade.*

Palavras-chave: Matemática, Análise Funcional, Grau Topológico.

Abstract: *The objective of this study is to understand some of the contents of the classical Functional Analysis the Topological Degree and apply the theory to differential equations to study problems of existence and uniqueness of solution.*

Keywords: Mathematic, Functional Analysis, Topological Degree.

Introdução

Para o estudo do grau topológico é necessário a compreensão de conceitos de Topologia e de Análise Funcional.

Por um lado a Topologia é a parte da matemática cujo escopo é estabelecer, com grande generalidade, a noção de limite, as propriedades das funções contínuas e dos conjuntos onde tais funções são definidas e tomam valores. Para que tenha sentido determinar o limite ou indagar sobre a continuidade de uma função, o domínio e o contradomínio da mesma devem possuir um certo tipo de estrutura, tornando-se um espaço topológico. Em outras palavras, espaços topológicos são conjuntos equipados com estruturas tais que entre eles tem sentido falar em limites e continuidade de funções (LIMA, 2002).

Por outro lado, a Análise Funcional é um conceito que surgiu nas primeiras décadas do século XX abstraindo os conceitos de convergência e continuidade, um dos principais objetivos parecia ser uma tentativa de dar um tratamento unificado para várias questões que foram estudadas separadamente durantes os séculos, mas foi através das publicações de Banach, em 1932, que a Análise Funcional passou a assumir um papel fundamental na Matemática Moderna e tem-se desenvolvido para caminhos não lineares.

Assim como muitas equações matemáticas são utilizadas como modelo em inúmeras situações da Ciência Básica, Aplicada e Tecnológica é de fundamental importância o desenvolvimento de técnicas de resolução de equações, entretanto para muitas delas não é possível obter a solução algébrica exata ou aproximada, logo através de uma ferramenta chamada de Grau Topológico que tem sua fundamentação na Análise Funcional e faz uso de muitos conceitos da Topologia, podemos encontrar tais soluções sobre um espaço adequado.

Com isto, temos como objetivo apresentar a teoria do Grau Topológico que identifica (para uma função continuamente diferenciável, f, no espaço Euclidiano) o número de soluções da equação $y = f(x)$ numa determinada região, Ω, em $f^{-1}(y)$.

[†] *Autor correspondente:* jarnedonizetti@yahoo.com.br.

De um modo mais geral isto é estendido a um número (conhecido como forma de Brouwer do grau para uma função contínua f definida em Ω) que é um Invariante topológico que, quando não-nulo, garante que $f(x) = y$ tem solução em Ω, em outras palavras O Grau Topológico é uma ferramenta que nos dá informações quanto à existência de soluções de equações da forma $f(x) = y$, onde f é uma função contínua em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^n$ e y é um ponto dado em $\mathbb{R}^n$. Com o estudo do Grau Topológico torna-se possível apresentar algumas aplicabilidades em problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias. Tais resultados podem ser encontrados em Deimling (1980) e Maia et al. (1997).

Principais conceitos e resultados sobre o Grau Topológico de Brouwer

Iremos estudar noções de alguns conceitos de topologia do espaço euclidiano tendo como referência Lima (1981, 2002) e Domingues (1982). As definições a seguir será para nortear alguns conceitos que iremos introduzir mais adiante.

Definição 1 *Dados o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e o número real $r > 0$, a* bola aberta *de centro a e raio r é o conjunto $B_r(a)$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor que r, ou seja,*

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; \mid x - a \mid < r\}.$$

Analogamente, a bola fechada *de centro a e raio r é o conjunto $B_r[a]$, ou seja,*

$$B_r[a] = \{x \in \mathbb{R}^n; \mid x - a \mid \leq r\}.$$

Definição 2 *O conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é* limitado *quando está contido em alguma bola $B_r[a]$*

A definição de sequência convergente também pode ser dada através de vizinhanças na qual definiremos logo a seguir.

Definição 3 *Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ é* convergente *quando existe $a = \lim x_k$.*

Já com algumas ferramentas podemos definir conjuntos abertos.

Definição 4 *Seja $a \in X \subset \mathbb{R}^n$. O ponto a é* interior *ao conjunto X quando, para algum $r > 0$, tem-se $B_r(a) \subset X$.*
O conjunto $int(X)$ dos pontos interiores a X chama-se o interior *do conjunto X. Quando $a \in int(X)$, diz-se que X é uma* visinhança *de a.*
O conjunto X é dito aberto quando $X = int(X)$.

Definição 5 *A* fronteira *de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto ∂X formado pelos pontos de X que não são interiores a X, juntamente com os pontos de $\mathbb{R}^n - X$ que não são interiores a $\mathbb{R}^n - X$. De forma mais simples: tem-se $x \in \partial X$ quando toda bola de centro x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R}^n - X$.*

A definição a seguir relaciona-se a conjuntos compactos.

Definição 6 *O ponto a é* aderente *ao conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ quando existe uma sequência de pontos $x_k \in X$ tais que $\lim x_k = a$.*
Chama-se fecho *do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ ao conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X. Portanto $a \in \overline{X} \Leftrightarrow a = \lim x_k, \quad x_k \in X$.*

Definição 7 *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ chama-se* fechado *quando $\overline{F} = F$, isto é, quando o limite de toda sequência convergente de pontos de F é ainda um ponto de F.*

Algumas relações e equivalências das definições acima são colocadas no seguinte teorema.

Teorema 1 *1. O ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, toda bola de centro a contém algum ponto de X.*

2. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R}^n - F$ é aberto.

3. O fecho de qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, ou seja, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Demonstração 1 (1) *Se a é aderente a X então $a = \lim x_k$, com $x_k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto qualquer bola $B_r(a)$ contém pontos de X, a saber, todos os x_k com k suficientemente grande. Reciprocamente, se toda bola de centro a contém pontos de X, podemos escolher, para cada $k \in \mathbb{N}$, um ponto $x_k \in X$ que esteja na bola $B_{1/k}(a)$, isto é, $| x_k - a |< 1/k$. Então $\lim x_k = a$, logo a é aderente a X.*
(2) *As seguintes afirmações são equivalentes:* (*a*) *F é fechado.* (*b*) *Se $x \in \mathbb{R}^n - F$ então x não é aderente a F.* (*c*) *Se $x \in \mathbb{R}^n - F$ então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n - F$ (em virtude da parte (1) acima).(d) $\mathbb{R}^n - F$ é aberto. Assim, F fechado $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n - F$ aberto.*
Escrevendo $A = \mathbb{R}^n - F$, donde $F = \mathbb{R}^n - A$, esta última conclusão lê-se assim: A é aberto se, e somente se, $\mathbb{R}^n - A$ é fechado.
(3) *Se $x \in \mathbb{R}^n - \overline{X}$ (isto é, x não é aderente a X) então, por* (1)*, existe uma bola $B = B_r(x)$ que não contém pontos de X, ou seja, $X \subset \mathbb{R}^n - B$. Logo $\overline{X} \subset \overline{\mathbb{R}^n - B}$. Mas, pela parte* (2) *acima, $\mathbb{R}^n - B$ é fechado; portanto $\overline{X} \subset \mathbb{R}^n - B$ ou, equivalentemente, $B \subset \mathbb{R}^n - \overline{X}$. Assim, todo ponto $x \in \mathbb{R}^n - \overline{X}$ é um ponto interior, logo $\mathbb{R}^n - \overline{X}$ é aberto. Segue-se que $\overline{X}$ é fechado.*

Utilizando a teoria dos conjuntos fechados e dos conjuntos limitados é apresentado uma outra estrutura que será definida a seguir.

Definição 8 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é* compacto *quando é limitado e fechado.*

Teorema 2 *As seguintes afirmações sobre o conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ são equivalentes:*

1. *K é compacto;*

2. *Toda sequência de pontos $x_k \in K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K.*

Demonstração 2 *Se K é compacto então toda sequência de pontos $x_k \in K$ é limitada, pois K é limitado. Por Bolzano-Weierstrass, uma subsequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ converge para um ponto $a = \lim_{k \in \mathbb{N}'} x_k$. Como K é fechado, tem se $a \in K$. Logo* (1) *implica* (2)*. Reciprocamente, se vale* (2) *então K é limitado pois do contrário existiria, para cada $k \in \mathbb{N}$ um ponto $x_k \in K$ tal que $| x_k |> k$. A sequência (x_k) assim obtida não possuiria subsequência limitada, logo nenhuma de suas subsequências seria convergente. Além disso, K é fechado pois se $a = \lim x_k$ com $x_k \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então, por* (2)*, uma subsequência de (x_k) converge para a. Logo $a \in K$. Isto mostra que* (2) $\Rightarrow$ (1) *e completa a demonstração.*

Vamos agora definir conexidade que será usado como hipótese no Teorema de Ponto Fixo de Brouwer e convexidade que é insdispensável na prova do exemplo Perron-Frobenius.

Definição 9 *Uma* cisão *do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$ onde $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, isto é, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A.*

Definição 10 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é* conexo *quando só admite a cisão trivial. Caso contrário, diz-se que X é* desconexo.

Definição 11 *Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se*

$$x + \lambda(y - x) \in D \quad \textit{sempre} \quad \textit{que} \quad x, y \in D \quad e \quad \lambda \in [0, 1].$$

O fecho convexo de D é a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm D. Denotaremos o fecho convexo de D por $convD$. Vamos omitir a demonstração de que a intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo e que D é convexo se, e somente se, $convD = D$.

A definição a seguir será necessária para alguns resultados do grau.

Definição 12 *Dada um função contínua $f : D \to D$ um ponto fixo para f é um ponto $x \in D$ tal que $f(x) = x$.*

Encontrar pontos fixos para determinadas funções é uma tarefa importante em Matemática. A título de ilustração consideremos $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Se tivermos $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ naturalmente já teremos encontrado pontos fixos para a função, por isso podemos supor, sem perda de generalidade, $f(a) > a$ e$f(b) < b$. Considere a função definida por $g(x) = f(x) - x$. Buscar um ponto fixo para f é buscar uma solução para a equação $g(x) = 0$. Note que $g(x) = f(a) - a > 0$ e $g(b) = f(b) - b < 0$ logo, pelo teorema do Valor Intermediário, deve existir $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$, isto é, $f(x_0) = x_0$. Assim, nestas condições, a função f admite ponto fixo. Podemos agora definir O Grau topológico.

Definição 13 *O Grau Topológico de Brouwer é uma função que associa a cada tripla (f, Ω, y) um número inteiro $d(f, \Omega, y)$, onde f é contínua definida em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e y um ponto dado em $\mathbb{R}^n$. Esta função d é única e satisfaz as seguintes propriedades:*

- *(d_1) Se $f = id$, a função identidade em $\mathbb{R}^n$ então $f(x) = y$ possui única solução para $y \in \Omega$ e portanto $d(f, \Omega, y) = 1$.*
- *(d_2) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ sempre que Ω_1 e Ω_2 sejam subconjuntos abertos e disjuntos de Ω tais que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$.*
- *(d_3) $d(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ é independente de $t \in J = [0, 1]$ sempre que $h : J \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ e $y : J \to \mathbb{R}^n$ forem contínuas e $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in J$.*

Verificaremos algumas propriedades da Função Grau que nos serão úteis.

Proposição 1 *Sejam $M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \notin f(\partial\Omega)\}$ e $d : M \to \mathbb{Z}$ o grau topológico. Então d satisfaz:*

(d4) $d(f, \Omega, y) \neq 0$ implica $f^{-1}(y) \neq \varnothing$.

(d5) $d(\cdot, \Omega, y)$ e $d(f, \Omega, \cdot)$ são constantes em $g \in C(\overline{\Omega}) : || \, g - f \, |_0 < r$ e $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n$, respectivamente, onde $r = \varrho(y, f(\partial\Omega))$. Além disso, $d(f, \Omega, \cdot)$ é uma constante em cada componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.

(d6) $d(g, \Omega, y) = d(f, \Omega, y)$ sempre que $g \,|_{\partial\Omega} = f \,|_{\partial\Omega}$.

(d7) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y)$ para todo subconjunto aberto Ω_1 de Ω tal que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$.

Demonstração 3 *Já foi visto que $f^{-1}(y) = \varnothing$ implica que $d(f, \Omega, y) = 0$, donde segue que, se $d(f, \Omega, y) \neq 0$, então $f^{-1}(y) \neq \varnothing$.*

Em relação a (d5), a primeira parte decorre da definição do grau. Para provar que $d(f, \Omega, \cdot)$ é constante em cada componente conexa, lembremos, primeiramente, que cada componente conexa é um conjunto conexo o qual é maximal (com respeito a inclusão) em relação aos demais conjuntos conexos. Como $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ é um aberto, suas componentes conexas são abertos do $\mathbb{R}^n$, sendo portanto conexas por caminhos. Assim, se G é uma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ e $y^1, y^2 \in G$, existe um curva contínua $y : [0, 1] \to G$ com $y(0) = y^1$ e $y(1) = y^2$. Portanto, por (d3), temos $d(f, \Omega, y^1) = d(f, \Omega, y^2)$.

Para provar (d6), considere

$$h(t,x) = tf(x) + (1-t)g(x), com \quad t \in [0,1].$$

Naturalmente $h(t,x)$ *é contínua e portanto precisamos verificar que* $y \notin h(t, \partial\Omega)$ *para todo* $t \in [0,1]$. *Para tanto, seja* $x \in \partial\Omega$, *então*

$$\begin{aligned} h(t,x) &= tf(x) + (1-t)g(x) \\ &= tf(x) + (1-t)f(x) \\ &= f(x) \neq y \end{aligned}$$

Já $(d7)$ *é consequência imediata de* $(d2)$.

Aplicações

O nosso objetivo é apresentar algumas aplicações da função grau. O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é uma generalização natural para encontrar pontos fixos de uma função contínua definidas em espaços euclidianos é também o ponto de partida para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Schauder que é uma generalização do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em espaços de Banach.

Teorema 3 ***Ponto Fixo de Brouwer*** *Seja* $D \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto compacto convexo não-vazio e* $f : D \to D$ *um função contínua. Então* f *tem um ponto fixo.*

Demonstração 4 *Suponha inicialmente que* $D = \overline{B}_r(0)$. *Vamos supor que* f *não possui pontos fixos na fronteira de* D. *A idéia é proceder como acima. Defina* $h : [0,1] \times D \to \mathbb{R}^n$ *por* $h(t,x) = x - tf(x)$, *onde* $t \in [0,1]$. *Afirmamos que* $0 \notin h([0,1] \times \partial D)$. *De fato, se tivéssemos* $x_0 \in \partial D$ *e* $t_0 \in [0,1]$ *tais que* $h(t_0, x_0) = 0$ *obteríamos:*

$$r = \mid x_0 \mid = t_0 \mid f(x_0) \mid \leq t_0 r \quad \Rightarrow \quad t_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = x_0,$$

o que é um absurdo visto que estamos supondo que f *não fixa nem um ponto na fronteira de* D. *Assim, usando a propriedade de invariância por homotopia do grau, podemos afirmar que*

$$d(id - f, intD, 0) = d(id, B_r(0), 0) = 1.$$

Logo a equação $x - f(x) = 0$ *possui pelo menos uma solução em* D *e esta solução é exatamente o ponto fixo que procurávamos.*

O Teorema Perrom-Frobenius se refere a matrizes $n \times n$ cujos os elementes são positivos afirmando que tal matriz possui um autovalor. Esse teorema tem inúmeras aplicações, não apenas em ramos da Matemática, como teoria dos grafos, teoria dos jogos, mas em vários campos da ciência e da tecnologia.

Teorema 4 ***Perrom-Frobenius***
Seja $A = (a_{i,j})_{n \times n}$ *com* $a_{i,j} \geq 0$. *Então existe* $\lambda \geq 0$ *e* $x \neq 0$ *tal que* $x_i \geq 0$ *para todo* i *e* $Ax = \lambda x$, *isto é,* A *tem um autovetor não-negativo correspondente a um autovalor não-negativo.*

Demonstração 5 *De fato, considere o conjunto D definido por*

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \quad \forall_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Primeiramente, vamos mostrar que D é convexo.
Sejam $x, y \in D$ e $S = \{z \in \mathbb{R}^n : z = tx + (1-t)y, t \in [0,1]\}$. Temos que $z_i = tx_i + (1-t)y_i$ e assim:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} z_i &= \sum_{i=1}^{n} tx_i + \sum_{i=1}^{n} (1-t)y_i \\ &= t\sum_{i=1}^{n} x_i + (1-t)\sum_{i=1}^{n} y_i \\ &= t + i - t = 1. \end{aligned}$$

Portanto $S \subset D$, o que mostra que D é convexo. Mostremos agora que D é compacto. Que D é limitado decorre do seguinte: se $x \in D$. temos que $x_i \leq 1$ e assim $x_i^2 \leq 1$, o que implica que $\mid x \mid = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{n}$. Para mostrarmos que D é fechado , tomemos $(x^m) \subset D$ tal que $x^m \to x$. Devemos mostrar que $x \in D$. Mas, de fato, temos que

$$x^m \to x \Leftrightarrow x_i^m \to x_i$$

e como cada $x_i^m \geq 0$, então $x_i \geq 0$ e $1 = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^m \to \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$. Assim, $x \in D$ e D é fechado.

Podemos supor $Ax \neq 0$ para $x \in D$ pois, caso contrário, se $Ax_0 = 0$, para algum $x_0 \in D$, tomaríamos $\lambda = 0$ teríamos o resultado pretendido. Assim $\sum\limits_{i=1}^{n} (Ax)_i \geq \alpha > 0$, para algum $\alpha \in \mathbf{R}$.

Desta forma, a função definida em D por

$$f(x) = \frac{Ax}{\sum\limits_{i=1}^{n} (Ax)_i}$$

é contínua em D e $f(D) \subset D$. De fato, sejam $x \in D$ e $y = f(x)$, então

$$0 \leq y_i = \frac{(Ax)_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} (Ax)_i} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (Ax)_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} (Ax)_i} = 1.$$

Assim $f(x) \in D$. Portanto, pelo Teorema de Brouwer, a função f tem ponto fixo em D, isto é, existe $x_0 \in D$ tal que:

$$f(x_0) = \frac{Ax_0}{\sum\limits_{i=1}^{n} (Ax_0)_i} = x_0 \quad \Rightarrow \quad Ax_0 = \lambda x_0$$

onde $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} (Ax_0)_i$.

Agora estamos em condições de apresentar uma solução para uma equação diferencial utilizando o teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Exemplo 1 *Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:*

$$(*) = \begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = x \in \overline{B}_r(0) \end{cases}$$

em que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma função de classe* C^1 *períodica na varíavel* t*, isto é,* $f(t+\omega, x) = f(t,x)$ *para algum* $\omega \in \mathbb{R}^+$ *e para todo* $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. A bola* $\overline{B}_r(0)$ *será escolhida de forma que o problema possua solução única* $u(t;x)$ *em* $[0,\infty)$*.*

Estamos interessados em estudar soluções periódicas de $(*)$*. Para tanto, definamos* $P_t(x) = u(t;x)$ *e suponhamos que* f *satisfaz á seguinte condição de fronteira.*

$$\langle f(t,x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x)x_i < 0 \quad \textit{para} \quad t \in [0,\omega] \quad \textit{e} \quad \mid x \mid = r.$$

Esta condição de fronteira nos garante que $P_t : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$ *qualquer que seja* $t > 0$*. De fato, suponhamos que num instante* t *a solução de* $(*)$ *atinge a fronteira da bola. Teremos*

$$\frac{d}{dt} \mid u(t) \mid^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle = 2f(t,u(t)) \cdot u(t) < 0,$$

o que nos mostra que a norma de $u(t)$ *é decrescente perto do instante* t*. Assim se a função atinge a fronteira da bola ela automaticamente volta para dentro da bola. Como as soluções de* $(*)$ *variam continuamente com condições iniciais sabemos que* P_t *é contínua.*

Estamos então em condições de aplicar o Teorema de Brouwer garantindo assim a existência de um ponto fixo x_ω *para função* P_ω*. Assim, a equação tem uma solução com a propriedade de que* $u(0;x_\omega) = x_\omega = u(\omega;x_\omega)$ *e que satisfaz*

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \quad \textit{em} \quad (0,\omega) \\ u(0) = u(\omega) = x_\omega \end{cases}$$

A ideia agora é expandir $u(t;x_\omega)$ ω*-periodicamente.*
Assim, se considerarmos $v : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ *dada por*

$$v(t) = u(t - k\omega; x_\omega), \quad \textit{em} \quad [k\omega, (k+1)\omega]$$

obtemos uma solução ω*-periódica de* $(*)$*. A conclusão final é que* $u(t;x)$ *é solução* ω*-periódica de* $(*)$ *se, e somente se,* x *é um ponto fixo do operador* P_ω*. Este operador é conhecido como operador de Poincaré.*

Dentre as aplicações destacamos a não existência de retração da bola fechada em sua fronteira.

Exemplo 2 *Não existe uma função contínua definida da bola fechada na sua fronteira que deixe fixos todos os pontos da fronteira. De fato, suponha por absurdo que exista* $f : \overline{B}_r(0) \to \partial B_r(0)$ *contínua tal que* $f(x) = x$ *para todo* $x \in \partial B_r(0)$*. Seja então* $g : \overline{B}_r(0) \to \partial B_r(0)$ *definida por* $g(x) = -f(x)$*. Claramente* g *atende às hipóteses do Teorema de Brouwer, pois é contínua,* $\overline{B}_r(0)$ *é compacto e convexo e* $g(\overline{B}_r(0)) \subset \overline{B}_r(0)$*. Logo, existe* $x_0 \in \partial B_r(0)$ *tal que*

$$x_0 = g(x_0) = -f(x_0) = -x_0, \quad \mid x_0 \mid = r$$

o que é um absurdo.

Este esultado, na verdade, é equivalente ao Teorema de Brouwer para a bola, pois se o admitimos como verdade, obtemos o Teorema de Brouwer como consequência.

Teorema 5 *Suponha que não exista* $f : \overline{B}_r(0) \to \partial B_r(0)$ *contínua tal que* $f(x) = x$ *para todo* $x \in \partial B_r(0)$. *Então* $g : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$ *contínua possui um ponto fixo.*

Demonstração 6 *Suponha, por absurdo, que* $g : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$ *é contínua e* $g(x) \neq x$ *para todo* $x \in \overline{B}_r(0)$. *Assim, para cada* $x \in \overline{B}_r(0)$, *existe um segmento de reta passando por* x *e* $g(x)$. *Seja* $h(x)$ *a intersecção da semi-reta com a origem em* $g(x)$ *e que passa por* x *com a fronteira de* $B_r(0)$, *isto é ,*

$$h(x) = g(x) + t(x)(x - g(x))$$

com $\mid h(x) \mid = r$ *e* $t(x) > 0$.

Vamos mostrar que $h : \overline{B}_r(0) \to \partial B_r(0)$ *é contínua e* $h(x) = x$ *para* $x \in \partial B_r(0)$, *contrariando a hipótese. Ora, para que* $h(x)$ *seja contínua, basta que* $t : B_r(0) \to \mathbb{R}_+$ *seja contínua. Da condição que* $\mid h(x) \mid = r$, *segue que:*

$$\mid h(x) \mid^2 = \langle h(x), h(x) \rangle = \langle g + t(x - g), g + t(x - g) \rangle = r^2$$

e assim:

$$\mid t(x) \mid^2 \mid x - g(x) \mid^2 + 2t(x)\langle g(x), (x - g(x))\rangle + \mid g(x) \mid^2 - r^2 = 0$$

resolvendo essa equação em $t(x)$, *tem-se que:*

$$\Delta = 4[\langle g(x), (x - g(x))\rangle^2 + \mid x - g(x) \mid^2 (r^2 - \mid g(x) \mid^2)] \geq 0$$

e portanto temos

$$t(x) = \frac{-2\langle g(x), (x - g(x))\rangle + \sqrt{\Delta}}{2 \mid x - g(x) \mid^2} > 0$$

e que mostra que $t(x)$ *é contínua, pois* $\mid x - g(x) \mid \neq 0$ *em* $\overline{B}_r(0)$. *Naturalmente,* $h(x) = x$ *em* $\partial B_r(0)$, *de acordo com a definição de* $h(x)$. *Assim, chegamos à contradição esperada, encerrando a demonstração do teorema. Para finalizar*

Teorema 6 ***Teorema do Ouriço*** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto limitado com* $0 \in \Omega$ *e* $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *contínua. Suponha também que* n *é ímpar. Então existe* $x_0 \in \partial\Omega$ *tal que* $f(x_0) = \lambda x_0$, *para algum* $\lambda \neq 0$.

Demonstração 7 *Podemos supor, sem perda de generalidade,* $f \in C(\overline{\Omega})$. *Como* n *é ímpar temos* $d(-id, \Omega, 0) = -1$. *Consideremos primeiro o caso em que* $d(f, \Omega, 0) \neq -1$.
Então $h(t, x) = (1 - t)f(x) + t(-x)$ *é tal que* $h(0, x) = f(x)$ *e* $h(1, x) = -x = -id(x)$. *Além disso, se* $h(t, x) \neq 0$ *para todo* $x \in \partial\Omega$ *e todo* $t \in [0, 1]$ *então*

$$d(h(0, \cdot), \Omega, 0) = d(h(1, \cdot), \Omega, 0) = -1$$

o que não ocorre por hipótese. Assim $h(t, x)$ *não é homotopia admissível e portanto* $h(t_0, x_0) = 0$ *para algum* $t_0 \in (0, 1)$ *e* $x_0 \in \partial\Omega$. *Dessa maneira*

$$0 = (1 - t_0)f(x_0) + t_0(-x_0) \Rightarrow f(x_0) = \frac{t_0}{1 - t_0}x_0 = \lambda x_0,$$

em que $\lambda = \frac{t_0}{1-t_0} \neq 0$.

Suponha agora que $d(f(x), \Omega, 0) = -1$. *Então um argumento análogo ao anterior mostra que* $h(t, x) = (1-t)f(x)+tx$ *não é uma homotopia admissível entre* $f(x)$ *e* $id(x)$, *isto é,* $h(t_0, x_0) = 0$ *para algum* $t_0 \in (0, 1)$ *e* $x_0 \in \partial\Omega$, *e portanto*

$$0 = (1 - t_0)f(x_0) + t_0 x_0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{t_0}{t_0 - 1}x_0 = \lambda_1 x_0,$$

em que $\lambda_1 = \frac{t_0}{t_0-1} \neq 0$.

Observação 1 *Um bom exemplo de que para n par esse resultado não é verdadeiro é uma rotação por $\pi/2$ de uma esfera unitária no $\mathbb{R}^2$. Para um ponto qualquer*

$$(x_1, x_2), f(x_1, x_2) = f(-x_2, x_1).$$

Observação 2 *No caso de ser $\Omega = B_1(0)$, o teorema diz que não existe um campo contínuo de vetores tangentes que não se anule em $S = \partial B_1(0)$. De fato, seja $f : S \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) \neq 0$ e $\langle f(x), x\rangle = 0$ para todo $x \in S$. Pelo Teorema 6 existe $x_0 \in S$ tal que $f(x_0) = \lambda x_0$, com $\lambda \neq 0$. Mas então*

$$\langle f(x_0), x_0\rangle = \langle \lambda x_0, x_0\rangle = \lambda \mid x_0 \mid^2 = 0$$

o que implica $x_0 = 0$, que é uma contradição. Logo f se anula em algum ponto de S.

Conclusões

Neste estudo podemos concluir que o conceito de grau topológico tem diversas aplicações em matemática. Aplicamos tal conceito inicialmente mostrando que se uma matriz é não negativa então ela tem um autovalor associado não negativo com autovetor não negativo, em seguida apresentamos a resolução da equação diferencial através do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e por final apresentamos o Teorema do Ouriço.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Evandro Monteiro pela disposição e dedicação para o desenvolvimento deste trabalho e a comissão organizadora da I Semana da Matemática pela oportunidade de apresenta-lo.

Referências

DEIMLING, K. *Nonlinear Functional Analisys.* New York: Springer-Verlag, 1980.

DOMINGUES, H.H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia.* São Paulo: Atual Editora LTDA, 1982.

LIMA, E.L. *Análise real*, volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

LIMA, E.L. *Curso de Análise* , volume 2. Rio de Janeiro: IMPA, 1981.

MAIA, L. de A. et al. *Grau Topológico de Brouwer* . Trabalho de Graduação em Matemática n°1/97.Departamente de Matemática. Universidade Federal de Brasilia.Disponível em: http://www.mat.unb.br/~furtado/homepage/grau.pdf. Acesso em: 19 out. 2011. Brasilia, 1997.