

O modelo OBXII aplicado a dados de concentração de dióxido de carbono em gramíneas *Echinochloa crus-galli*

José Nilton da Cruz^{1†}, Marcelino Alves Rosa de Pascoa², Juliano Bortolini³, Elianara Martins de Almeida⁴, Anderson Castro Soares de Oliveira⁵

¹Departamento de Estatística, ICET-UFMT, campus: Cuiabá-MT

²Departamento de Estatística, ICET-UFMT, campus: Cuiabá-MT.
E-mail: marcelino.pascoa@gmail.com.

³Departamento de Estatística, ICET-UFMT, campus: Cuiabá-MT.
E-mail: julianobortolini@gmail.com.

⁴Departamento de Estatística, ICET-UFMT, campus: Cuiabá-MT.
E-mail: martinsnaraa@gmail.com.

⁵Departamento de Estatística, ICET-UFMT, campus: Cuiabá-MT.
E-mail: andersoncso@gmail.com.

Resumo: Neste trabalho foi proposta uma extensão da distribuição Burr XII, a distribuição Odd Burr XII, a qual permite modelar dados bimodais, bem como ser utilizada em situações que a função de risco acomoda formas unimodais e U (banheira). Foi utilizado dados não-censurados, considerando os estimadores de máxima verossimilhança para ajuste do modelo proposto afim de verificar a flexibilidade do modelo OBXII. Ainda, construiu-se intervalos de confiança e obteve-se as estatísticas para comparação dos modelos, AIC, AICC e BIC. Posteriormente, como análise confirmatória, utilizou-se o teste de razão de verossimilhança (TRV). Por fim, após os ajustes, obtidas as estimativas, construído os gráficos com as funções ajustadas dos modelos e realizado o TRV, observou-se que o modelo OBXII ajustou-se melhor aos dados reais de concentrações de CO₂. Assim, a distribuição OBXII surge como um novo modelo capaz de flexibilizar ainda mais a distribuição Burr XII e ser bastante útil em situações que os modelos mais usuais não conseguem captar assimetrias mais acentuadas e comportamentos adversos dos dados, a saber o bimodal.

Palavras-chave: Família “T-X”; distribuição Odd Burr XII; assimetria; Newton-Raphson.

Abstract: In this work was proposed an extension of the Burr XII distribution, the Odd Burr XII distribution, which allows the modeling of bimodal data, as well as being used in situations where the risk function accommodates unimodal forms and U (bath). It was used non-censored data, considering the maximum likelihood estimators to fit the proposed model in order to verify the flexibility of the OBXII model. Also, was constructed confidence intervals and obtained the statistics for comparison of models, AIC, AICC and BIC. Subsequently, as the confirmatory analysis, the likelihood ratio test (TRV) was used. Finally, after the adjustments, obtained the estimates, constructed the graphs with the adjusted functions of the models and realized the TRV, it was observed that the OBXII model was better adjusted to the actual data of CO₂ concentrations. Thus, the OBXII distribution emerges as a new model capable of making the Burr XII distribution even more flexible and useful in situations where the most usual models fail to capture more pronounced asymmetries and adverse data behaviors, namely bimodal.

Keywords: “T-X” family; Odd Burr XII distribution; skewness; Newton-Raphson.

[†]Autor correspondente: niltonn.cruz@gmail.com.

Introdução

Nos últimos anos têm sido propostas uma série de distribuições em que o objetivo principal vem sendo o uso destas em situações que as distribuições padrões como é o caso da Weibull, Lognormal, Gama, não conseguem descrever o comportamento dos dados. Algumas destas novas distribuições, como por exemplo, a distribuição Odd Log-Logística Weibull(OLLW) (CRUZ; ORTEGA; CORDEIRO, 2016) tem como uma característica bastante interessante, o fato de modelar dados de sobrevivência em que a função de risco é do tipo banheira.

A distribuição OLLW pertence a uma classe de distribuições que é obtida considerando os estudos de Alzaatreh, Lee e Famoye (2013), que propuseram a família "T-X" de distribuições. A partir deste estudo, outras distribuições foram sendo obtidas, bem como suas propriedades e transformações das mesmas para se considerar os modelos de regressão locação-escala.

Dentre estas novas distribuições, podemos citar: a distribuição Odd Log-Logística Normal (OLLN), proposta por Da Silva Braga et al. (2016), podendo esta ser simétrica, platicúrtica, leptocúrtica e, ainda, com função de risco na forma unimodal e banheira; a distribuição Odd Birnbaum-Saunders (OBS), proposta por Ortega et al.(2016), no qual os autores propuseram a distribuição OBS e a distribuição Log Birnbaum-Saunders (LOBS) obtida pela transformação logarítmica de uma variável com distribuição OBS. Ainda, neste mesmo trabalho, foram obtidas algumas de suas propriedades matemáticas, bem como considerado o modelo de regressão LOBS.

Alguns desenvolvimentos, não menos significativos, desta família de distribuições podem ser encontrados em Cruz et al. (2017), Cordeiro et al.(2016), Da Silva Braga et al.(2017), dentre outros.

O objetivo deste trabalho é propor uma modificação da distribuição Burr XII, a distribuição Odd Burr XII (OBXII), obtida pela adição de um parâmetro de forma à distribuição Burr XII. Além de permitir a modelagem de dados bimodais, a distribuição OBXII permite obter funções de risco nas formas unimodais e banheira. Ainda, os modelos OBXII e Burr XII serão aplicados a um conjunto de dados reais e comparados por meio dos critérios AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion), CAIC (Corriged Akaike Information Criterion) e pelo Teste de Razão de Verossimilhança (TRV).

Distribuição OBXII

Distribuição Burr XII

Zimer, Keats e Wang (1998) introduziram a distribuição Burr XII com três parâmetros, cujas funções de densidade acumulada (fda) e densidade de probabilidade (fdp) são dadas, respectivamente, por

$$G(x) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k}$$

e

$$g(x) = cks^{-c}x^{c-1} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k-1},$$

Sigmae, Alfenas, v.8, n,2, p. 762-770, 2019.

64^a Reunião da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria (RBRAS).

18^o Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica (SEAGRO).

em que $k > 0$ e $c > 0$ são os parâmetros de forma e $s > 0$ é um parâmetro de escala.

Para $c > 1$, a função densidade de probabilidade é unimodal com moda dada por

$$x = s \left(\frac{c-1}{ck+1} \right)^{\frac{1}{c}},$$

e tem a forma de “L” se $c = 1$. Se $ck > q$, o q -ésimo momento, em torno de zero, da distribuição Burr XII é dado por $\mu_r^q = s^q k B(k - qc^{-1}, qc^{-1} + 1)$, em que $B(\cdot, \cdot)$ é a função beta.

Distribuição Odd Burr XII (OBXII)

Alzaatreh, Lee e Famoye (2013) propuseram a família de distribuições “T-X”. Seja $r(t)$ a f.d.p. de uma variável aleatória $T \in [a, b]$, para $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e seja $W[F(x)]$ a f.d.a. de uma variável aleatória X tal que $W[F(x)]$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} i) & W[F(x)] \in [a, b]; \\ ii) & W[F(x)] \text{ é diferenciável e monótona não-decrescente;} \\ iii) & W[F(x)] \rightarrow a \text{ quando } x \rightarrow -\infty \text{ e } W[F(x)] \rightarrow b \text{ quando } x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1)$$

Portanto, tem-se que a f.d.a. da família “T-X” é definida por

$$G(x) = \int_a^{W[F(x)]} r(t) dt, \quad (2)$$

em que $W[F(x)]$ satisfas as condições de (1). A f.d.a. $G(x)$ em (2) pode ser escrita como $G(x) = R\{W[F(x)]\}$, em que $R(t)$ é a f.d.a. da variável aleatória T . A f.d.p. associada a (2) é dada por

$$g(x) = \left\{ \frac{d}{dx} W[F(x)] \right\} r\{W[F(x)]\}.$$

Diante do exposto, iremos introduzir uma extensão, de quatro parâmetros, para a distribuição Burr XII, chamada distribuição Odd Burr XII (“OBXII” abreviado). A f.d.a. da distribuição OBXII com um parâmetro de forma adicional $\alpha > 0$ é definida por

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\frac{G(x;k,c,s)}{\overline{G}(x;k,c,s)}} \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^2} dt = \frac{G(x;k,c,s)^\alpha}{G(x;k,c,s)^\alpha + \overline{G}(x;k,c,s)^\alpha} \\ &= \frac{\left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k} \right\}^\alpha}{\left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k} \right\}^\alpha + \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k\alpha}}, \end{aligned}$$

em que $\overline{G}(x; k, c, s) = 1 - G(x; k, c, s)$.

Note que não há uma função complicada na equação (3) quando comparada a outras extensões da distribuição Burr XII, por exemplo, a distribuição Beta Burr XII, a qual envolve a função beta incompleta e dois parâmetros extras. A f.d.p. da OBXII é dada por

$$f(x) = \frac{\alpha c k s^{-c} x^{c-1} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k\alpha-1} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k} \right\}^{\alpha-1}}{\left(\left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k} \right\}^\alpha + \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k\alpha} \right)^2}, \quad x > 0. \quad (3)$$

Ainda, observa-se a seguinte relação do parâmetro α com as funções da distribuição de base e da nova distribuição, como se segue

$$\alpha = \frac{\log [F(x)/\bar{F}(x)]}{\log [G(x)/\bar{G}(x)]}.$$

Se X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (3), cuja notação adotada é $X \sim \text{OBXII}(\alpha, k, c, s)$, as funções de sobrevivência e de risco correspondentes a (3) são, respectivamente, expressas como

$$S(x) = 1 - \frac{\left\{1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k}\right\}^\alpha}{\left\{1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k}\right\}^\alpha + \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k\alpha}}$$

e

$$h(x) = \frac{\alpha c k s^{-c} x^{c-1} \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-1} \left\{1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k}\right\}^{\alpha-1}}{\left\{1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k}\right\}^\alpha + \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k\alpha}}.$$

Alguns gráficos da função densidade de probabilidade OBXII, para algumas combinações de parâmetros, são apresentados na Figura 1. A partir desta representação, pode-se observar a flexibilidade proporcionada pela nova distribuição para diferentes valores de α, k, s e c .

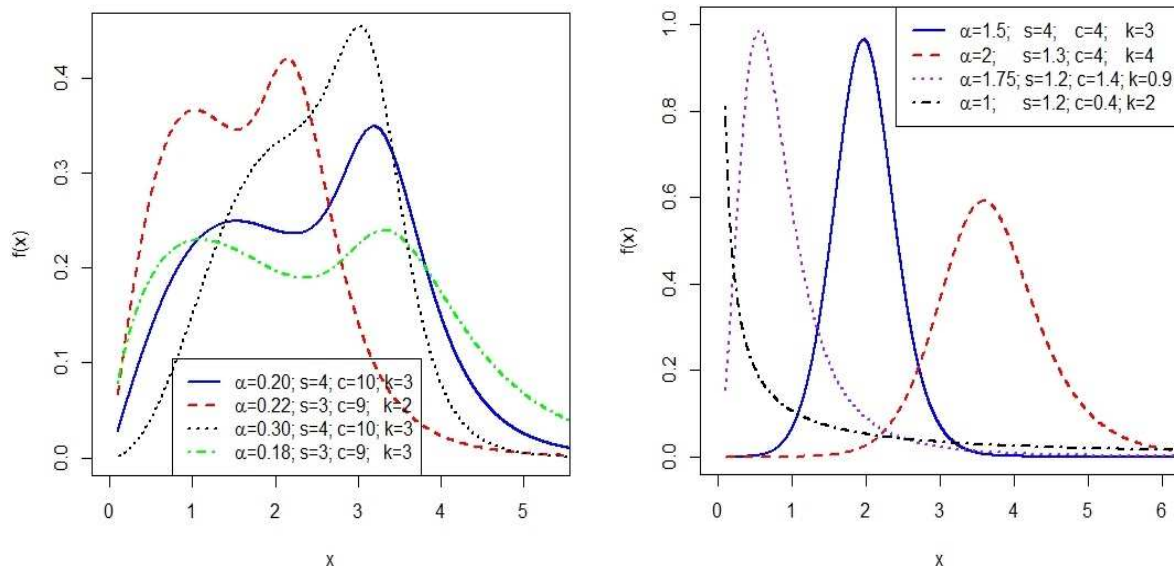


Figura 1: Gráficos da f.d.p. OBXII para algumas combinações de valores dos parâmetros.

Na Figura 2 observa-se, para alguns valores de parâmetros, que a função de risco da distribuição OBXII acomoda as formas decrescente, unimodal e uma combinação entre banheira e unimodal.

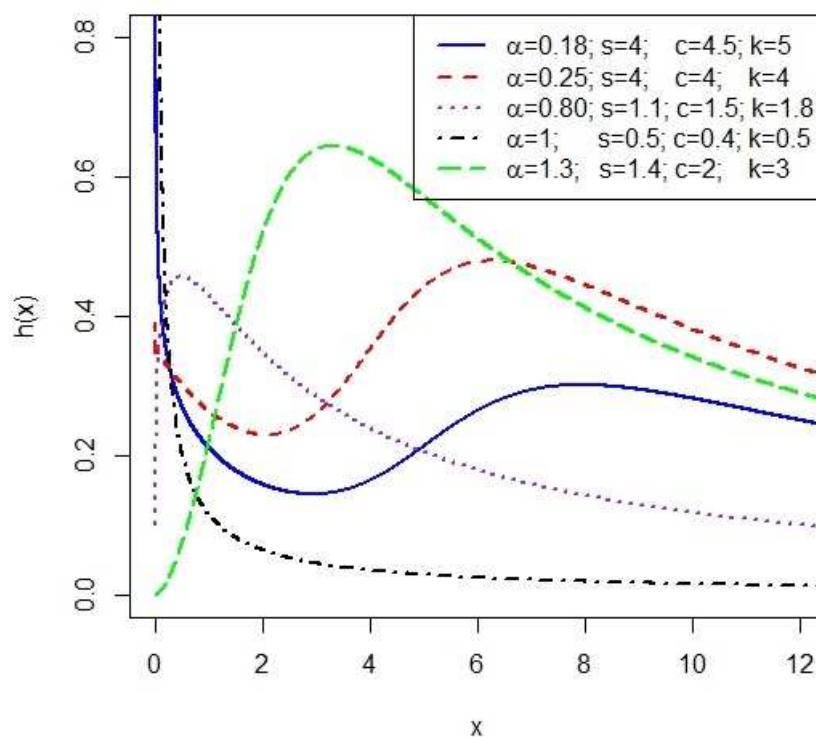


Figura 2: Gráficos da função de risco da OBXII para algumas combinações de valores dos parâmetros.

Estimação

Seja x_1, x_2, \dots, x_n uma amostra aleatória de tamanho n . No presente trabalho, pretende-se determinar as estimativas dos parâmetros do modelo usando o método de máxima verossimilhança. Para tal, tem-se que o logaritmo da função de verossimilhança, utilizada para se obter as estimativas para o vetor de parâmetro $\Theta = (\alpha, k, c, s)^T$, é dada por

$$l(\Theta) = n [\log(\alpha c k s^{-c}) - c \log(s)] + \sum_{i=1}^n [(c-1) \log(x_i) - (k\alpha + 1) \log(w_i)] \\ + \sum_{i=1}^n [(\alpha - 1) \log(\delta_i) - 2 \log(\xi_i)],$$

em que $w_i = 1 + \left(\frac{x_i}{s}\right)^c$, $\delta_i = 1 - w_i^{-k}$ and $\xi_i = \delta_i^\alpha + w_i^{-k\alpha}$.

O vetor escore $\mathbf{U}(\Theta) = (U_\alpha(\Theta), U_k(\Theta), U_c(\Theta), U_s(\Theta))^T$ tem componentes dadas por

$$U_\alpha(\Theta) = \frac{n}{\alpha} - k \sum_{i=1}^n \left[\log(w_i) + \log(\delta_i) - 2 \left(\frac{\dot{\xi}_{(\alpha)i}}{\xi_i} \right) \right]$$

$$U_k(\Theta) = \frac{n}{k} - \sum_{i=1}^n \left[-\alpha \log(w_i) + (\alpha - 1) \left(\frac{\dot{\delta}_{(k)i}}{\delta_i} \right) - 2 \left(\frac{\dot{\xi}_{(k)i}}{\xi_i} \right) \right]$$

$$U_c(\Theta) = \frac{n}{c} + n[-\log(s) + \log(x_i)] + \sum_{i=1}^n \left[-(k\alpha + 1) \left(\frac{\dot{w}_{(c)i}}{w_i} \right) + (\alpha - 1) \left(\frac{\dot{\delta}_{(c)i}}{\delta_i} \right) - 2 \left(\frac{\dot{\xi}_{(c)i}}{\xi_i} \right) \right]$$

$$U_s(\Theta) = -\frac{nc}{s} + \sum_{i=1}^n \left[-(k\alpha + 1) \left(\frac{\dot{w}_{(s)i}}{w_i} \right) + (\alpha - 1) \left(\frac{\dot{\delta}_{(s)i}}{\delta_i} \right) - 2 \left(\frac{\dot{\xi}_{(s)i}}{\xi_i} \right) \right]$$

em que

$$\dot{\xi}_{(\alpha)i} = \delta_i^\alpha \log(\delta_i) - kw_i^{-k\alpha} \log(w_i); \quad \dot{\xi}_{(s)i} = \alpha \left(\delta_i^{\alpha-1} \dot{\delta}_{(s)i} - kw_i^{-k\alpha-1} \dot{w}_{(s)i} \right);$$

$$\dot{\delta}_{(k)i} = w_i^{-k} \log(w_i); \quad \dot{w}_{(c)i} = \left(\frac{x}{s} \right)^c \log \left(\frac{x}{s} \right); \quad \dot{\delta}_{(c)i} = kw^{-k-1} \dot{w}_{(c)i}; \quad \dot{w}_{(s)i} = -\frac{c}{s} \left(\frac{x}{s} \right)^c;$$

$$\dot{\delta}_{(s)i} = kw_i^{-k-1} \dot{w}_{(s)i}; \quad \dot{\xi}_{(k)i} = \alpha \left(\delta_i^{\alpha-1} \dot{\delta}_{(k)i} - w_i^{-k\alpha} \log(w_i) \right);$$

$$\dot{\xi}_{(c)i} = \alpha \left(\delta_i^{\alpha-1} \dot{\delta}_{(c)i} - kw_i^{-k\alpha-1} \dot{w}_{(c)i} \right).$$

Os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\Theta}$ de Θ são obtidos resolvendo as equações não-lineares $U_\alpha(\Theta) = 0$, $U_k(\Theta) = 0$, $U_c(\Theta) = 0$ and $U_s(\Theta) = 0$. Estas equações não podem ser solucionadas analiticamente e, portanto, pode-se utilizar um *software* estatístico para obtenção dos EMVs. Ainda, métodos iterativos, como por exemplo, algoritmo do tipo Newton-Raphson pode ser utilizado para obter o vetor de estimativas $\hat{\Theta}$. A escolha dos valores iniciais para k , c e s foi feita a partir das EMVs \hat{k} , \hat{c} e \hat{s} obtidas para o modelo Burr XII, uma vez que este é um caso especial do modelo OBXII quando $\alpha = 1$. O valor inicial para α foi obtido por “tentativa e erro”.

Para obtenção dos intervalos de confiança de (α, k, c, s) e realização de testes de hipóteses sobre os parâmetros, foi obtida a matriz de informação observada, uma vez que para obtenção da matriz de informação esperada requer integração numérica, o que não é nada “trivial”. A matriz de informação observada $J(\Theta)$ de ordem 4×4 é

$$\begin{pmatrix} J_{\alpha\alpha} & J_{\alpha k} & J_{\alpha c} & J_{\alpha s} \\ \cdot & J_{kk} & J_{kc} & J_{ks} \\ \cdot & \cdot & J_{cc} & J_{cs} \\ \cdot & \cdot & \cdot & J_{ss} \end{pmatrix}.$$

Sob condições normais de regularidade, a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\hat{\Theta} - \Theta)$ é $N_4(\mathbf{0}, \mathbf{I}(\Theta)^{-1})$, em que $\mathbf{I}(\Theta)$ é a matriz de informação esperada. Este comportamento assintótico é válido se $\mathbf{I}(\Theta)$ for substituído por $J(\hat{\Theta})$, ou seja, pela matriz de informação observada avaliada em $\hat{\Theta}$. A distribuição normal multivariada $N_4(\mathbf{0}, \mathbf{I}(\Theta)^{-1})$ pode ser usada para construir intervalos de confiança assintóticos regiões de confiança para os parâmetros.

O teste de razão de verossimilhança (TRV) será usado para comparar o modelo OBXII com o modelo Burr XII, visto que estes são modelos encaixados. Assim, deve-se utilizar as estatísticas de máxima verossimilhança para avaliar se a distribuição OBXII ajustada a um dado conjunto de dados é “superior” a distribuição Burr XII ajustada. Dessa maneira, a estatística do TRV, para testar $H_0 : \alpha = 1$ versus $H_1 : \alpha \neq 1$ (equivalente a comparar as distribuições Burr XII e OBXII), é $\omega = 2 \left[l(\hat{\alpha}, \hat{k}, \hat{c}, \hat{s}) - l(1, \tilde{k}, \tilde{c}, \tilde{s}) \right]$, em que $\hat{\alpha}, \hat{k}, \hat{c}$ e \hat{s} são as EMVs sob H_1 e \tilde{k}, \tilde{c} e \tilde{s} são as EMVs sob H_0 .

Aplicação

Aqui, foi adotado a distribuição Burr XII como modelo baseline para a família “OLLG”. As estimativas dos parâmetros de cada distribuição foram obtidas pelo método de máxima verossimilhança descrito na Seção , usando a subrotina *optim* do R. O conjunto de dados são de observações não censuradas. Posteriormente, são apresentadas as EMVs, correspondentes erros-padrão, intervalos de confiança e valores das estatísticas AIC, CAIC e BIC (o menor destes critérios define o melhor ajuste). O TRV é usado para comparar os modelos OBXII e Burr XII ajustados ao conjunto de dados, e portanto, verificar a melhoria (ou não) que o parâmetro de assimetria α promove na modelagem de conjuntos de dados reais. Para realizar as análises será utilizado o *softwareR* (R CORE TEAM (2014))

Dados de concentração de CO2

O conjunto de dados que será utilizado trata-se de um experimento sobre a tolerância ao frio das espécies de gramíneas *Echinochloa crus-galli*. A absorção de CO2 de seis plantas de Quebec e seis plantas do Mississippi foi medida em vários níveis de concentração de CO2 no ambiente. Os dados originais constam de 84 observções e 4 variáveis, sendo elas: a região de origem da planta (Quebec ou Mississippi), tratamento (refrigerada ou não refrigerada), a concentração de dióxido de carbono (CO2) (*ml/l*) e as taxas de absorção de dióxido de carbono (*umol/m² sec*). No presente estudo vamos utilizar apenas a variável concentração de CO2. Para mais detalhes sobre o conjunto de dados ver Potvin, Lechowicz e Tardif (1990).

Resultados e Discussão

A Figura 1 traz informações referentes aos ajustes dos modelos Burr XII e OBXII. A partir da mesma, observa-se que todos os parâmetros foram significativos e por meio das estatísticas AIC, AICC e BIC, verifica-se que o modelo OBXII foi o mais adequado para modelar este conjunto de dados, uma vez que apresentou menores valores destas estatísticas.

Um teste formal para o parâmetro de assimetria, α , que foi adicionado ao modelo Burr XII, é o TRV, discutido na Seção . Aplicando este ao nosso estudo, que é, testar as hipóteses $H_0 : \alpha = 1$ versus $H_1 : \alpha \neq 1$, ou seja, comparar os modelos OBXII e Burr XII, a estatística do teste é $w = 2\{-309,5 - (-319,2)\} = 19,4$ (p -value < 0.01), o que leva à rejeição da hipótese nula. Este resultado mostra a potencialidade do parâmetro de assimetria para modelar dados reais.

O histograma e as funções de densidade estimadas, bem como as funções de densidade acumuladas ajustadas dos modelos utilizados são apresentados na Figura 3. A partir de tal representação gráfica, pode-se verificar que o modelo proposto (OBXII) fornece uma curva ajustada mais próxima do histograma e também se aproxima do que seria o “comportamento bimodal” dos dados (Figura 1(a)). Ainda, a curva de densidade acumulada ajustada pelo modelo OBXII está mais próxima da densidade acumulada empírica do que é visto com relação ao modelo Burr XII (Figura 1(b)).

Tabela 1: EMVs para o vetor de parâmetros Θ (Est.) para os modelos ajustados aos dados de CO₂, e os correspondentes erros-padrão (E.P.), intervalos de confiança à 95% ($IC_{95\%}(\Theta)$), Valor-p e as estatísticas AIC, AICC e BIC.

Modelo Burr XII				
Θ	Est.	E.P.	$IC_{95\%}(\Theta)$	Valor- p
c	3,0002	0,2923	[2,4190; 3,5814]	< 0,001
k	4,4999	1,9450	[0,6320; 8,3677]	0,0231
s	48,6629	9,1464	[30,4743; 66,8515]	< 0,001
Est.	$-2l(\Theta) = 638,4$	AIC=644,4	AICC=644,7	BIC=651,7
Modelo OBXII				
Θ	Est.	E.P.	$IC_{95\%}(\Theta)$	Valor- p
c	6,9475	1,4090	[4,1456; 9,7495]	< 0,001
k	12557	0,0431	[12556,91; 12557,09]	< 0,001
s	121,8200	30,0932	[61,9735; 181,6600]	< 0,001
α	0,3448	0,0819	[0,1819; 0,5078]	< 0,001
Est.	$-2l(\Theta) = 619,0$	AIC=627,0	AICC=627,5	BIC=636,7

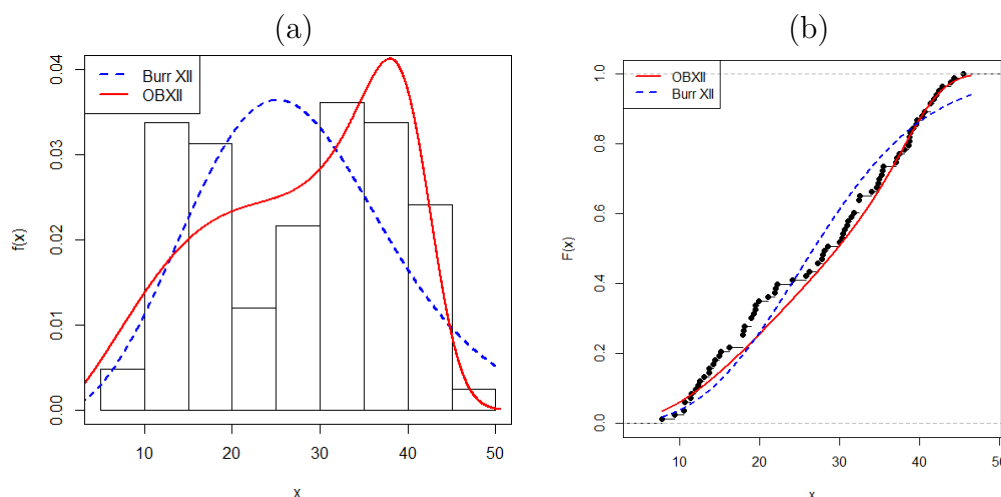


Figura 3: (a) Funções densidade de probabilidade estimadas dos modelos OBXII e Burr XII e (b) funções acumuladas estimadas e empírica para os dados CO₂.

Conclusão

Na literatura existem numerosas distribuições para modelagem de dados. Porém, muitas destas distribuições não conseguem se ajustar bem a dados bimodais ou dados que tem funções de risco nas formas unimodal ou banheira. Neste trabalho foi definida a distribuição Odd Burr XII a fim de proporcionar uma maior flexibilidade à distribuição Burr XII por meio da adição de um parâmetro de forma. As estimativas para os parâmetros do modelo foram obtidas usando o estimador de máxima verossimilhança. A potencialidade da nova distribuição é ilustrada a partir de um conjunto de dados reais, em que por meio das estatísticas AIC, AICC, BIC e do teste de razão de verossimilhança observou-se a superioridade do modelo OBXII quando comparado ao modelo base, Burr XII.

Sigmae, Alfenas, v.8, n,2, p. 762-770, 2019.

64^a Reunião da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria (RBRAS).
18^o Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica (SEAGRO).

Referências Bibliográficas

- ALZAATREH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. *Metron*, v.71, p.63-79, 2013.
- CORDEIRO, G.M.; ALIZADEH, M.; PESCIM, R.R.; ORTEGA, E.M.M. The odd log-logistic generalized half-normal lifetime distribution: properties and applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v.46, p.4195-4214, 2016.
- CRUZ, J.N.; ORTEGA, E.M.M.; CORDEIRO, G.M. ; SUZUKI, A.K. ; MIALHE, F.L. Bivariate odd-log-logistic-Weibull regression model for oral health-related quality of life. *Communications for Statistical Applications and Methods*, v.24, p.271-290, 2017.
- CRUZ, J.N.; ORTEGA, E.M.M.; CORDEIRO, G.M. The log-odd log-logistic Weibull regression model: modelling, estimation, influence diagnostics and residual analysis. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v.86, p.1516-1538, 2016.
- DA SILVA BRAGA, A.; CORDEIRO, G.M.; ORTEGA, E.M.M.; SILVA, G.O. The Odd Log-Logistic Student t Distribution: Theory and Applications. *Journal of Agricultural Biological and Enviromental Statistics*, v.27, p. 1-25, 2017.
- DA SILVA BRAGA, A; CORDEIRO, G.M. ; ORTEGA, E.M.M. ; CRUZ, J.N. The odd log-logistic normal distribution: Theory and applications in analysis of experiments. *Journal of Statistical Theory and Praticce*, v. 10, p.311-335, 2016.
- ORTEGA, E.M.M. The Odd Log-Logistic Generalized Gamma Model: Properties, Applications, Classical And Bayesian Approach. *Biometrics & Biostatistics International Journal*, v.6, p.1-19, 2017.
- ORTEGA, E.M.M.; LEMONTE, A.J.; CORDEIRO, G.M.; CRUZ, J.N. The odd Birnbaum-Saunders regression model with applications to lifetime data. *Journal of Statistical Theory and Practice*, v. 10, p.780-804, 2016.
- POTVIN, C., LECHOWICZ, M.J.; Tardif, S. The statistical analysis of ecophysiological response curves obtained from experiments involving repeated measures. *Ecology*, v.71, p.1389-1400, 1990.
- R CORE TEAM. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2019. URL <http://www.R-project.org/>.
- ZIMER, W. J.; KEATS, J. B.; WANG, F. K., 1998. The burr XII distribution in reliability analysis. *J. Qual. Technol.*, v.30, p.386-294, 1998.