
Ensino de Geometria Espacial métrica: uma experiência com modelagem

Andréa Cardoso^{1†}, José Carlos de Souza Júnior¹, Bruna S. C. Franco², Maíra J. R. Oliveira³

¹Docente do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas.

²Aluna formada pelo curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alfenas.

E-mail: brunastefani_franco@hotmail.com.

³Aluna do curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alfenas.

E-mail: mairajoice@hotmail.com.

Resumo: *O estudo de geometria permite o desenvolvimento de habilidades e conhecimentos em relação a fatos e questões do cotidiano. Entretanto, os resultados em exames oficiais apontam uma grande defasagem no ensino e aprendizagem, principalmente em geometria espacial. Esta pesquisa está inserida no contexto do ensino e aprendizagem da geometria espacial na educação básica, em particular, à métrica dos sólidos geométricos. O objetivo do trabalho é apresentar uma sequência didática utilizando a modelagem matemática como alternativa metodológica, tendo em vista seu potencial para quebrar a dicotomia existente entre a matemática escolar e a matemática presente nas mais variadas situações do cotidiano. A sequência foi desenvolvida em duas escolas públicas junto a estudantes do ensino médio. Para validar a sequência proposta, a pesquisa foi fundamentada nos princípios da engenharia didática e a análise foi realizada utilizando-se registros em diário de campo, registros das atividades desenvolvidas pelos estudantes e aplicação de questionários e testes diagnósticos. Os resultados obtidos levaram a concluir que houve um avanço por parte dos estudantes na apreensão de conceitos de geometria plana e espacial.*

Palavras-chave: *Ensino de Geometria, Engenharia Didática, Modelagem Matemática.*

Abstract: *The study of geometry allows the development of skills and knowledge in relation the facts and issues of daily life. However, the results of official tests indicate a great unbalance in teaching and learning, especially in Space Geometry. This research is embedded in the context of teaching and learning of space geometry in basic education, in particular, the metric of geometric solids. The objective is to present a didactic sequence using mathematical modeling as a methodological alternative in view of its potential to break the dichotomy between school mathematics and mathematics present in various daily situations. The sequence was developed in two public schools with the high school students. To validate the proposed sequence, the research was based on the principles of didactic engineering and the analysis was performed using records in a field diary, records of activities developed by the students and applications of questionnaires and diagnostic tests. The results led to the conclusion that there was an improvement in the seized concepts of plane geometry and space by students.*

Keywords: *Teaching Geometry. Engineering Curriculum. Mathematical Modeling.*

[†]Autor correspondente: andreac74@uol.com.br.

Introdução

A Matemática é essencial na formação do jovem, pois contribui para o (re)conhecimento do espaço físico e social em que está inserido. Nesse aspecto, a Matemática pode propiciar a construção de estratégias, a comprovação de resultados, o trabalho coletivo e a iniciativa na tomada de decisão para enfrentar desafios, o que difere, muitas vezes, da forma como é apresentada nas escolas, simplesmente como um conhecimento imutável que deve ser assimilado pelo aprendiz. Especialmente, a geometria é muito utilizada em aplicações e é considerada uma ferramenta importante, pois através dela se desenvolvem habilidades de visualização, orientação no espaço, além da capacidade para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes. Entretanto, sob o ponto de vista do estudante, a matemática escolar parece estar desconectada de problemas reais.

Atualmente, os professores da rede pública de ensino adotam o livro didático como principal, e muitas vezes única, referência para o preparo e condução de suas aulas. Assim, faz-se necessário a verificação de como os conteúdos de geometria espacial estão sendo vinculados nesses textos. A análise feita por Costa e Lima (2010) nos livros didáticos mais utilizados pelas escolas públicas de ensino médio da região Sul de Minas, em relação ao conteúdo de Prismas, revelou que a maioria dos livros não indica o uso de recursos didáticos alternativos e tampouco propõem atividades lúdicas para o ensino de geometria. Diante disso, pode-se deduzir que, em sala de aula, o método de ensino continua sendo o tradicional. Como efeito dessa prática, muitos estudantes consideram essa disciplina sem importância, pois mobiliza apenas a memória, consequência talvez da falta de demonstrações ou de sugestões de materiais manipulativos, amplamente disponíveis atualmente.

É contraditório pensar em uma técnica para validar uma sequência de ensino quando esta é desprovida de significado. Ensinar matemática com fins nela mesma, na maioria das vezes, não desperta o interesse do estudante. É essencial que o ensino busque caminhos que façam o aprendiz entender seu papel em uma sociedade cada vez mais competitiva, moldada pela tecnologia e que passa por constantes transformações.

Dentre as atuais tendências do ensino de matemática, a modelagem matemática vem ganhando espaço nas pesquisas e práticas pedagógicas, como uma tendência que viabiliza a interação entre a matemática e realidade. Além disso, seu aspecto investigativo favorece a criação de estratégias, tomadas de decisão e possibilita o aperfeiçoamento da prática, visto que o próprio estudo de Geometria Espacial requer uma maneira mais construtivista e aplicada da matemática.

Para Bassanezi (2002, p.16) “a modelagem consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Modelar significa encontrar uma aproximação da realidade através de modelos matemáticos, que devem passar por um processo de validação para confronto das soluções na situação real. O autor apresenta a conceituação informal de modelagem matemática, sua importância como metodologia alternativa e os processos pelos quais deve seguir, a saber: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação, não necessariamente seguidos na ordem. O esquema apresentado na Figura 1 ilustra as etapas do processo de modelagem.

Chaves e Santo (2008) simplificam o processo de modelagem como sendo a tradução de situações problemas, provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, segundo a linguagem simbólica da matemática estabelecendo relações matemáticas, denominado de modelo matemático, que procura representar ou organizar a situação problema proposta com vistas a compreendê-la ou solucioná-la.

Uma vez delineada a situação com a qual se pretende estudar, a primeira etapa comumente chamada de interação consiste no reconhecimento da situação problema e na familiarização do assunto a ser modelado, o que pode se dar a partir de consultas em livros, revistas, entre outros referenciais teóricos. É nessa fase que se observa ou se identifica o problema a ser estudado e faz-se o levantamento de dados qualitativos e quantitativos que propiciarão a construção do modelo na fase seguinte.

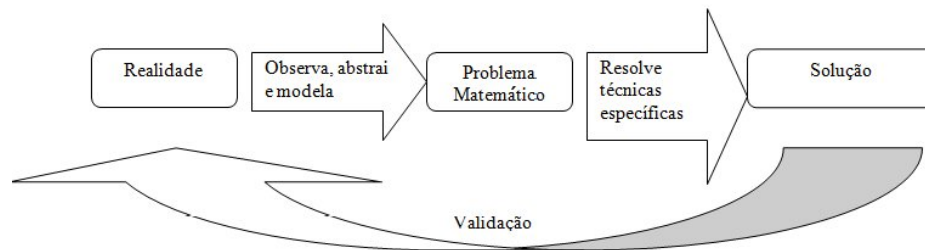


Figura 1: Esquema do processo de modelagem matemática

Na segunda etapa, há a formulação do problema, ou seja, uma hipótese, e a resolução do problema em termos do modelo. O objetivo desta fase “é chegar a um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, ou equações algébricas, ou gráfico, ou representações, ou programa computacional, que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução” (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p.14).

Na última etapa, temos a interpretação da solução e validação do modelo matemático. Neste momento, os modelos são testados e comparados com o sistema real para o processo da validação, ou seja, se o processo é aceito ou não. Caso, nesse ponto, o modelo não atenda às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa.

Biembengut e Hein (2003) defendem a tese que a modelagem matemática é o alicerce da matemática pois as grandes descobertas surgiram desde o início do desenvolvimento da humanidade através da necessidade do homem em resolver problemas reais. Portanto, com esse intuito, a modelagem matemática poderia ser introduzida no âmbito escolar, possibilitando aos aprendizes uma visão mais ampla da matemática, a partir de um problema que pode ser considerado uma motivação de conceitos iniciais, passando por uma evolução no entendimento e complexidade até torná-los formais e sofisticados.

Para o trabalho com modelagem em sala de aula, Barbosa (2001) propõe três casos possíveis. O primeiro caso trata da problematização, ou seja, o professor apresenta uma situação problema, com informações quantitativas e qualitativas, cabendo ao aprendiz o processo de resolução. No segundo caso, o professor leva para a sala de aula um problema aplicado, e os estudantes são responsáveis pela coleta de informações necessárias à resolução, durante o processo de investigação. No caso três, os estudantes escolhem o tema e são responsáveis pela coleta das informações e resolução do problema. Em todos os casos, o professor é considerado como mediador na investigação dos alunos.

O trabalho desenvolvido nesta pesquisa pode ser classificado como o segundo caso, visto que a proposta de tema foi feita pelos pesquisadores e coube aos estudantes a investigação, levantamento de hipóteses, construção e validação do modelo.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma sequência didática para o ensino de geometria espacial métrica com base na modelagem matemática e validada pela engenharia didática (ARTIGUE, 1996). São apresentados os resultados de uma experiência com modelagem de uma caixa de sabão em pó no ensino médio em que os estudantes foram estimulados a realizar pesquisas, construir modelos físicos, comparar medidas e utilizar programas computacionais como auxílio na tomada de decisão.

Tem-se por objetivo permitir que os estudantes desenvolvam visão espacial, observem padrões existentes em sólidos geométricos, identifiquem e classifiquem formas geométricas bem como calculem áreas totais e volumes.

Este trabalho é um recorte do trabalho de conclusão de curso (FRANCO; OLIVEIRA, 2011), que teve como problemática as seguintes questões norteadoras: A modelagem matemática pode ser utilizada satisfatoriamente como um recurso para o ensino de geometria espacial métrica? A sequência didática proposta é adequada a estudantes do ensino médio?

Este artigo está organizado da seguinte forma: na próxima seção é apresentada a escolha metodológica para o desenvolvimento do trabalho, para o planejamento, a elaboração e execução da sequência didática. A terceira seção apresenta os resultados e na sequência as considerações finais.

Engenharia Didática

A engenharia didática surgiu como metodologia de pesquisa em meados dos anos 1980 e se caracteriza por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula. Segundo Pais (2008), a ideia da engenharia didática subentende a analogia entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro, no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto. Assim como o engenheiro necessita de um modelo teórico para exercer seu trabalho, o educador também depende de um conjunto de conhecimentos que amplia as condições de influência do saber acadêmico na realidade do sistema de ensino onde ele exerce seu domínio profissional.

Na engenharia didática, além da base teórica, é necessário que a execução prática da pesquisa seja submetida a um domínio sistemático que é feito através de quatro fases consecutivas: análise preliminar, concepção e análise a priori, sequência didática e finalmente análise a posteriori e validação.

A análise preliminar tem como objetivo analisar e compreender o funcionamento do ensino onde a experiência será realizada, bem como propor uma intervenção satisfatória que modifique para melhor a realidade da sala de aula. A análise é feita tendo em vista o referencial teórico adotado pelo pesquisador e os conhecimentos didáticos adquiridos sobre o tema específico.

Para melhor organizar a análise preliminar, Artigue (1996) recomenda a distinção de três dimensões: i) epistemológica, associada às características do saber e relacionadas ao estudo da evolução das ideias e dos conceitos; ii) didática, associada às características do funcionamento do sistema de ensino e às criações didáticas resultado de sucessivas transformações do saber matemático em um instrumento educacional compreensível para o aprendiz; iii) cognitiva, associada às características dos sujeitos ao qual se dirige o ensino.

Ainda segundo Artigue (1996), a próxima fase de concepção e análise a priori consiste na definição de um certo número de variáveis de comando, que podem ser globais ou locais. As variáveis no âmbito local descrevem cada atividade proposta, e estão relacionadas com o planejamento específico de uma sessão, relacionando as situações didáticas propostas com previsões a respeito do comportamento dos estudantes. Ao mesmo tempo, são formuladas hipóteses que serão comparadas com os resultados finais, contribuindo para a validação da engenharia.

Pais (2008) afirma que a fase da sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas, também chamadas de sessões de ensino, que serão analisadas antecipadamente com intuito de observar situações de aprendizagem envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática.

Após o planejamento da sequência didática, com o objetivo de colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, é o momento de escolher os meios de registros dos dados da experimentação. Os dados podem ser coletados através de observações feitas nas sessões de ensino e pelas produções dos alunos, com a utilização de gravações de áudio e vídeo e anotações do diário de campo, além do uso de questionários, entrevistas e testes individuais ou em pequenos grupos, realizados durante a experimentação ou no final dela.

Metodologia

A atividade de intervenção foi proposta a estudantes do terceiro ano do ensino médio de duas escolas públicas, oferecida a interessados no formato de minicurso em contraturno como parte das atividades desenvolvidas no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), tendo como característica marcante a docência compartilhada.

A experiência seguiu a metodologia da engenharia didática. Primeiramente foi feita a análise preliminar seguida da concepção e análise a priori, sequência didática e finalmente análise a posteriori e validação.

Para melhor organização da análise preliminar, esta fase foi dividida nas três dimensões propostas por Artigue (1996), que definem a relação ensino e aprendizagem de Matemática.

Dimensão epistemológica: Baseado em (LIMA, 1991) foi realizado um estudo da noção de medida em Geometria sob seu aspecto uni, bi e tridimensional. No estudo de medidas de figuras planas, foram deduzidas as fórmulas usuais das áreas dos polígonos básicos, assim como a definição geral da área de uma figura plana. Já para medida em sólidos, o estudo consistiu na definição geral de volume e na dedução das fórmulas do volume dos sólidos elementares.

Dimensão didática: As atividades desenvolvidas pelo PIBID permitiram um novo olhar e compreensão do funcionamento do sistema de ensino, em particular, foram essenciais para o entendimento da dinâmica da sala de aula, do comportamento e motivação dos estudantes, bem como suas dificuldades e facilidades. Desta forma foi possível reorganizar a sequência.

Dimensão cognitiva: As atividades foram preparadas através de situações do cotidiano dos estudantes, por acreditar que assim, o aprendizado apresenta melhores resultados. A manipulação de objetos para auxiliar na elaboração de conceitos e o uso de demonstrações de resultados matemáticos, mesmo de forma intuitiva, faz dos encontros algo diferente das aulas tradicionais, pois os aprendizes tiveram a oportunidade de construir conceitos ao invés de simplesmente memorizar propriedades e fórmulas, muitas vezes sem sentido para eles.

Assim a análise foi feita tendo em vista o referencial teórico matemático adotado, os conhecimentos didáticos adquiridos sobre o tema de estudo e entrevistas com professores e dirigentes da área. A participação da direção e professoras da área foi fundamental para melhor compreensão do funcionamento da escola, no que diz respeito à organização de horários, disponibilidade de salas e laboratórios, entre outros recursos essenciais para a realização da pesquisa.

Quanto à concepção, as atividades foram planejadas de acordo com a modelagem matemática. Dando suporte a análise a priori, inicialmente foi aplicado aos estudantes um questionário investigativo e um teste diagnóstico.

O questionário investigativo foi planejado objetivando conhecer algumas concepções que os estudantes têm em relação à matemática e outros fatores relacionados às condições do ensino de matemática no ambiente escolar.

O teste diagnóstico consistiu de uma atividade sobre um tema específico de geometria, descrita na Figura 2, cuja finalidade foi verificar o nível de conhecimento dos estudantes em operações básicas, áreas, conversão de medidas, entre outras competências, e confrontá-la com a análise feita na fase da análise a posteriori.

Para solucionar esta atividade diagnóstica é necessário que o indivíduo seja capaz de resolver problemas que envolvam o cálculo da área lateral e total de objetos tridimensionais, reconhecer a necessidade de medidas padronizadas, relacionar a medida padrão metro com seus submúltiplos, realizar operações básicas com números naturais, além de resolver problemas envolvendo estas operações. As habilidades citadas estão vinculadas, respectivamente, aos tópicos áreas laterais e



|
PIBID - MATEMÁTICA
Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
 Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700 - Alfenas/MG - CEP 37130-000
 Fone: (35) 3299-1000 - Fax: (35) 3299-1063

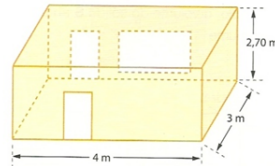


Prezado estudante,

Esta atividade é um instrumento de pesquisa desenvolvido pelo projeto PIBID-MATEMÁTICA-UNIFAL-MG e tem como objetivo conhecer melhor as habilidades matemáticas dos estudantes da E. E. Dr. Emílio da Silveira. Esclarecemos que o mesmo não tem caráter avaliativo.

Resolva o seguinte problema de forma detalhada:

Na figura abaixo está ilustrada uma cozinha, sabe-se que cada porta tem $1,60 \text{ m}^2$ de área e a janela tem uma área de 2 m^2 .



- a) Quantos metros quadrados de azulejo são necessários para revestir até o teto as quatro paredes da cozinha?
- b) Uma caixa de azulejos com 10 unidades de dimensões $30 \times 40 \text{ cm}$ custa R\$ 26,00, qual será o custo total do revestimento?

Figura 2: Atividade proposta para teste diagnóstico

totais de figuras tridimensionais, medidas de comprimento e perímetro, e conjunto dos números naturais requeridos no CBC (MINAS GERAIS, 2011).

A elaboração da sequência didática exigiu uma etapa de estudo teórico de conceitos matemáticos, resultados e suas demonstrações, e o conhecimento adquirido fundamenta a ação pedagógica e as próprias tarefas realizadas pelos alunos quando este sofre adaptações de linguagens que favorecerá o aprendizado escolar.

A sequência didática elaborada foi dividida em dois momentos: i) reconhecendo poliedros através do trabalho com embalagens e, ii) modelando uma caixa de sabão. Cada momento define uma variável local, sendo os conteúdos escolhidos através de indicações contidas nos documentos oficiais, nos livros didáticos mais adotados, pesquisas recentes e em textos voltados para a formação do professor de matemática.

A atividade inicial com embalagens foi planejada para, através da manipulação e de questionamentos, promover o reconhecimento dos sólidos geométricos e sua classificação.

Por sua vez, a atividade de modelagem foi dividida seguindo as etapas do processo de modelagem. A primeira etapa, denominada interação, consistiu no reconhecimento da situação problema e na familiarização do assunto a ser modelado por meio de uma pesquisa sobre as mudanças nas dimensões de uma caixa de sabão em pó. Na segunda etapa, foi formulado o problema de se comparar o volume e a área total da embalagem atual e da antiga. A partir do problema e considerando-se como hipótese que a caixa deveria ter a forma de um bloco retangular, obteve-se o modelo matemático para se encontrar uma caixa de volume mais próximo possível do volume atual, porém com menor gasto de material. Na última etapa, os estudantes construíram modelos físicos para a caixa de sabão em pó com as dimensões reais de cada embalagem, nova e antiga, para validação dos resultados. Ao final, constataram que as mudanças no formato da caixa provocaram uma considerável economia de material. Utilizando o modelo matemático obtido, os estudantes construíram uma tabela em uma planilha eletrônica e utilizaram o programa de geometria dinâmica GeoGebraⁱⁱ para visualizar o gráfico e encontrar a caixa de área superficial

ⁱⁱSoftware livre que reúne geometria, álgebra e cálculo, disponível em <http://www.geogebra.org/cms/>

mínima.

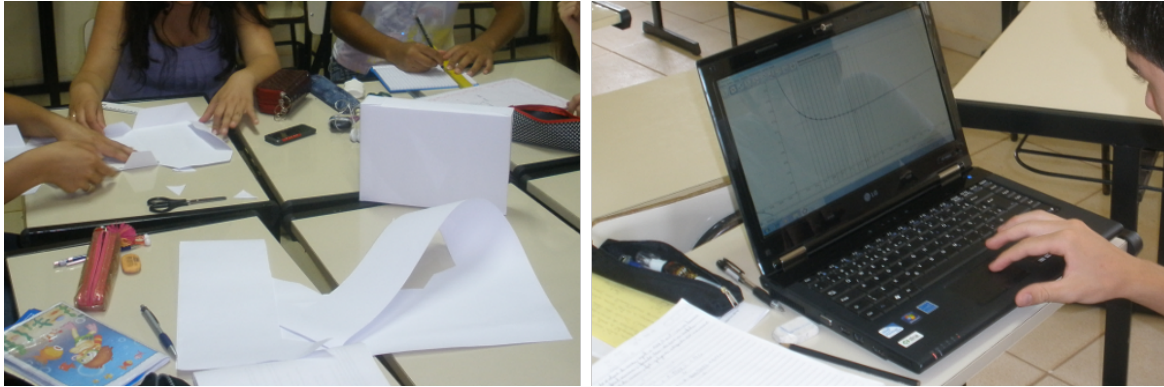


Figura 3: Estudantes construindo o modelo físico para a caixa de sabão em pó.

Na fase final da análise a posteriori e validação, ocorreu o tratamento dos dados obtidos durante a aplicação da sequência didática, por meio da análise da produção dos alunos e de todos os registros feitos durante as sessões de ensino, o que permitiu o confronto da análise a priori e da análise a posteriori, com a finalidade de validar ou corrigir as hipóteses levantadas. A mesma atividade diagnóstica aplicada na análise a priori foi aplicada também no último dia de curso para verificar o desempenho dos estudantes, de acordo com a sequência aplicada e observar se os erros cometidos a priori persistiram ou não.

Sequência didática aplicada

A sequência didática foi dividida em dois momentos. Primeiramente, propôs-se o trabalho com embalagens, de forma a estimular o desenvolvimento da visão espacial, a observação de padrões, identificação e classificação de sólidos geométricos. Posteriormente, propôs-se a atividade de modelagem matemática objetivando a aplicação dos conceitos estudados no momento anterior, contextualização e cálculo de áreas totais e volumes. Cada momento define uma variável local e o estabelecimento de hipóteses, de acordo com a metodologia da engenharia didática.

Trabalhando com embalagens

Variável: Reconhecimento dos sólidos geométricos através da análise de formas e tipos de embalagens.

Hipótese: Acredita-se que os aprendizes irão (re)conhecer, identificar e classificar poliedros, através da manipulação e de questionamentos feitos pelas pesquisadoras.

Para este momento foram utilizados diversos tipos de embalagens para que os alunos explorassem e fizessem conjecturas objetivando a elaboração de conceitos. A proposta é desenvolver uma aula dinâmica, em que os conceitos fossem elaborados a partir das respostas dos alunos, para que estes se sentissem mais confiantes e à vontade.

Um dos objetivos desta atividade é analisar e separar as embalagens em grupos, para que os estudantes pudessem perceber a diferença de uma figura plana e de uma espacial, bem como realizar a classificação de sólidos geométricos. Nesse sentido o papel das pesquisadoras foi organizar e facilitar o processo através de questionamentos, tais como: Quais são os elementos geométricos presentes nesses sólidos? Quais as diferenças e semelhanças entre os objetos? Que figuras geométricas compõem as faces desses sólidos? O que são polígonos? Todos os sólidos são formados por polígonos?

Embora o tema principal seja a geometria espacial, muitos estudantes têm dificuldade em diferenciar e estabelecer relações entre polígonos e poliedros, sendo necessário então, trabalhar com alguns conteúdos da geometria plana. Faz parte dessa sessão a análise e a classificação de embalagens, separando-as em dois grupos, o grupo dos poliedros e o grupo dos não poliedros.

Quando os estudantes foram questionados a responder sobre as diferenças e semelhanças entre os objetos, era esperado que respondessem algo parecido como: “é redondo”, “tem o formato quadrado”, etc. e de fato as respostas apresentadas foram semelhantes ao que se esperava. Durante a dinâmica, notou-se que a maioria dos estudantes não conseguia diferenciar uma figura plana de outra espacial.

Modelagem matemática: caixa de sabão em pó

Variável: Análise de dois modelos de caixa de sabão em pó e a procura pelo modelo ótimo.

Hipótese: Através da construção de dois modelos de caixa de sabão em pó, espera-se que os estudantes aprendam mais sobre o cálculo de área e volume, além de fazerem inferências para tomadas de decisão.

Com vistas a reproduzir a atividade proposta inicialmente em Santos e Baccarin (2006) e, fomentando a discussão sobre embalagens e as mudanças no decorrer dos anos, os estudantes realizaram uma pesquisa para descobrirem como era a caixa de sabão em pó antiga e quais as dimensões da embalagem antiga e atual. De posse desta informação, foi solicitado que construíssem as caixas com as dimensões encontradas, em seguida calculassem a área externa, ou seja, descontando as dobras, o volume de cada caixa. Os alunos foram divididos em dois grupos, ambos conseguiram chegar nas mesmas respostas, e tirar as mesmas conclusões, apresentadas na Tabela 1.

Embalagens	Comprimento (<i>cm</i>)	Largura (<i>cm</i>)	Altura (<i>cm</i>)	Volume (<i>cm</i> ³)	Área (<i>cm</i> ²)
Antiga	16,8	4,8	24	1935,36	1198,08
Nova	19	7	14,5	1928,5	1020

Tabela 1: Respostas encontradas pelos estudantes na comparação das dimensões da embalagem antiga e nova de sabão em pó.

Para esta atividade, os estudantes construíram um modelo físico para a embalagem antiga e nova de uma marca conhecida de sabão em pó, com as dimensões reais de cada embalagem pesquisadas por eles, e calcularam a área da superfície e o volume de cada embalagem. Em seguida, responderam aos questionamentos levantados: i) Qual a razão que levou a empresa a mudar o formato da embalagem? ii) Quanto foi a economia de papel? iii) Qual o percentual de papel que a empresa economizou? iv) Supondo que a população do Brasil seja de aproximadamente 180 milhões de habitantes, e supondo ainda que $\frac{1}{3}$ dessa população utiliza uma caixa de sabão em pó por mês. Que economia de papel resultará? v) Será que haveria uma possibilidade de conseguir uma área ainda menor que a caixa atual, mantendo o mesmo volume?

Assim, os estudantes concluíram que a caixa atual de sabão em pó utiliza menos material para ser confeccionada que a caixa antiga. A diferença na área total da caixa $1198,08 - 1020 = 178,08 \text{ cm}^2$, representa uma economia de 14,86% para o fabricante. Em termos absolutos, considerando as hipóteses de consumo da população brasileira, há uma economia de papel em torno de $1.068.480 \text{ m}^2$ por mês.

Em seguida foi proposto que descobrissem se há possibilidade de construir uma caixa com o volume mais próximo possível do volume atual, porém com menor gasto de material. Os estudantes variaram as dimensões da caixa atual, durante a atividade a pesquisadora perguntava

aos estudantes o que acontecia a medida que mudavam as medidas das dimensões da caixa, de modo que o volume não distanciasse do atual. Logo, um dos alunos percebeu que a altura, a largura e o comprimento estavam tendendo a ter a mesma medida. Enfim, concluíram que a caixa cuja medida da altura, largura e comprimento é aproximadamente igual a $12,45\text{ cm}$, teria o volume mais próximo do volume da caixa atual, isto é, o volume da caixa cúbica é $1928,5\text{ cm}^3$ que é aproximadamente igual ao volume da caixa atual de $1929,78\text{ cm}^3$.

Como a embalagem de formato cúbico não é adequada para o manuseio, os aprendizes foram buscar a área superficial mínima fixando a mesma medida lateral da base da caixa atual, 7 cm , por ser adequada ao manuseio. Com isso, teriam que encontrar a equação da altura em função do comprimento, ou seja, $1928,5 = c \cdot 7 \cdot h$, que resulta em $h = \frac{1928,5}{7c}$. Considerando a área superficial da caixa $A = 2 \cdot 7 \cdot c + 2 \cdot 7 \cdot h + 2 \cdot c \cdot h$ e substituindo o valor de h nesta expressão obtém-se:

$$A = 14 \cdot c + \frac{3857}{c} + 551 \quad \text{ou} \quad A = 0,14 \cdot c + \frac{0,003857}{c} + 0,0551,$$

com valores expressos em centímetros ou metros, respectivamente.

Com base nas expressões obtidas, foi construída uma tabela, utilizando uma planilha eletrônica e o gráfico utilizando o geogebra para melhor visualização da área superficial mínima, apresentados na Figura 4.

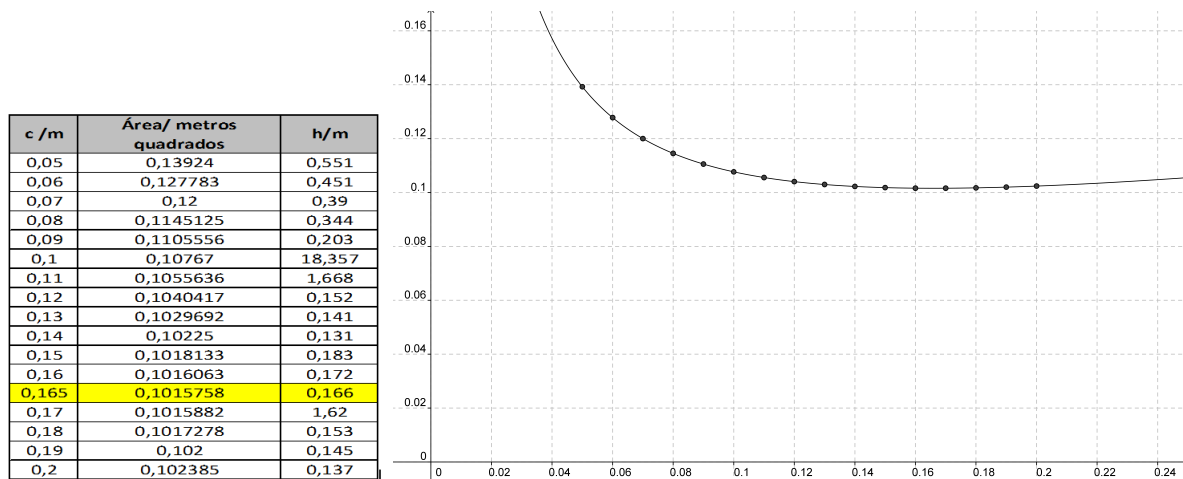


Figura 4: Planilha e gráfico para determinação da área mínima obtida para valores de c e h por volta de $16,5\text{ cm}$.

A produção dos estudantes é apresentada na Figura 5.

Resultados

As respostas ao questionário investigativo relativas especificamente à motivação e às dificuldades dos estudantes em relação a matemática, revelou que grande parte deles consideram ter dificuldades em interpretação e execução de tarefas que envolvem operações básicas. De fato, a habilidade em operar números é requerida pelo Currículo Básico Comum (CBC), nos primeiros anos do ensino fundamental e nota-se claramente que no ensino médio, os alunos ainda não adquiriram tal habilidade.

Apesar da dificuldade evidenciada, os estudantes consideram boas suas aulas de matemática, porém gostariam que fossem mais estimulantes. Este resultado contradiz a visão comum de que, se os alunos têm dificuldades em matemática, é porque o professor não domina o conteúdo ou faz das aulas de matemática algo desmotivador e sem sentido.

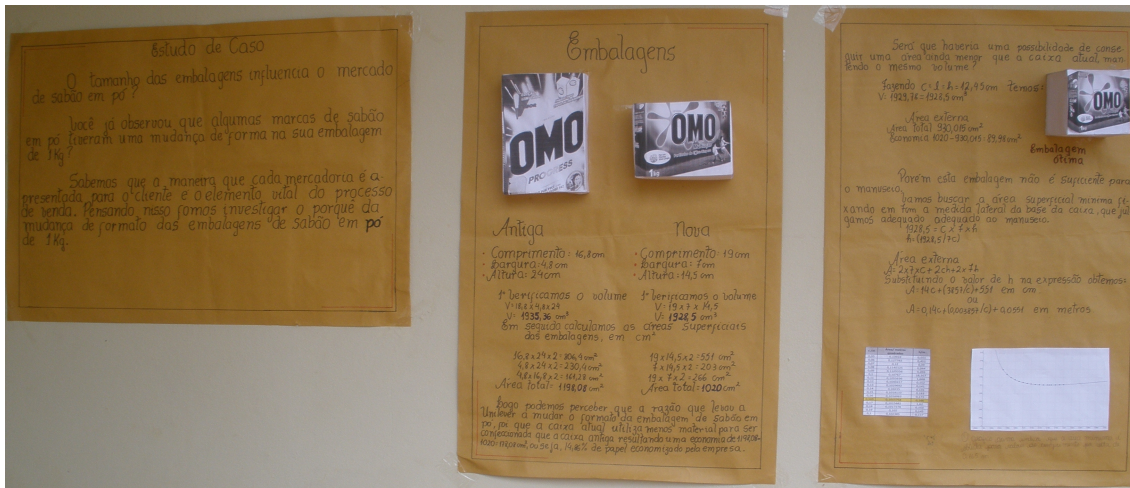


Figura 5: Produção dos estudantes a respeito das dimensões da caixa de sabão em pó.

É possível detectar que os estudantes consideram utilizar parte do que aprendem nas aulas de matemática em seu dia-a-dia. Entretanto, de acordo com as justificativas, a maioria deles vêem utilidade prática da matemática apenas em serviços bancários, supermercados e construções. Entretanto, conceitos mais avançados estudados no ensino médio não são aplicados nem reconhecidos além dos muros da escola.

Com base no desempenho dos estudantes na atividade diagnóstica, constata-se a grande dificuldade em relação à geometria, tanto plana quanto espacial. É pertinente ressaltar que em uma das escolas participantes da pesquisa, que chamaremos de escola A, os estudantes já tinham estudado o conteúdo da sequência didática, mas o fato de terem visto em contexto diferente do proposto, tornou viável a intervenção. Na outra instituição, escola B, os estudantes não haviam estudado conteúdo algum relativo à geometria espacial. Os erros cometidos na escola A evidenciam que não houve o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas que envolvam o cálculo de áreas laterais e área total de sólidos geométricos. Enquanto na escola B, era esperado que pelo menos houvesse acerto no cálculo de áreas de figuras planas, o que não aconteceu.

No geral, a análise das soluções apresentadas, revelou que os estudantes chegam ao ensino médio com uma visão espacial muito restrita.

Muitos dos erros cometidos foram originados pela dificuldade na interpretação do problema e não relacionamento dos dados deste com fatos da realidade. Por exemplo, alguns estudantes acrescentaram a área do chão e do teto no cálculo da área total da Figura 2, que não foram pedidos no problema. Também houve dificuldades em relacionar o problema com fatos da realidade vivida por eles e, como exemplo, podem-se citar os erros devido a não exclusão da área da janela. Outro exemplo, muitos estudantes não consideraram que os azulejos não podem ser vendidos por unidades, e sim são vendidos em caixas fechadas, contendo um número determinado de unidades.

Durante a dinâmica no primeiro encontro, os alunos se mostraram capazes de reconhecer os sólidos geométricos, mas muitos estudantes apresentaram dificuldades em diferenciar e estabelecer relações entre polígonos e poliedros. Percebeu-se que a maioria deles tinham dificuldades em defini-los, e em alguns casos não conseguiam distinguir um sólido cujas faces são polígonos, dos polígonos propriamente ditos.

A atividade de modelagem despertou o interesse dos estudantes, sua execução propiciou o estudo de polígonos, poliedros, área lateral e total, cálculo de volumes e otimização. Os estudantes também tiveram a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas e aplicativos computacionais que auxiliaram na tomada de decisão. A seguir depoimentos dados por dois

alunos da escola A no último encontro:

- “Este curso foi um complemento do que já tínhamos aprendido sobre a geometria espacial; e quanto a caixa de sabão em pó, foi legal ver a matemática por outro ângulo e que ela não é tão inútil assim.” C.R.M. 3º ano C.
- “Aprendi que estamos envolvidos pela matemática e pela geometria, aprendi a ocupar o maior volume usando o menor número de material e revisei várias matérias.” R.C.M.F. 3º ano C.

Na análise a posteriori, particularmente no que se refere à análise quantitativa da atividade diagnóstica aplicada no início e ao final da intervenção, revelou que houve melhora significativa na média de notas obtidas pelos estudantes, que passou de 4,57 na avaliação inicial para 8,1 na avaliação final, de um total de dez pontos.

Os resultados corroboram com as hipóteses levantadas na sequência didática pois, durante a intervenção, notou-se uma desenvoltura e envolvimento da maioria dos aprendizes em realizar as tarefas. Além disso, percebeu-se que muitos erros cometidos na análise a priori, não foram repetidos, principalmente aqueles originários do não relacionamento dos dados do problema com os fatos da realidade.

Conclusões

Os estudantes não costumam utilizar nem parte do que aprendem na escola em seu dia-a-dia, não pelo menos na Matemática do ensino médio, onde os estudantes deveriam aprender conceitos mais avançados para tomadas de decisão, por exemplo. A visão de que a matemática está presente em praticamente todas as atividades do cotidiano é muito restrita. Talvez esse seja o resultado da falta de contextualização nas aulas, que na maioria das vezes fica limitada a definição de conceitos, propriedades e aplicação de exercícios.

Os conteúdos de geometria, em particular, são explorados nos livros didáticos muitas vezes de forma superficial, pois é um conteúdo que geralmente é abordado nos últimos capítulos dos textos utilizados, ocasionando também falta de tempo para que o professor trabalhe os conceitos satisfatoriamente.

A opção de se trabalhar com a modelagem no ensino da geometria foi essencial para a motivação e a participação efetiva dos estudantes na realização das atividades, o que provocou um avanço na compreensão dos conceitos de geometria plana e espacial, possibilitando o aprendizado significativo de alguns tópicos de geometria espacial métrica.

Entretanto, a modelagem como alternativa metodológica apresenta obstáculos, tanto por parte de professores e alunos como das condições da escola. Quando se coloca as limitações por parte do professor em relação à aplicação, uma possibilidade para tal afirmação pode ser a insegurança em se trabalhar em um ambiente onde a aprendizagem não está sob seu inteiro controle, devido a grande gama do desconhecimento advindo de outras áreas. O cronograma das escolas precisam ser cumpridos, por isso o processo de modelagem torna-se muitas vezes inviável para o ensino, pois pode exigir tempo maior, visto que é um processo inevitavelmente mais demorado.

É importante para a formação do professor de matemática conhecer e reconhecer a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, pois a mesma oferece contribuições que vão além da possibilidade de interação da matemática com a realidade, ela oferece condições de perceber que a matemática tem caráter instrumental, além de sua dimensão própria de investigação, invenção e reconstrução do conhecimento. Favorece a busca de novos conhecimentos e conceitos, motivando o aprendiz a desenvolver estratégias e habilidades na solução de novos problemas, tornando-o co-responsável por sua aprendizagem e ao mesmo tempo formando um cidadão crítico.

Sendo assim, gosto e interesse parecem caminhar lado a lado, num ciclo virtuoso onde a motivação gera o interesse, este estimula a aprendizagem que, por sua vez, fomenta o gosto pela área.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio financeiro do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Brasil. Os autores agradecem à comissão organizadora da I Semana da Matemática da UNIFAL-MG pela oportunidade de socializar os resultados desse trabalho.

Referências

- ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. In: Brun J. (org.). *Didactique des Mathématiques*. Lausanne-Paris: Delachaux, 1996.
- BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001, Caxambu. *Anais...* Rio de Janeiro: ANPED, 2001.
- BASSANEZI, R.C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.
- CHAVES, M. I. A.; SANTO, A. O. E. Modelagem matemática: uma concepção e várias possibilidades. *Bolema*, Rio Claro, ano 21, n. 30, p. 149 a 161, 2008.
- COSTA, M. A.; LIMA, S. R. R. *Ensino de Prismas: uma análise a partir do livro didático*. 2010. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2010.
- FRANCO, B. S. C.; OLIVEIRA, M. J. R. *Ensino de geometria espacial métrica: uma experiência com modelagem*. 2011. 109 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2011.
- LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- MINAS GERAIS. *Currículo Básico Comum (CBC)*. Belo Horizonte: Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. Acesso em: 30 out. 2011. Disponível em http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index2.aspx?id_objeto=23967#
- PAIS, L. C. *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
- SANTOS, R. C; BACCARIN, S. A. O. Embalagens. *Revista do Professor de Matemática*, n. 60, 2006.