

Gráfico de controle de regressão funcional para monitorar e controlar a qualidade de eletrodos de carbono

Marcello Neiva de Mello^{1†}, Edson Marcos Leal Soares Ramos², Silvia dos Santos Almeida², Adrilayne dos Reis Araújo²

¹Universidade Rural da Amazônia

²Universidade Federal do Pará

Resumo: Este trabalho tem como objetivo monitorar e avaliar características da qualidade de eletrodos de carbono utilizados no processo de obtenção do alumínio via eletrólise. Os valores das características da qualidade dos eletrodos de carbono, denominadas resistividade elétrica e resistência a flexão, estão sujeitos ao erro associado à falta de calibração do aparelho ou do procedimento de medição, sendo então necessária a utilização de um procedimento que levasse em consideração estes tipos de erros. Portanto, as técnicas estatísticas: controle estatístico da qualidade e análise de regressão foram aplicadas às características da qualidade dos eletrodos de carbono. Assim, após a validação, a partir da análise de resíduos, do modelo de regressão para resistividade elétrica em função da resistência a flexão, construiu-se o gráfico de controle de regressão funcional. Durante o procedimento de monitoração e avaliação das características da qualidade de eletrodos de carbono, a análise gráfica mostrou que todos os pontos amostrais das características da qualidade encontram-se entre os limites de controle, isto é, os eletrodos produzidos apresentam-se dentro dos padrões exigidos pelo processo de produção de alumínio. Além disso, neste trabalho detalhes da análise são apresentados, como por exemplo, pontos amostrais acima ou abaixo dos limites de controle (superior e inferior) indicam a ocorrência de problemas graves no processo de produção de alumínio, ocasionando perdas na produção e consequentemente prejuízo financeiro.

Palavras-chave: Controle de qualidade, eletrodos de carbono, gráficos de controle.

Abstract: The objective of this paper is monitor and evaluate carbon Electrodes characteristics used in aluminum process via electrolysis. The values of the characteristics of the carbon electrodes called electrical resistivity and resistance to bending, are subject to the associated error to lack of calibration apparatus or measurement procedure, and then needed to use procedure take into account These errors. So, statistical techniques: Statistical Quality Control and Regression Analysis were applied to characteristics of carbon electrodes. After validation, the error analysis, Regression model paragraph electrical resistivity function of resistance to bending, was built functional regression control chart. For monitoring and evaluation of the characteristics of quality carbon electrodes, a graphical analysis showed that all sampling points of characteristics are between the control limits, that is, electrodes produced are presented within the patterns hair required aluminum production process. In Addition analysis details shown, for example, sampling points above or below the control limits (upper and lower) indicate an occurrence of problems in aluminum production process, caused production losses and consequently loss financial.

Keywords: Quality control, carbon electrodes, control charts.

Introdução

A constante busca por processos de melhoria de produtos e serviços de modo a atender as necessidades dos clientes e às expectativas dos investidores faz com que a qualidade destes seja vista como um fator fundamental para garantir a competitividade dentro da dinâmica dos mercados, reduzindo desperdícios e utilizando a capacidade total dos recursos. Logo, a melhoria contínua e o aperfeiçoamento dos processos são utilizados visando estabelecer um relacionamento de confiança e credibilidade com todas as partes interessadas, ou seja, consumidores, fornecedores, investidores, sociedade e meio ambiente.

Um dos métodos que vem sendo, nos últimos tempos, bastante explorado pelo setor industrial é o controle estatístico da qualidade (CEQ). Seu início, deu-se a partir da necessidade de redução da

† Autor correspondente: neivamarcello@gmail.com

variabilidade nos processos. O pioneiro neste processo foi Walter A. Shewhart, que em 1924 desenvolveu o conceito de gráfico de controle. Apesar do início dentro das indústrias, o CEQ rapidamente foi difundido nas diversas áreas do conhecimento humano. O aprimoramento contínuo da técnica proporcionou o surgimento de diversas ferramentas e análise e investigação da qualidade.

Almeida (2003), a partir da combinação das técnicas estatísticas de análise de regressão com erro nas variáveis, mais especificamente de análise de regressão funcional, combinada com a metodologia de gráficos de controle, desenvolveu uma ferramenta denominada gráfico de controle de regressão funcional. Porém, devido ao seu recente surgimento, o gráfico de controle de regressão funcional é pouco conhecido e, conseqüentemente, existem raras aplicações deste na literatura especializada. Neste sentido, este trabalho visa monitorar e avaliar características da qualidade de eletrodos de carbono utilizados no processo de obtenção do alumínio via eletrólise, mostrando os benefícios da utilização deste procedimento que leva em consideração o erro de medição, proporcionando a identificação rápida de alterações no padrão do processo produtivo para redução de perdas e prejuízos financeiros.

Metodologia

Desde sua introdução por Shewhart, os gráficos de controle têm sido a ferramenta do controle estatístico da qualidade mais utilizada para monitorar e manter o controle estatístico dos processos. Gráficos de controle são aplicados para distinguir num processo as variações que não podem ser economicamente identificadas e corrigidas (causas aleatórias), daquelas que podem ser (causas assinaláveis). Carvalho Jr. *et al.* (2007) comenta que antecipar-se a diversas ocorrências que por ventura venham a ocasionar alterações em um processo, induzindo-o a uma estabilidade no sistema avaliado é de fundamental importância, sendo necessário prever estes acontecimentos que certamente aumentam os custos de produção.

Para Montgomery (2004) o gráfico de controle é uma técnica para monitoramento do processo de produção, no qual se identifica quando esse processo deve ser investigado, mais precisamente se o processo é capaz de operar com pequena variabilidade em torno da característica de qualidade do produto. Ramos (2003) completa, citando que gráficos de controle são úteis para identificar se a variabilidade do processo é ocasionada por causas comuns, sendo de pequena importância ou causas especiais, sendo de grande importância e necessitando de investigação para permanência no processo.

Para Ramos *et al.* (2005), o gráfico de controle consiste em linha central (LC), que reflete o valor médio da característica da qualidade que corresponde ao processo sob controle estatístico. Seu valor pode ser definido por lei, um padrão ou até mesmo um valor baseado em experiências anteriores do processo e duas outras linhas horizontais denominadas de Limite Superior de Controle (LSC) e Limite Inferior de Controle (LIC). Estas linhas têm o propósito de decidir se o processo está sob controle estatístico ou se há ocorrência de distúrbios. O processo só apresenta controle estatístico quando os pontos estão situados dentro dos limites (superior e inferior) de controle e as causas de fatores especiais, são eliminadas. Os gráficos de controle podem ser usados também para estimar os parâmetros de um processo de produção, determinando assim, a capacidade do processo.

Souza *et al.* (2007) destacam ainda que o gráfico de controle do tipo Shewhart é ineficiente para detectar pequenas alterações na média do processo, o que motiva o desenvolvimento de outros gráficos mais sensíveis e eficientes.

Modelo com Erro nas Variáveis

Na prática, apesar dos constantes avanços tecnológicos estarem tornando cada vez mais precisos os procedimentos de mensuração, não é realista supor que a variável X seja medida sem nenhum erro (ALMEIDA, 1999). O mais comum é não se ter acesso aos seus verdadeiros valores, mensurados durante o processo de amostragem. Neiva (2002) cita ainda que, na prática, não existe medição perfeita, pois toda medição apresenta um erro, não sendo possível eliminá-lo completamente. Neste caso, têm-se os chamados Modelos com Erros nas Variáveis (MEV), que alguns autores preferem utilizar somente a nomenclatura: Modelo Funcional (quando X é considerado fixo), Modelo Estrutural (quando X é uma variável aleatória)

e Modelo Ultraestrutural (uma combinação dos dois modelos, dependendo da forma de apresentação da variável X).

Almeida (2003) define o modelo Funcional quando os U_i 's são constantes, já o modelo Estrutural considera que os U_i 's são variáveis aleatórias e o modelo Ultraestrutural é uma generalização dos modelos Funcional e Estrutural. Os modelos com erros nas variáveis são uma generalização dos modelos de regressão. Um modelo de regressão com erro nas variáveis pode ser representado por

$$y_i = \alpha + \beta U_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

onde α e β são parâmetros desconhecidos. Porém, nem y e nem U são observados diretamente, de modo que os valores observados são X_i e Y_i , onde

$$Y_i = y_i + \varepsilon_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

e

$$X_i = U_i + \delta_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

sendo os ε_i 's e δ_i 's, $i = 1, \dots, n$, conhecidos como erros de observação, e considerados mutuamente independentes e identicamente distribuídos com média zero e variâncias finitas σ_ε^2 e σ_δ^2 , respectivamente. Pode-se ainda, reescrever o modelo com erro nas variáveis por

$$y_i = \alpha + \beta U_i + \varepsilon_i, \quad (4)$$

em que $U_i = X_i - \delta_i$, $i = 1, \dots, n$.

Modelo de Regressão Funcional

Fuller (1987) mostra que o modelo funcional admite os U_i 's, parâmetros incidentais, como constantes, assim eles crescem junto com o tamanho da amostra. Os demais parâmetros da amostra são denominados de estruturais. Admiti-se $n+4$ parâmetros ao todo neste modelo, sendo eles α , β , σ_ε^2 , σ_δ^2 e U_i , com $i = 1, \dots, n$.

Considerando a suposição adicional de normalidade, o logaritmo (l) da correspondente função de verossimilhança e utilizando a notação de Kendall e Stuart (1979) tem-se,

$$-\frac{2}{n}l = \log \sigma_\delta^2 + \log \sigma_\varepsilon^2 + \frac{S_1}{\sigma_\delta^2} + \frac{S_2}{\sigma_\varepsilon^2},$$

onde $S_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - U_i)^2$ e $S_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - (\alpha + \beta U_i))^2$.

Solari (1969) diz que a estimação por verossimilhança só é possível se forem feitas suposições adicionais aos parâmetros. As suposições mais comuns adotadas para contornar o problema de estimação no modelo funcional são: (i) σ_ε^2 ou σ_δ^2 conhecido; (ii) σ_ε^2 e σ_δ^2 conhecidos; (iii) a razão $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\delta^2}$ conhecida ou (iv) o α conhecido.

Gráfico de Controle de Regressão Funcional

O gráfico de controle de regressão funcional consiste na combinação de duas técnicas estatísticas, o modelo de regressão funcional e gráfico de controle de regressão. O gráfico de controle de regressão proposto por DiPaola (1945), consiste em monitorar duas variáveis simultaneamente, no qual a característica de qualidade dependente (Y) é representada por uma reta inclinada, obtida a partir do processo de

modelagem de regressão funcional e os limites de controle paralelos a essa reta, também em função do modelo de regressão funcional.

Passos Para Construção do Gráfico de Controle de Regressão Funcional

Sejam X e Y variáveis passíveis a erros de medição, logo o modelo de regressão funcional teórico é dado por

$$Y_i = \alpha + \beta U_i + \varepsilon_i, \quad (5)$$

onde $U_i = X_i - \delta_i$ e $i = 1, \dots, n$. Os erros ε_i e δ_i seguem distribuição normal com médias zero e variâncias constantes σ_ε^2 e σ_δ^2 , respectivamente. Os parâmetros α , β e U_i são estimados a partir do método dos mínimos quadrados, por

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx} - \sigma_\delta^2}, \quad (6)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \quad (7)$$

e

$$\hat{U}_i = \frac{\sigma_\delta^2 \beta (Y_i - \hat{\alpha}) + \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\hat{\beta} \sigma_\delta^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2}, \quad (8)$$

onde, $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$; $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$; $S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$; $S_{xx} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$;

$$S_{yy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = S_{yy} - \hat{\beta} S_{xy}.$$

Então, os LSC, LIC e LC são obtidos, respectivamente, por

$$LSC = \hat{Y}_i + k\hat{\sigma},$$

$$LIC = \hat{Y}_i - k\hat{\sigma}$$

e

$$LC = \hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{U}_i,$$

onde a estimativa de σ é obtida por $\hat{\sigma} = \hat{EP}(Y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - (X_i - \bar{X})\hat{\beta})^2}{n-2}}$ e k é uma constante

responsável pela amplitude dos limites de controle e é fixada pelo pesquisador.

Em geral, fixam-se os valores de k em 1; 2 ou 3, estes valores estão associadas aos quantis da distribuição Normal (MONTGOMERY, 2004). Logo, se $k = 1$, espera-se que pelo menos 68,25% das amostras estejam entre os limites de controle e caso todos os pontos estejam dentro dos limites, o processo indicará pequena variabilidade e será considerado sob controle estatístico. Para $k = 2$, os limites serão um pouco mais largos, diminuindo o risco de alarmes falsos (ou erro tipo I) e espera-se que pelo menos 95,00% das amostras estejam entre os limites de controle, com a variabilidade um pouco maior e se o valor adotado da constante é $k = 3$ aumentará abertura dos limites de controle e espera-se que pelo menos 99,73% das

amostras estejam entre os limites de controle, isto é, apenas 0,27% de não conformidades são esperadas, ou seja, 27 unidades entre 10.000 devem apresentar alguma não conformidade.

Eletrodos de Carbono

O Eletrodo de Anodo ou Eletrodo de Carbono é matéria prima essencial no processo de obtenção do alumínio líquido em indústrias metalúrgicas. Este eletrodo é constituído basicamente de coque e piche, produtos oriundos do petróleo e carvão mineral, respectivamente. Para a obtenção do alumínio, na sua forma mais pura, os eletrodos de anodo são dispostos em fornos, denominados de cuba eletrolítica, os quais são sustentados em hastes de ferro, onde ficam em contato com um banho eletrolítico contendo criolita (Na_3AlF_6) e sais fundidos de fluoreto no qual encontra-se dissolvida a alumina (Al_2O_3).

Durante o processo de obtenção do alumínio, a partir da Eletrólise (fenômeno não espontâneo que, a partir do uso de corrente elétrica, gera-se calor e dissocia-se a molécula) da alumina, que libera o alumínio do oxigênio, o alumínio liberado vai para o fundo da cuba eletrolítica e o oxigênio reage com o carbono do eletrodo formando gases CO e CO_2 , consumindo desta forma os eletrodos de carbono. Assim, se houver uma passagem deficiente de corrente, o eletrodo não será consumido, pois não haverá a separação das moléculas de alumínio e oxigênio, logo o processo se mostra deficiente, pois não se está produzindo adequadamente o alumínio. Neste sentido, o monitoramento de variáveis (características da qualidade) ligadas ao Bloco de Eletrodo se mostra extremamente importante para o controle da produção, sendo neste estudo são utilizadas as características da qualidade denominadas: resistividade elétrica, que é uma medida da oposição de um material ao fluxo de corrente elétrica e resistência à flexão que visa determinar qual a tensão que provoca a ruptura do material, quando submetido a esforços.

Resultados

Nesta pesquisa foram monitoradas e avaliadas as características da qualidade denominadas resistividade elétrica (Y) e resistência à flexão (X), do eletrodo de carbono, resultantes de 79 amostras, obtidas a partir de medições, que podem ser passíveis ao erro, quer por falta de calibração ou por manuseio errôneo do técnico. A partir de uma análise preliminar pode-se verificar a ocorrência de 3 valores discrepantes, ou seja, muito diferentes na amostra. Uma análise mais cuidadosa nessas 3 amostras evidenciou a presença de rachaduras em seus interiores. Assim, estas 3 amostras foram retiradas para não influenciar negativamente no processo de modelagem das variáveis em estudo.

A aparente relação linear entre as variáveis está representada no diagrama de dispersão, como mostra a Figura 1. A partir do coeficiente de correlação de Pearson, pode-se verificar e quantificar esta correlação, a qual apresentou -0,72, ou seja, uma moderada correlação negativa, isto é, quando a resistência à flexão aumenta, a resistividade tende a diminuir e vice-versa.

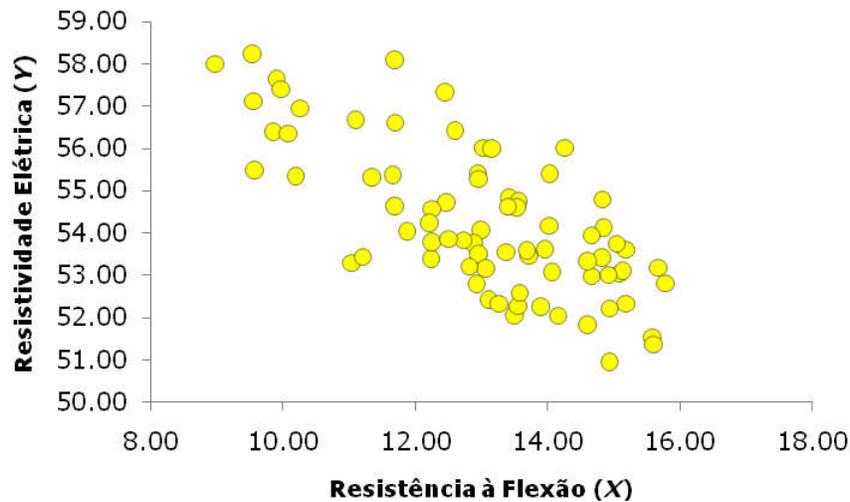


Figura 1. Diagrama de Dispersão das Características da Qualidade Resistividade Elétrica *versus* Resistência à Flexão, no Mês de Fevereiro de 2009.

Como a variável resistência à flexão (X) é oriunda de processos de medição, logo passível a erros de medidas, aplica-se o modelo de regressão funcional, dado em (5). Admiti-se, a partir do teste de aderência proposto por Ryan e Joiner (1976), que a variável Y segue distribuição Normal. E, a partir dos estimadores dados pelas Equações (6) e (7), pode-se construir o modelo para estimar o valor da resistividade elétrica (\hat{Y}) a partir da resistência à flexão (X_i), portanto o modelo obtido é expresso por

$$\hat{Y}_i = 82,98 - 2,207\hat{U}_i, \quad (9)$$

onde U_i é obtido pela Equação (8).

Para a utilização deste modelo é necessário inicialmente validá-lo. Esta validação é possível a partir da análise dos resíduos (BUSSAB, 1988), na qual verifica-se as suposições de normalidade, independência e variância constante dos resíduos, a partir do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov (LILLIEFORE, 1967), pode-se verificar que os resíduos seguem distribuição Normal, no qual obteve-se um *p-Value* de 0,058, que é maior do que o nível de significância já estabelecido de 5%. Pode-se constatar, pelo diagnóstico, a independência e a homocedasticidade (variância constante) dos resíduos, no qual não se observa comportamentos atípicos.

Atendido os pressupostos necessários a modelagem via Análise de Regressão, o modelo estimado é considerado adequado para prever novos valores da variável resistividade elétrica em função da variável resistência à flexão.

Fixa-se a variância (σ_0^2) relacionada ao erro, contido na variável resistência à flexão, como 2, pois este valor é proveniente do conhecimento obtido pelos responsáveis de processos passados na empresa fornecedora dos dados e k é fixado no valor de 1,5. Deste modo, é possível a construção do gráfico de controle de regressão funcional onde a linha central e os limites de controle são obtidos por:

$$LC = \hat{Y}_i = 82,98 - 2,207U,$$

$$LSC = \hat{Y}_i + 1,5 \times 2,84$$

e

$$LIC = \hat{Y}_i - 1,5 \times 2,84,$$

A Figura 2 apresenta o gráfico de controle de regressão funcional para as variáveis: resistividade elétrica e resistência à flexão do eletrodo de carbono, no mês de fevereiro de 2009, com $k = 1,5$. Nela, observa-se que todos os pontos encontram-se dentro dos limites de controle, isto implica que o processo está sob controle estatístico, com limites de controle estreitos e apresentando baixa variabilidade.

Após ter sido constatado que o processo apresenta controle estatístico, passa-se à fase do monitoramento de amostras, se um ponto amostral estiver entre os limites de controle o processo apresenta controle estatístico, caso um ponto amostral ultrapasse tais limites de controle, o processo deve ser investigado. Na prática, para o processo produtivo de alumínio, caso um ponto amostral ultrapasse o limite superior de controle, o valor da resistividade elétrica estará alto, logo dificultará a passagem de corrente elétrica não havendo o aumento da temperatura dos fornos, e conseqüentemente, o processo não estará produzindo alumínio, causando prejuízos a empresa. Se um ponto amostral ficar abaixo do limite inferior de controle, o valor da resistividade elétrica estará baixo, havendo o aumento na passagem de corrente elétrica pelo eletrodo de carbono, que propicia o aumento na geração de calor, ocasionando aumento do consumo do eletrodo, pois este acaba reagindo mais facilmente com o oxigênio do ar, e conseqüentemente, poderá ocasionar contaminação do alumínio, pelo consumo dos pinos de ferro que sustentam o eletrodo.

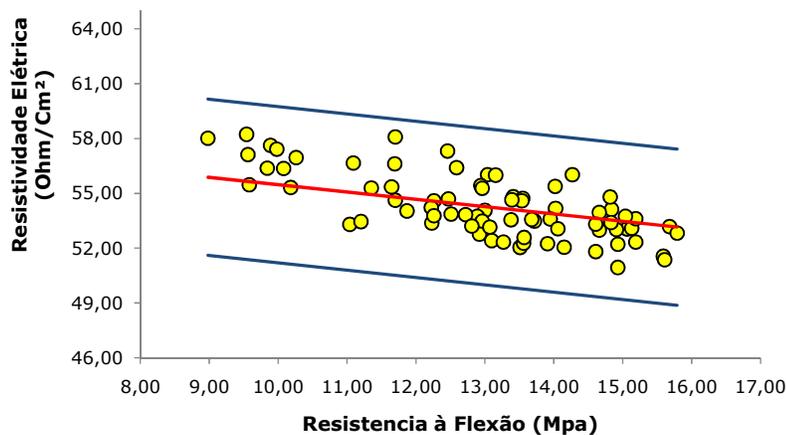


Figura 2: Gráfico de Controle de Regressão Funcional das Características da Qualidade Resistência Elétrica e Resistividade à Flexão, com $\sigma_{\delta}^2 = 2$ Mpa, do Eletrodo de Carbono, no Mês de Fevereiro de 2009, com $k = 1,5$.

Considerações Finais

O presente trabalho visou monitorar e avaliar características da qualidade de eletrodos de carbono, a partir do gráfico de controle de regressão funcional. Este se mostrou adequado, pois leva em consideração o comportamento das duas variáveis, simultaneamente, além do erro associado à variável resistência à flexão. O gráfico mostrou que os pontos estavam todos dentro dos limites de controle, indicando que o processo apresentou controle estatístico.

Referências

- ALMEIDA, S. S. Calibração Absoluta Funcional Sem a Suposição de Normalidade. 1999. 77f. Dissertação (Mestrado em Estatística), Programa de Pós-Graduação em Estatística, UFPE, Recife, PE, Brasil.
- ALMEIDA, S. S. Desenvolvimento de Gráficos de Controle Aplicados ao Modelo Funcional de Regressão. 2003. 166f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, SC Brasil.
- BUSSAB, W. O. *Análise de Variância e Regressão: Uma Introdução*. São Paulo: Atual, 1988. 147 p.
- CARVALHO Jr., J. G.; ALMEIDA, S. S.; RAMOS, E. M. L. S. Gráfico de Controle de Regressão Estrutural. *Tendências em Matemática e Estatística - TEMA*, v. 8, p. 361-370, 2007.
- DIPAOLA, P. P. Use of Correlation in Quality Control. *Industrial Quality Control*, v. 2, n. 1, p. 10-14, July 1945.
- FULLER, W. A. *Measurement Error Models*, New York: John Wiley, 1987.
- KENDALL, M. G. e STUART, A. *The Advanced Theory of Statistics*, v. 1, 2.ed., London: GRIFFIN, 1979.
- LILLIEFORE, H. W. On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown, *Journal of the American Statistical Association*, n. 62, p. 399-402, 1967.
- MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade*, Rio de Janeiro: LTC, 2004. 502 p.
- NEIVA, F. M. Conceção do Módulo de Melhoria da Confiabilidade Metrológica, Inserido no Âmbito de Serviços e Assessoramento Remoto. 2002. 99f. Dissertação (Mestrado em Metrologia), Programa de Pós-Graduação em Metrologia Científica e Industrial, UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.
- RAMOS, E. M. L. S. Aperfeiçoamento e Desenvolvimento de Ferramentas do Controle Estatístico da Qualidade – Utilizando Quartis para Estimar o Desvio Padrão. 2003. 130 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.
- RAMOS, E. M. L. S., ALMEIDA, S.S., KONRATH, A.C., RIBEIRO, J. C., MARTINS, F. Curvas características de operação para o gráfico de controle da média - utilizando um estimador baseado nos quartis para estimar o desvio padrão. *Tecno-Lógica*, v. 9, p. 41-53, 2005.
- RYAN, T. A. Jr.; JOINER, B. L. Normal Probability Plots and Tests for Normality, *Technical Report*, The Pennsylvania State University: Statistics Department, 1976.

SOLARI, M. E. The maximum likelihood solution to the problem of estimating a linear functional relationship, *Journal Royal Statistical Society*, B, v.31, p. 372-375, 1969.

SOUZA, G. P., DOMINGOS, M. FILHO, SAMOHYL, R. W. Aplicação dos Conceitos de Controle Estatístico de Processos (CEP) em uma indústria de Fundação do Norte Catarinense. *Revista Produção on line*, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 64-84, agosto 2007.