

Matemática Dinâmica para compreender a função exponencial

Taís Aparecida Faria^{1†}, José Carlos de Souza Júnior², Andréa Cardoso²

¹ *Graduanda em Matemática Licenciatura, Universidade Federal de Alfenas.*

² *Professor associado no Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas.*

Resumo: *O estudo da função exponencial, como um tipo particular de função real, é recomendado para o Ensino Médio brasileiro. A importância desse conteúdo estruturante deve-se a sua aplicação como modelo para fenômenos de crescimento. Porém, na prática escolar, a função exponencial tem sido tratada superficialmente, sem ênfase às diferentes representações, conceitos associados e aplicação aos problemas reais. A utilização de programas de Matemática Dinâmica (MD) para a construção do conceito de função exponencial possibilita compreender o comportamento gráfico, os intervalos de variação, os interceptos e os extremos dessa função. A MD também permite estabelecer a relação entre os coeficientes da representação algébrica da função e as características da curva geométrica que a representa. Frente ao problema foi desenvolvido um curso voltado para a formação inicial e continuada de professores de Matemática. O curso teve como objetivo utilizar as potencialidades do GeoGebra para o estudo da função exponencial, oportunizando a demonstração de propriedades da operação de potenciação, a extensão desta aos números reais e a reconstrução do conceito geral de função como variação de grandezas, conhecimentos que talvez não tenham sido consolidados na trajetória escolar dos professores. O objetivo deste trabalho é discutir os resultados do curso realizado junto a 20 licenciandos em Matemática e 3 professores atuantes em escolas públicas de Alfenas-MG. Assim, como resultado da análise qualitativa dos dados, constatou-se a eficácia da MD como recurso educacional inserido na metodologia investigativa das representações em Matemática junto aos professores em formação.*

Palavras-chave: Formação de professores; informática educativa; GeoGebra.

Abstract: *The study of the exponential function, such as a particular type of real function, is recommended for the Brazilian high school. The importance of this structuring content is due to its application as a model for growth phenomena. But, in school practice, the exponential function has been treated superficially, without emphasis on the different representations, associated concepts and application to real problems. The use of Dynamic Mathematics softwareos to construct the concept of exponential function enables comprehend the graphical behavior, the range of variation, the intercepts and the extremes of this function. The Dynamic Mathematics also allows to establish the relation between coefficients of algebraic representation of a function and the features of the geometric curve represented by it. Motivated by this problem, we developed a mathematics teacher training course. The course aimed to use the capabilities of GeoGebra for exponential function study, providing opportunities to demonstrate properties of the potentiation operation, the extension of this to the real numbers and the reconstruction of general function concept associated to a rate of change, knowledges that maybe not have been consolidated in the teacher's school path. This paper aims to discuss the course results realized with the participation of 20 undergraduates in mathematics and 3 public schools teachers in Alfenas-MG city. Thus, as a result of qualitative analysis, it was found the effectiveness of Dynamic Mathematics as educational resource in the investigative methodology of representations in mathematics along training teachers.*

Keywords: Teacher training; educational computing; GeoGebra.

[†] Autor correspondente: taisfariat@gmail.com.

Introdução

O tema funções é destacado nos documentos que orientam a Educação Básica brasileira como importante, não somente intrínseco à própria Matemática, como também por suas aplicações. Dentre os tipos especiais de funções reais, destaca-se a função exponencial como modelo de fenômenos de crescimento. Recomenda-se para o estudo de função no Ensino Médio que se explore diversas aplicações e diferentes formas de representação, e não somente o uso de tabelas com poucos dados para traçar gráficos.

Chaves e Carvalho (2004) destacam os aspectos históricos do conceito de funcionalidade, nas civilizações primitivas com o princípio da contagem, associando partes do corpo, ou objetos com quantidades. Contrariamente, o professor preocupa-se com a repetição de técnicas para fixação de conteúdos pelos estudantes e não em explorar a ideia intuitiva de função para relacioná-la a situações práticas.

Entretanto, o trabalho com resolução de problemas, investigação e modelagem matemática requer, muitas vezes, extenso esforço computacional na coleta, registro e análise de dados. Dessa forma, é importante ressaltar o uso das novas tecnologias para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Essa ideia é reforçada por Fraiha-Martins e Gonçalves (2012), enfatizando que a utilização de softwares educativos, pode conduzir o processo de construção dos conceitos e deve ser realizado com o uso de tarefas que instiguem os estudantes. Porém, ainda é pouco o uso de softwares educativos em ambientes escolares.

Assim, o objetivo desse trabalho é discutir os resultados do curso de extensão que visou capacitar professores de matemática para o uso da tecnologia no ensino de função exponencial, realizado junto a 20 licenciandos e 3 professores atuantes em escolas públicas de Alfenas-MG, bolsistas do subprojeto Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG).

Ensino da Função Exponencial

Após o desenvolvimento do cálculo de potências com expoentes reais, Leibniz considerou, em 1679, uma potência como função do expoente da forma $y = a^x$ com $x \in \mathbb{R}$. Iezzi, Dolce e Murakami (2004) apresentam a caracterização da função exponencial a partir da equivalência das seguintes afirmações, em relação a uma função real de variável real, monótona e injetiva:

- A1. $f(nx) = (f(x))^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}$.
- A2. $f(x) = a^x$, com $f(1) = a$ e $x \in \mathbb{R}$.
- A3. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

O saber de referência, aqui entendido como a conceituação e a construção da teoria matemática para a caracterização da função exponencial, sofre sucessivas transformações, de acordo com a Transposição Didática, para se transformarem nos saberes escolares, primeiro nas propostas curriculares, depois nos livros didáticos e por fim na sala de aula, como saber ensinado (ALMOULOU, 2011).

As Orientações Curriculares Nacionais (BRASIL, 2006) indicam o estudo de alguns tipos particulares de funções reais, após o primeiro contato com o conceito de função como relação de dependência e variação de grandezas. Há a recomendação de trabalhar funções de forma conceitual, ampliada e significativa, e, ao mesmo tempo estabelecer constante articulação entre as funções, suas diferentes formas e seus elementos.

Dentre as funções reais recomendadas para estudo no Ensino Médio, a função exponencial está presente nas propostas curriculares de grande parte dos estados da Federação, dentre eles, nos Conteúdos Básicos Comuns (MINAS GERAIS, 2007), na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008) e também nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (PARANÁ, 2008). O tema Álgebra e Funções, da matriz de referência do Sistema Nacional de

Avaliação da Educação Básica (SAEB), contempla a função exponencial e atribui ao seu estudo o desenvolvimento de duas habilidades específicas: identificar a representação gráfica e algébrica e aplicá-la na resolução de problemas.

Entretanto, pesquisas sobre currículos prescritos de Matemática evidenciam que embora estes possam expressar propostas interessantes e inovadoras, parecem ter dificuldades de serem incorporadas a prática dos professores em sala de aula (PIRES, 2013).

Em geral, os livros didáticos definem a função exponencial simplesmente a partir da afirmação A2. Dado um número real a , $a > 0$ e $a \neq 1$, denomina-se *função exponencial* de base a uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ (DANTE, 2010). Os autores ainda explicitam que as restrições necessárias são dadas pelas condições de existência. Para $a = 0$ e $x < 0$, a função não está definida em \mathbb{R} . E para $a = 1$ tem-se a função constante.

Observa-se também a falta da devida atenção à família de transformações da função exponencial, geometricamente representando translações, reflexões, compressão ou expansão do gráfico no plano cartesiano. A composição destas transformações geométricas podem ser representadas algebricamente por funções da forma

$$f(x) = ka^{bx+c} + d, \text{ sendo } k, b, c \text{ e } d \text{ constantes reais,}$$

usualmente denominadas funções do tipo exponencial.

Funções do tipo exponencial não satisfazem a caracterização da função exponencial, porém mantém estreitas ligações geométrica e algébrica com a mesma. Como modelam fenômenos de crescimento aparecem em exercícios resolvidos e propostos e também nas aplicações presentes nos livros didáticos.

Para que o estudante do Ensino Médio compreenda e resolva problemas envolvendo a função exponencial, é preciso que domine técnicas e propriedades da operação de potenciação no conjunto dos números reais, visto que as propriedades da função exponencial derivam diretamente destas.

Porém, Paias (2009) identifica as dificuldades dos estudantes das séries finais do Ensino Fundamental em relação a potenciação. Assim, a revisão feita no Ensino Médio, de conteúdos do Ensino Fundamental relativa à potenciação, é, não raro, a primeira vez que o estudante trabalha com expoentes não-inteiros, sendo necessária a extensão do conceito de potenciação para expoentes fracionários e irracionais.

Por outro lado, Siqueira e Beust (2008) referem-se à dificuldade inicial com o conceito de função, por si só complexo para os estudantes. As dificuldades devem-se à variação de grandezas, diferentemente das equações já conhecidas, e identificação de conjuntos numéricos como domínio, contradomínio e imagem das funções.

Benedetti (2003) aborda as potencialidades de programas gráficos para o aprendizado de funções. O recurso tecnológico permite uma melhor e mais fácil consolidação do conceito de função em comparação com a abordagem clássica (GOMEZ, 1997). De acordo com a pesquisa realizada por Basso e Notare (2015), há significativo aumento do número de publicações científicas que analisam as potencialidades dos recursos computacionais na construção do conhecimento matemático. Os autores analisam atividades exploratórias em que um Programa de Matemática Dinâmica objetiva a mobilização do pensamento matemático, por permitir facilmente a criação de múltiplas representações e ações sobre elas.

A utilização de programas de Matemática Dinâmica (MD) para a construção do conceito de função exponencial possibilita a compreensão do comportamento gráfico, dos intervalos de variação, interceptos e extremos dessa função. Também permite estabelecer relação entre os coeficientes da representação algébrica da função e as características da curva geométrica que a representa.

Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor tem o dever de conhecer o conteúdo, suas aplicações, a evolução dos conceitos, os métodos e os materiais mais adequados para a efetiva aprendizagem. Porém, Leivas (2002)

critica os cursos de formação por deixar a tarefa de juntar essa “colcha de retalhos” a cargo do licenciando.

Frente ao grande desafio da formação inicial de professores, em 2007 é criado o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), portaria de número 096 (BRASIL, 2013). O programa possibilita a docência compartilhada desde o início da formação do licenciando com ações desenvolvidas na escola pública. Desta forma, contribui efetivamente para a formação inicial promovendo a Iniciação à Docência (ID) e para a formação continuada dos professores supervisores.

Nas ações desenvolvidas no âmbito do subprojeto Matemática do PIBID/UNIFAL-MG, aliam-se domínio de conteúdos específicos com práticas pedagógicas inovadoras, pautadas na resolução de problemas, investigação, modelagem matemática e atividades computacionais.

Metodologia

Como uma das ações do subprojeto Matemática do PIBID/UNIFAL-MG para a formação de professores foi desenvolvido o curso de extensão “Uso do GeoGebra para o ensino-aprendizagem de funções” junto a 20 bolsistas de ID e 3 supervisores. O curso teve como objetivo utilizar as potencialidades da MD para o estudo da função exponencial e suas propriedades.

A técnica de pesquisa utilizada neste trabalho foi a Engenharia Didática, devido à sua ampla utilização quando se trata de trabalhos em Didática da Matemática. De acordo com Pais (2001), a Engenharia Didática caracteriza uma forma particular de organização de procedimentos metodológicos, com dupla ancoragem que interliga o plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa. Desta forma, este trabalho insere-se como metodologia experimental de validação interna para analisar a situação didática desenvolvida. A Figura 1 apresenta as quatro fases da Engenharia Didática com seus objetivos específicos.

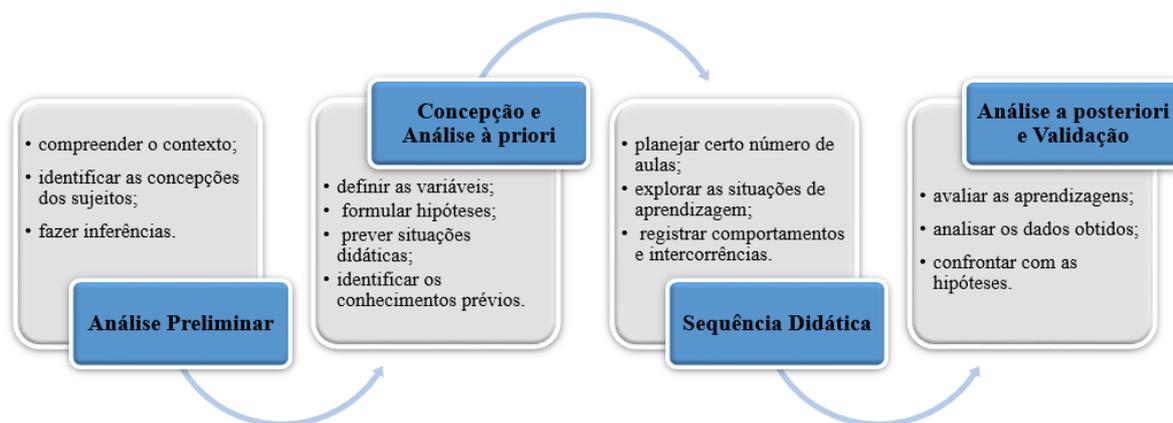


Figura 1: As fases da Engenharia Didática e objetivos específicos.

Particularmente neste trabalho, a primeira fase foi desnecessária em virtude do contexto de aplicação ser conhecido, bem como as concepções dos sujeitos que são membros do subprojeto Matemática do PIBID da UNIFAL-MG, do qual os autores também participam. Como análise a priori foi desenvolvido e aplicado o diagnóstico inicial para avaliar os conhecimentos dos sujeitos a respeito da função exponencial, suas aplicações e do uso de recursos computacionais.

Dessa forma, o planejamento do curso concretizou-se na elaboração de uma sequência didática contemplando os possíveis limites dos professores em relação à insuficiência de conhecimentos específicos retrospectivos, possível deficiência na representação gráfica e na passagem de uma forma de representação a outra, como também em relação ao uso do computador como recurso

didático. Para isso foram programados cinco encontros presenciais com objetivos específicos, listados no Quadro 1.

Quadro 1: Objetivos por encontro do curso de extensão “Uso do GeoGebra para o ensino-aprendizagem de funções”, realizado em 2015.

	Data	Objetivos específicos
1º	16/04	<ul style="list-style-type: none"> - Relatar a definição de relações binárias e de função. - Avaliar as potencialidades da MD. - Diferenciar domínio, contradomínio e imagem de funções.
2º	30/04	<ul style="list-style-type: none"> - Manipular os recursos do Sistema de Álgebra Computacional (CAS). - Analisar as propriedades de potenciação. - Investigar a extensão da potenciação para expoentes racionais e irracionais.
3º	07/05	<ul style="list-style-type: none"> - Definir função exponencial. - Reconhecer as diferentes representações da função exponencial. - Deduzir as propriedades da função exponencial a partir da potenciação. - Identificar funções tipo exponencial. - Investigar a influência da mudança dos coeficientes no gráfico da função.
4º	21/05	<ul style="list-style-type: none"> - Comparar aplicações da função exponencial. - Formular atividades didáticas com aplicações e recursos computacionais.
5º	18/06	<ul style="list-style-type: none"> - Reafirmar a importância do conhecimento específico e didático. - Discutir a relação do conhecimento científico e a Matemática escolar. - Avaliar as aprendizagens no curso. - Apreciar as potencialidades e limitações da MD na escola.

O GeoGebraⁱⁱ é um programa livre de MD, escrito em linguagem JAVA, que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. O ambiente é simples e pode ser utilizado tanto na Educação Básica quanto na Educação Superior. O GeoGebra possibilita a construção de atividades interativas para experimentação/exploração das representações gráfica, numérica e algébrica de um mesmo objeto, facilitando a compreensão dos conceitos matemáticos (KURSIARK, R. S. et al, 2012). Além disso, a construção de gráficos de funções reais é realizada de forma mais rápida e precisa, permitindo avaliar diretamente o efeito da variação de cada coeficiente graficamente.

Dessa forma foi utilizado o programa de MD GeoGebra como ferramenta para o estudo da função exponencial, oportunizando a consolidação de propriedades da operação de potenciação, a extensão da operação de potenciação para os números reais e do conceito de funções, que não tenham sido consolidadas na trajetória escolar dos professores.

A Figura 2 apresenta o esquema visual da sequência didática construída a partir do objetivo a ser alcançado para o curso, explorar as diferentes representações da função exponencial utilizando MD.

ⁱⁱDisponível em: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR

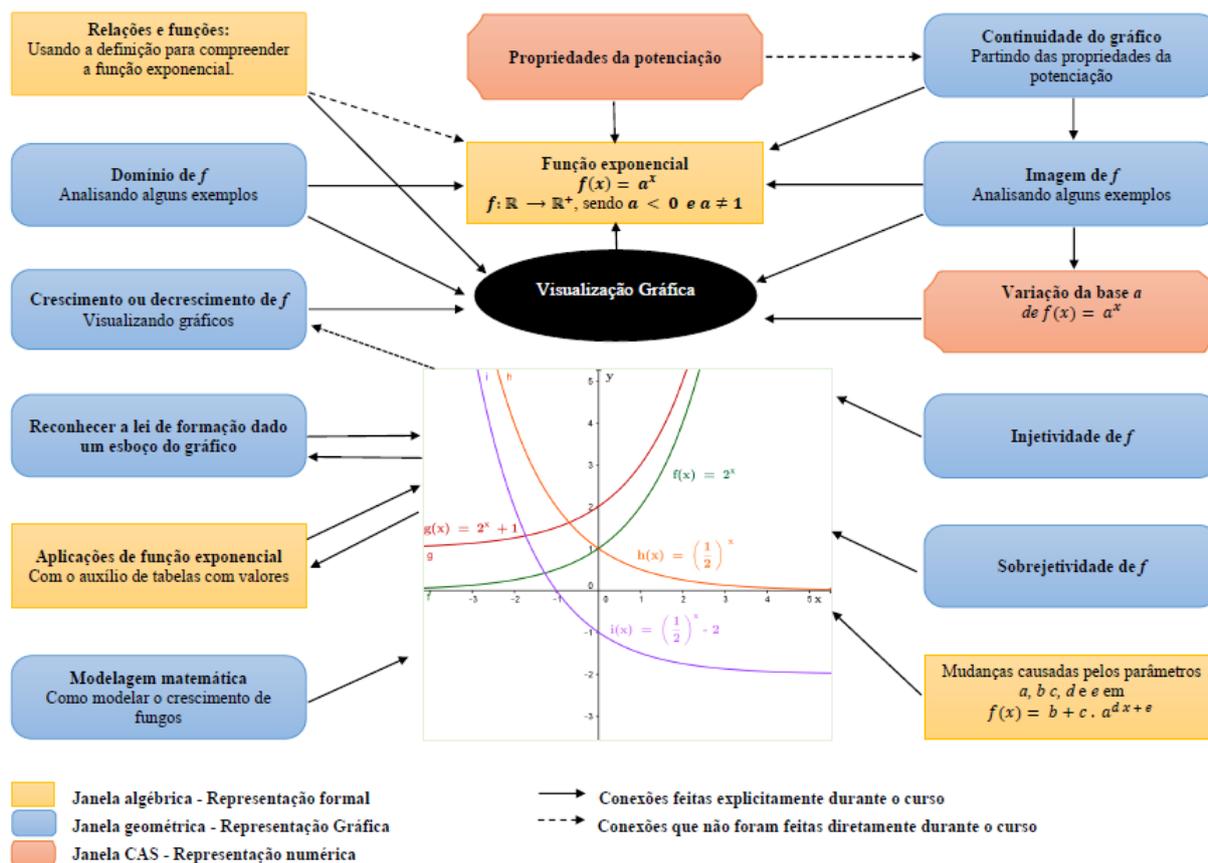


Figura 2: Representação visual da sequência didática utilizada no curso “Uso do GeoGebra para o ensino-aprendizagem de funções”

Além dos encontros presenciais foram propostas atividades adicionais. Algumas, de trabalho individual, em forma de exercícios práticos para treinamento das funções do GeoGebra e experimentação para consolidação dos conceitos matemáticos, vistos no encontro presencial. Outras atividades propostas eram questões a serem discutidas em grupo, por escola, para pensar a implementação de ações educativas de acordo com as particularidades e necessidades.

Durante a aplicação da Sequência Didática, observações sistemáticas foram registradas em relação à participação, realização das atividades, facilidades e dificuldades, tanto nos encontros presenciais como nas atividades realizadas à distância.

A última fase da análise a posteriori e validação foi contemplada com a aplicação do diagnóstico final. Este, além dos itens comparativos do diagnóstico inicial, abrangeu a avaliação do impacto do curso na formação docente, de forma a identificar potencialidades e limitações do uso do GeoGebra, e também a autoavaliação da participação nas atividades.

Resultados e discussões

A análise do diagnóstico inicial em relação aos conceitos de potenciação revelou que há limitações de conhecimentos por parte dos professores. Nele apenas 36% dos professores considera que nem todo número elevado a zero é um e destes, pouco mais da metade justificou com o caso particular 0^0 . Já no final do curso o índice de acertos subiu para 68% e a maioria justificou.

A dificuldade identificada em quase todos os professores de Matemática é discutida também por Paias (2009), que revela que estudantes do Ensino Fundamental e Médio respondem que 0^0

é zero, por associar ao zero a ideia de nada, enquanto outros convencionaam erroneamente que “todo número elevado a zero é um”, por influência de professores que repetem tal frase para memorização.

Ainda, é importante enfatizar o caráter de variabilidade das funções no ensino, para que o estudante compreenda o comportamento gráfico da função na relação entre as variáveis dependente e independente, tendo uma noção do gráfico antes mesmo de traçá-lo, para ser capaz de avaliar o impacto dos coeficientes da forma da curva.

Dentre as atividades desenvolvidas no curso de extensão destacamos três delas na Figura 3.

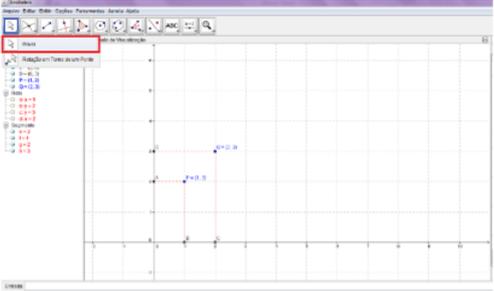
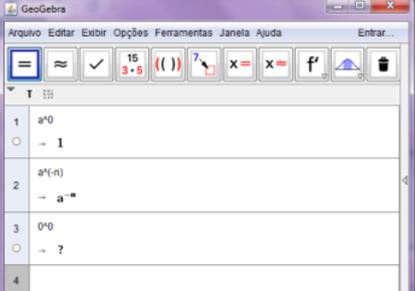
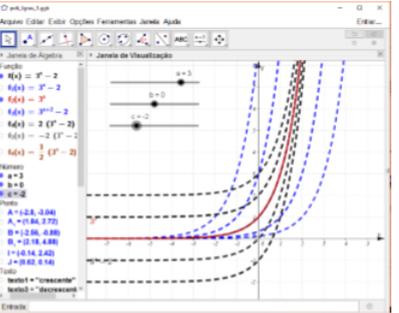
Atividade 1	Atividade 2
Objetivo: <input type="checkbox"/> Discutir a definição de função	<input type="checkbox"/> Estender potenciação para números reais
Tarefa: <input type="checkbox"/> Construir o gráfico da função discreta $f = \{(1,2); (2,4)\}$	<input type="checkbox"/> Calcular expressões com potências de expoentes racionais e irracionais.
Discussões: <input type="checkbox"/> Gráfico, domínio, contradomínio e imagem.	<input type="checkbox"/> Potências com expoentes reais, valor de 0^0 e limitações do programa.
Recursos GeoGebra: <input type="checkbox"/> Janela Geométrica.	<input type="checkbox"/> Janela CAS
	
Atividade 3	
Objetivo: <input type="checkbox"/> Representar funções do tipo	
Tarefa: <input type="checkbox"/> Construir o gráfico da função $f(x) = a^{x+b} + c$	
Discussões: <input type="checkbox"/> Impacto dos coeficientes da função no gráfico.	
Recursos GeoGebra: <input type="checkbox"/> Janela Algébrica e Janela Geométrica.	
	

Figura 3: Três das atividades desenvolvidas no curso “Uso do GeoGebra para o ensino-aprendizagem de funções”

Pode-se observar que os participantes apresentaram dificuldade em traçar gráficos quando a

função está definida para os naturais, pois neste caso, o gráfico é representado apenas por pontos no plano cartesiano. Isso propiciou uma discussão sobre a densidade do conjunto dos números reais.

Inicialmente apenas oito participantes conheciam alguma aplicação da função exponencial, em contrapartida ao fim, vinte e um citaram, principalmente a modelagem de crescimento de populações. Outras aplicações citadas foram o crescimento de vendas, a análise da idade de rochas, as taxas de juros, as equações diferenciais ordinárias, o decréscimo de taxa de radiação, a queda da temperatura e também, a decomposição de um cadáver.

A análise do gráfico apresentado na Figura 4 revela que, na própria percepção do cursista, houve impacto positivo do curso no nível de conhecimento em relação ao conceito de função exponencial. Inicialmente, apenas cerca de 25% dos cursistas consideravam-se satisfeitos com seus conhecimentos, ao final o índice de satisfação subiu para quase 91%. Embora com menor impacto, o nível de conhecimento das ferramentas do GeoGebra também apresentou incremento. Antes do curso, cerca de 70% dos cursistas consideravam péssimo ou razoável seu conhecimento e, no fim do curso pouco mais de 78% afirma estar satisfeito com as habilidades desenvolvidas no uso do software. Observa-se que, alguns dos 30% dos cursistas, que já considerava bom seus conhecimentos, puderam aprender mais ferramentas e aplicá-las no contexto didático.

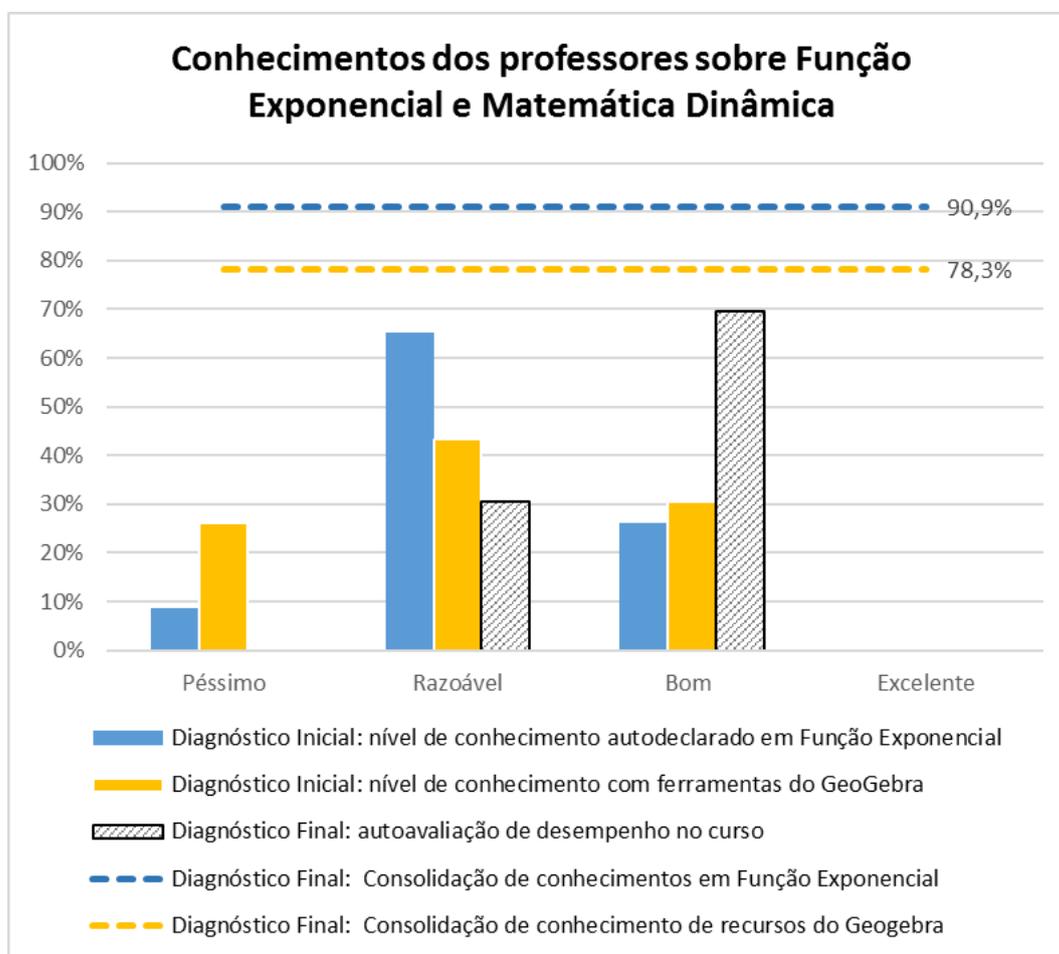


Figura 4: Resultado dos dados coletados na autoavaliação realizada nos questionários inicial e final, em relação à participação no curso de extensão e sobre o avanço no uso das ferramentas do GeoGebra e do conhecimentos sobre função exponencial.

Em relação ao uso do GeoGebra em atividades didáticas, tais como plotar pontos, utilizar o controle deslizante, esboçar gráficos, criar rastros, construir retas, encontrar intersecções, co-

nhecer a linguagem de programação utilizada, trabalhar com o ambiente CAS, exportar figuras para editores de texto. Pode-se notar que dezenove participantes afirmaram que aprenderam com a realização de algumas das atividades citadas, dois participantes afirmaram que conheciam bastante o programa, porém com o curso aprenderam a reconhecer algumas limitações e que o professor precisa estar preparado para lidar com tais situações. Apenas dois participantes disseram que já conheciam todas as potencialidades e limitações do recurso computacional utilizado.

Ao serem perguntados se utilizariam algum recurso computacional para aplicar uma intervenção todos afirmaram que sim. A principal vantagem citada foi a contribuição na visualização gráfica, pois os próprios participantes puderam manipular os valores, tornando os encontros mais investigativos, contribuindo para a construção dos conceitos e com uma melhor precisão dos resultados. Um dos licenciandos afirmou que após o projeto, ele começou a utilizar o GeoGebra para complementar o estudo das disciplinas específicas do curso.

As dificuldades citadas foram: a falta de formação dos professores, lembrada por 82% dos participantes; a falta de estrutura física; e a situação dos computadores disponíveis. Quatro participantes citaram as barreiras que o próprio sistema educacional impõe, pois ao precisarem da sala de informática devem agendar anteriormente, isso quando é possível o acesso a mesma. Na Figura 5, temos a resposta de uma participante alegando quais as dificuldades encontradas para o uso de recursos tecnológicos no Ensino Básico.

No caso do uso do GeoGebra como recurso didático no ensino, quais as condições da escola pública para isso? Qual a preparação dos professores para o uso de recursos computacionais?

A maioria dos professores não tem preparação para tal ação. O laboratório de informática das escolas (quando existem) são ainda precários, com poucos computadores funcionando. Na escola onde frequente o geogebra está instalado em todos os computadores, porém metade dos computadores funcionam.

Figura 5: Perspectiva de uma licencianda com relação ao uso de recursos tecnológicos no Ensino Básico

Considerações Finais

Com a análise pode-se notar como a MD pode ser um excelente recurso no ensino de função exponencial, pois os próprios participantes do curso, sendo licenciandos ou professores que atuavam pelo PIBID, destacaram a metodologia investigativa e a visualização gráfica.

Nota-se ainda que existem conceitos considerados básicos, tais como potenciação e função que ao serem discutidos em um primeiro momento gerou dúvidas, o que mostra que mesmo estando na Educação Superior, ou já tendo concluído a mesma, tais conceitos ainda não haviam sido consolidados.

O curso realizado como atividade do PIBID/UNIFAL-MG, contemplou uma das finalidades do subprojeto Matemática que é a de proporcionar que os licenciandos aprimorem seus conhecimentos teóricos e práticos e identifiquem relações entre os conteúdos vistos durante a formação acadêmica com a matemática vista na Educação Básica.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência (PIBID) e com o apoio da Universidade Federal de Alfnas (UNIFAL-MG).

Referências

- ALMOULOU, S. As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. *Educar em Revista*, Curitiba; Brasil: Especial. p. 191-210, 2011.
- BASSO, M; NOTARE, M, R. Pensar-com tecnologias digitais de Matemática Dinâmica. *RENOTE*. Porto Alegre: V. 13, n. 2, 10 p. 2015.
- BENEDETTI, F C. *Funções, software gráfico e coletivos pensantes*. 2003. 316 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.
- BRASIL. Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação, *Secretaria de Educação Básica*. Brasília, 2006.
- BRASIL. Portaria nº 096, de 18 de julho de 2013 - Normas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). Brasília: CAPES, 2013.
- CHAVES, M. I. de A.; CARVALHO, H. C. de. Formalização do conceito de função no ensino médio: uma sequência de ensino-aprendizagem. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, VIII,, 2004, Recife. *Anais*. Recife: SBEM, 2004, 18 p.
- FRAIHA-MARTINS, F.; GONÇALVES, T. V. O. Informática na educação matemática e científica dos anos iniciais de escolaridade: um estudo sobre as pesquisas da área de ensino de ciências e matemática. *Revista Ensaio*, v.14, n.3, p. 313-331, Belo Horizonte, set/dez 2012.
- GOMEZ, P. Tecnología y educación Matemática. *Revista Informática Educativa*, UNIANDES LIDIE, 10, p. 93-11. 1997.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2004.
- KURSIARK, R. S. et al. A Utilização do Software GeoGebra no Ensino da Geometria Plana: Uma Experiência PIBID. In: Seminário Nacional de Inclusão Digital, 3, Passo Fundo. *Anais...* Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2012, 9 p.
- MINAS GERAIS, Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. *Conteúdo Básico Comum: Matemática, Ensino Fundamental e Médio*. Belo Horizonte: SEE, 2007.
- PAIAS, A. M. *Diagnósticos dos erros sobre a Operação Potenciação aplicado a alunos do Ensino Fundamental e Médio*. 2009. 219 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.
- PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- PARANÁ, Secretaria de estado da Educação do Paraná. *Diretrizes curriculares da educação básica: Matemática*. Paraná: SEE, 2008. 82 p.
- PIRES, C. M. C. Das prescrições curriculares ao currículo praticado nas aulas de Matemática do Ensino Médio. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XI, Curitiba. *Anais...*

Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2013. 15 p. 2013. ISSN 2178-034X.

SÃO PAULO, Secretaria Da Educação do estado de São Paulo. *Proposta Curricular do estado de São Paulo: Matemática*, Ensino Fundamental, ciclo II, e Ensino Médio. São Paulo: SEE, 2008. 6 pp.

SIQUEIRA, D. A. de; BEUST, A. C. O ensino de funções através da interpretação gráfica. *Disciplinarum Scientia*, v. 9, n. 1, p. 5-66. Santa Maria, 2008.