

Avaliação de um sistema de medição via índice R&R pelo método da Análise de Variância

Eduardo C. Barbosa^{†1}; Bruno Carlos A. Pinheiro²; Sérgio Célio S. Lima³; Carlos Henrique O. Silva⁴; Moysés Nascimento⁵; Lucas C. Gonçalves⁶

¹DET-UFV: Universidade Federal de Viçosa, Viçosa-MG.

²DPP-UEMG: Universidade Estadual de Minas Gerais, Ubá-MG.

³DEP-FIC/UNIS: Faculdades Integradas de Cataguases, Cataguases-MG.

⁴DET-UFV: Universidade Federal de Viçosa, Viçosa-MG.

⁵DET-UFV: Universidade Federal de Viçosa, Viçosa-MG.

⁶CEFET-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Leopoldina-MG..

Resumo: Neste trabalho serão apresentados os resultados de um estudo sobre a análise do parâmetro R&R para avaliação de um sistema de medição de densidade após secagem de corpos-de-prova de revestimento cerâmico para piso. Apresenta-se no texto uma breve revisão sobre o que é o parâmetro R&R e também sobre sua forma de obtenção, por meio da Análise de Variâncias com efeitos aleatórios e método dos Momentos, estimando-se os componentes de variância associados ao Fator Peça, ao Fator Operador, a Repetitividade, a Reprodutibilidade e a Variação Total do sistema. Os resultados mostraram que o sistema de medição em estudo não é aceitável e precisa ser melhorado, visto que o valor estimado para o índice R&R foi superior a 30%. Os resultados também mostraram que a Repetitividade é o componente com maior influência para o desajuste do sistema. Diante disso, sugere-se que treinamentos sejam oferecidos para os operadores, visando capacitá-los para a realização de medições de forma mais correta.

Palavras-chave: Repetitividade; Reprodutibilidade; Controle de Qualidade.

Abstract: In this paper we presents the results of a study on the analysis of R&R parameter for evaluation of a measurement system density after drying the body-of-proof ceramic coating for flooring will be presented. It is presented in text, a brief review of the R&R parameter and also on how to obtain this, by analysis of variances with random effects and moments methods, estimating the variance components associated with Factor Part, Factor Operator , the Repeatability, the Reproducibility and the Total Variation of the system. The results showed that the measurement system under consideration is not acceptable and must be improved, since the estimated R&R for the index value was greater than 30%. Might also conclude that the Repeatability is the component with the greatest influence for the misfit of this system, therefore, it is suggested that training be offered to operators in order to enable them to properly carry out the measurements.

Keywords: Repeatability; Reproducibility, Quality Control.

[†] Autor correspondente: duducampana@hotmail.com.

Introdução

Um processo de medição pode sofrer a influência de vários fatores, tais como instabilidades ambientais, diferenças entre equipamentos, operadores, etc. Isso pode conduzir a uma incerteza associada aos mesmos. Nenhum sistema de medição é perfeito. Mas, a coleta de dados a partir deles é de grande importância para se controlar a qualidade e monitorar mudanças nos processos de produção. Neste sentido, a avaliação de um sistema de medição é de grande necessidade e importância para: i) aceitação de novos sistemas de medição; ii) comparação entre sistemas de medição nas condições de uso; iii) investigação de um sistema de medição sob suspeita de problema; iv) comparação do desempenho do mesmo sistema de medição antes e depois de uma ajustagem ou regulagem e; v) para avaliar os potenciais riscos de erros de classificação de peças do sistema de medição (JUNIOR ; SOUSA, 2008).

Uma forma de se avaliar um sistema de medição é por meio do estudo do parâmetro R&R (também conhecido como estudos Gage R&R), um índice utilizado para verificar a adequabilidade do mesmo (sistema de medição) e que pode ser determinado de 2 maneiras: (a) por meio do método da média e amplitude (via gráficos de controle \bar{X} e R) e (b) pelo método da Análise de Variâncias (ANOVA) com efeitos aleatórios (MONTGOMERY, 2009; RIBEIRO JUNIOR, 2012).

Este trabalho tem por objetivo avaliar um sistema de medição de densidade após secagem de corpos-de-prova de material cerâmico utilizado como revestimento para piso. A ênfase aqui é dada à análise do parâmetro R&R e à sua estimação através do método da Análise de Variâncias com efeitos aleatórios.

Referencial teórico

Em estudos do parâmetro R&R a variabilidade total (σ_{Total}^2) associada aos valores de mensuração de uma determinada característica da qualidade (Y) pode ser decomposta conforme em (1):

$$\sigma_{Total}^2 = \sigma_{Peça}^2 + \sigma_{Erro de Medição}^2 \quad (1)$$

Em que $\sigma_{Peça}^2$ é a variabilidade inerente às peças avaliadas (variabilidade natural) e $\sigma_{Erro de Medição}^2$ é a variabilidade associada aos erros de medição. Temos que $\sigma_{Erro de Medição}^2$ pode ser expresso como em (2):

$$\sigma_{Erro de Medição}^2 = \sigma_{Repetitividade}^2 + \sigma_{Reprodutibilidade}^2 \quad (2)$$

De acordo com Costa et. al (2004), a Repetitividade refere-se à variação das medidas obtidas por um único operador, por meio de medições sucessivas de uma mesma peça e utilizando o mesmo instrumento. Montgomery (2009) complementa afirmando que a Repetitividade reflete a precisão básica associada ao próprio operador (ou medidor). Já a Reprodutibilidade refere-se à variabilidade das médias das medições obtidas por diferentes operadores (seja em períodos de tempo diferentes, diferentes ambientes ou em condições diferentes) ao realizar a medição repetidas vezes com o mesmo instrumento. Por isso o índice em estudo é denominado como R&R (de Repetitividade e Reprodutibilidade).

Segundo Montgomery e Runger (1993b), em estudos do parâmetro R&R conduzidos por meio do método da Análise de Variância com efeitos aleatórios, dois fatores são avaliados: o Fator Peça e o Fator Operador. Consequentemente, é possível que o efeito da interação entre o Fator Peça e o Fator Operador também esteja presente na análise. Portanto, suponha que n peças e p operadores sejam selecionadas aleatoriamente e que cada operador mede cada peça r vezes. Logo, cada medida pode ser representada de acordo com o modelo estatístico apresentado em (3):

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (3)$$

Este é um modelo da Análise de Variâncias com efeitos aleatórios, onde os parâmetros listados em (3) representam, respectivamente, a média geral das medições, o efeito principal das peças, dos operadores,

da interação entre estes e o erro aleatório e não observável. A principal diferença do modelo em (3) para o modelo clássico da Análise de Variâncias (com efeitos fixos), é que no modelo apresentado em (3) os parâmetros são tratados como variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e que seguem uma distribuição normal (gaussiana), conforme especificado a seguir. Em outras palavras, pode-se pensar que diferentemente de um modelo com efeitos fixos, uma amostra de peças e de operadores é selecionada aleatoriamente para compor os níveis de cada fator em estudo, representando as populações de interesse (MONTGOMERY, 2009). Portanto, tem-se que:

$$\tau_i \sim Normal(0, \sigma_\tau^2)$$

$$\beta_j \sim Normal(0, \sigma_\beta^2)$$

$$\tau\beta_{ij} \sim Normal(0, \sigma_{\tau\beta}^2)$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim Normal(0, \sigma^2)$$

Neste sentido, sob as pressuposições de independência e de que as variáveis são identicamente distribuídas, aplicando a propriedade de variância em (3), temos que a variância de cada observação (y_{ijk}) pode ser obtida conforme em (4):

$$\begin{aligned} V(y_{ijk}) &= V(\mu + \tau_i + \beta_j + \tau\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}) \\ V(y_{ijk}) &= V(\mu) + V(\tau_i) + V(\beta_j) + V(\tau\beta_{ij}) + V(\varepsilon_{ijk}) \\ V(y_{ijk}) &= V(\tau_i) + V(\beta_j) + V(\tau\beta_{ij}) + V(\varepsilon_{ijk}) \\ V(y_{ijk}) &= \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Cada componente em (4) é denominado como um componente de variância e o conhecimento de suas estimativas são de fundamental importância para que a avaliação de um sistema de medição possa ser realizada, visto que, segundo Ribeiro Júnior (2012) e Montgomery (2009), em estudos do parâmetro R&R, tem-se:

$$\sigma_{Repetitividade}^2 = \sigma^2 \quad (5)$$

$$\sigma_{Reprodutividade}^2 = \sigma_\beta^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 \quad (6)$$

Apresentamos na Tabela 1 um esquema geral da Análise de Variâncias com efeitos aleatórios. Tome que P representa o Fator Peça, O o Fator Operador e P x O a interação entre o Fator Peça e o Fator Operador. Considere ainda um experimento balanceado e instalado sob o DIC (Delineamento Inteiramente Casualizado), sob as condições citadas anteriormente, em que em que n peças e p operadores são selecionadas aleatoriamente, dado que cada operador mede cada peça r vezes.

Tabela 1 – Esquema da Análise de Variância (ANOVA) com interação e efeitos aleatórios

<i>F. V</i>	<i>G. L</i>	<i>S. Q</i>	<i>Q. M</i>	<i>Teste F</i>	<i>E(QM)</i>
<i>P</i>	$(n - 1)$	<i>SQP</i>	$SQP/(n - 1)$	<i>QMP</i> <i>/QM(PxO)</i>	$\sigma^2 + r\sigma_{(PxO)}^2$ $+ pr\sigma_P^2$

<i>O</i>	$(p - 1)$	<i>SQO</i>	$SQO/(p - 1)$	<i>QMO</i> <i>/QM(PxO)</i>	$\sigma^2 + r\sigma_{(PxO)}^2$ $+ nr\sigma_o^2$
<i>PxO</i>	$(n - 1)(p - 1)$	<i>SQ(PxO)</i>	$SQ(PxO)/(n - 1)(p - 1)$	<i>QM(PxO)</i> <i>/QMR</i>	$\sigma^2 + r\sigma_{(PxO)}^2$
<i>Resíduo</i>	$np(r - 1)$	<i>SQR</i>	$SQR/np(r - 1)$		σ^2
<i>Total</i>	$npr - 1$				

Um detalhe importante é que para fatores aleatórios o valor da estatística F da Análise de Variâncias é calculado utilizando o Quadrado Médio da Interação como termo do denominador, diferentemente de como ocorre quando os fatores são fixos, em que o Quadrado Médio Residual é o termo do denominador. Tal conclusão é obtida analisando as Esperanças de Quadrados Médios. Destaca-se que se o efeito da interação não for significativo o valor da estatística F, para fatores aleatórios, é calculado igual a como ocorre para os fatores fixos, ou seja, com o Quadrado Médio Residual como termo do denominador.

Ressalta-se que a escolha do método da Análise de Variâncias, em relação ao da média e amplitude, pode ser justificada devido ao fato da ANOVA permitir tratar diversas estruturas de experimentos, estimar a variância com mais exatidão e precisão, além de possibilitar a avaliação da interação entre os fatores de interesse. No entanto, para maiores detalhes sobre o método da média e amplitude (gráficos de controle \bar{X} e R) sugerimos ao leitor o texto de Montgomery e Runger (1993a).

Após a realização da Anova, as estimativas de cada componente de variância podem ser obtidas utilizando-se o método dos momentos, que consiste em igualar a Esperança do Quadrado Médio de cada termo a seu respectivo Quadrado Médio. Com um pouco de modelagem matemática é possível encontrar os resultados de (7), (8), (9) e (10).

$$\hat{\sigma}^2 = QMR \quad (7)$$

$$\hat{\sigma}_{(PxO)}^2 = \frac{QM(PxO) - QMR}{r} \quad (8)$$

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{QMP - QM(PxO)}{pr} \quad (9)$$

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{QMO - QM(PxO)}{nr} \quad (10)$$

Destaca-se que se alguma estimativa de componente de variância apresentar valor negativo adota-se o seu valor como zero (0). Se o efeito da interação *PxO* não for significativo (valor- $p > \alpha$) deve-se refazer a ANOVA sem este termo e os componentes $\hat{\sigma}_p^2$ e $\hat{\sigma}_o^2$ serão obtidos subtraindo-se o *QMP* e *QMO* do *QMR* ao invés de *QM(PxO)*, e dividindo por *pr* e *nr*, respectivamente.

A estimativa do parâmetro R&R pode ser calculada conforme as equações apresentadas abaixo:

$$R\&R = 6 \hat{\sigma}_{\text{Erro de Medição}} \quad (11)$$

$$R\&R (\%) = 100 \frac{R\&R}{6 \hat{\sigma}_{\text{Total}}} = 100 \frac{\hat{\sigma}_{\text{Erro de Medição}}}{\hat{\sigma}_{\text{Total}}} \quad (12)$$

Em que:

$$\hat{\sigma}_{\text{Erro de Medição}} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\text{Repetitividade}}^2 + \hat{\sigma}_{\text{Reprodutividade}}^2} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 + [\hat{\sigma}_O^2 + \hat{\sigma}_{(PxO)}^2]} \quad (13)$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Total}} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\text{Peça}}^2 + \hat{\sigma}_{\text{Erro de Medição}}^2} = \sqrt{\hat{\sigma}_P^2 + \{\hat{\sigma}^2 + [\hat{\sigma}_O^2 + \hat{\sigma}_{(PxO)}^2]\}} \quad (14)$$

Um fato interessante é que a distribuição do Erro de Medição se aproxima de uma distribuição Normal e por isso o valor de $6\hat{\sigma}_{\text{Erro de Medição}}$ em (11) parece ser uma boa estimativa da capacidade do medidor (MONTGOMERY, 2009). Além disso, é possível obter intervalos de confiança para tais quantidades (componentes de variância e índice R&R), para tal sugerimos ao leitor uma consulta a Borror, Montgomery e Runger (1997). Após a obtenção do índice R&R (%), os critérios para avaliação de um processo de medição, sugeridos por Júnior e Souza (2008) e Ribeiro Júnior (2012), são apresentados na Tabela 2:

Tabela 2 – Critérios para avaliação de um processo de medição via parâmetro R&R.

R&R (%)	Conclusão
R&R < 10%	Processo de Medição Aceitável.
$10\% \leq \text{R\&R} \leq 30\%$	Processo de Medição considerado adequado, dependendo da importância do estudo.
R&R > 30%	Processo de Medição é Inaceitável.

Fonte: Júnior e Sousa (2008)

Materiais e métodos

Neste trabalho, a característica da qualidade (Y) foi representada pelas medidas de massa específica aparente após secagem (ρ_s) de corpos-de-prova de revestimento cerâmico para piso. As amostras foram obtidas por prensagem uniaxial com pressão de compactação de 50 Mpa e posteriormente submetidas a um processo de secagem em estufa de laboratório a 110°C por 24 h. Em seguida, mediram-se as dimensões (comprimento, largura e espessura) de cada amostra para a determinação do volume (V_s) e também sua massa (M_s). Os instrumentos utilizados foram: a) paquímetro da marca Mitutoyo (0,01 mm) e, b) balança digital ($\pm 0,01$ g). A massa específica aparente após secagem foi determinada pela fórmula $\rho_s = \frac{M_s}{V_s}$.

Para o processo de medição (planejamento experimental) foram selecionados aleatoriamente dois operadores e dez corpos-de-prova. Cada amostra foi medida repetidamente cinco vezes por cada operador. Logo, tal planejamento resulta em um total de $2 \times 10 \times 5 = 100$ medições, o que segundo o manual da AIAG *Measurement Systems Analysis* é um número adequado, visto que para estudos (padrão) do parâmetro R&R o número de medições deve ser próximo de 90, para tornar o estudo aplicável do ponto de vista prático e gerencial. Utilizou-se o software Minitab 16 (Minitab Inc., 2010) e o software livre R (R Development Core Team, 2012) para o desenvolvimento das análises estatísticas. As Tabelas 3 e 4 apresentam, respectivamente, para os operadores 1 e 2, as medições dos valores de massa específica aparente após secagem (densidade a seco) para os 10 corpos-de-prova.

Tabela 3 – Medições realizadas pelo Operador 1

Medição/peças	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,85	1,88	1,87	1,89	1,87	1,9	1,89	1,87	1,9	1,89

2	1,86	1,91	1,89	1,85	1,86	1,87	1,92	1,87	1,87	1,93
3	1,87	1,88	1,88	1,86	1,89	1,88	1,91	1,90	1,91	1,90
4	1,82	1,87	1,88	1,87	1,87	1,92	1,88	1,89	1,88	1,86
5	1,86	1,89	1,87	1,87	1,86	1,87	1,91	1,87	1,88	1,88

Tabela 4 – Medições realizadas pelo Operador 2

Medição/peças	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,88	1,91	1,90	1,90	1,87	1,88	1,89	1,91	1,89	1,89
2	1,90	1,88	1,90	1,91	1,90	1,89	1,89	1,90	1,91	1,87
3	1,92	1,90	1,91	1,90	1,90	1,91	1,89	1,91	1,90	1,90
4	1,90	1,91	1,87	1,90	1,89	1,90	1,89	1,86	1,90	1,91
5	1,86	1,89	1,89	1,89	1,88	1,91	1,91	1,89	1,88	1,89

Resultados e Discussão

A Tabela 5 apresenta os resultados da Análise de Variâncias.

Tabela 5 – Resultados da ANOVA sem a interação Peça x Operador

F.V	G.L	S.Q	Q.M	Teste F	valor-p
Peça	9	0,005285	0,0005872	2,1117	0,0365*
Operador	1	0,005041	0,0050410	18,128	0,0000*
Resíduo (Repetitividade)	89	0,024749	0,0002781		
Total	99	0,035075			

Fonte: Minitab 16.

Os Fatores Peça e Operador foram significativos a 5% de probabilidade ($\text{valor-p} < 0,05$), demonstrando que, em média, existe diferença estatística entre as medidas das peças avaliadas (pelo menos uma média diverge das demais) e entre as medições obtidas pelos operadores. Em outras palavras, tal resultado sugere que o sistema pode estar fora de controle e que a média das medições, encontradas pelos 2 operadores, são diferentes do ponto de vista estatístico, com pode ser visualizado na Figura 1.

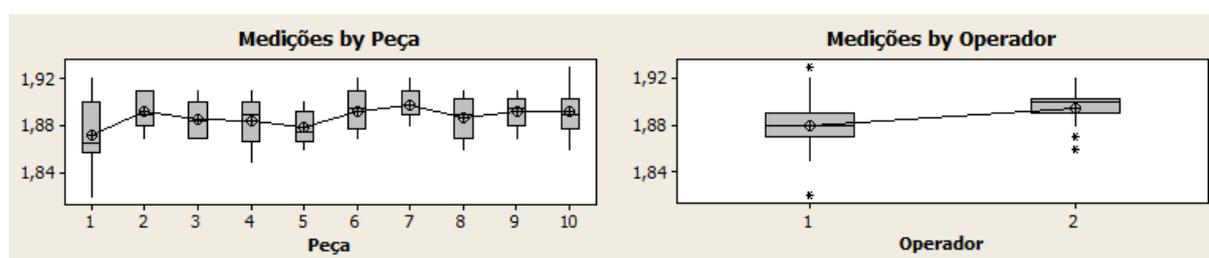


Figura 1 – Média das medições por Peça e por Operadores. Fonte: Minitab 16.

Pode-se observar ainda que não se tem a presença do termo de interação como F.V na Tabela 5, visto que esta não foi significativa (valor-p > 0,05), como é possível verificar na Figura 2. É importante ressaltar que o número de graus de liberdade para estimar a repetitividade é 89, portanto, muito superior aos indicados por Zuo (2009) em seu estudo de simulação (entre 30 e 45 graus de liberdade), garantindo que a estimativa da Repetitividade não seja comprometida.

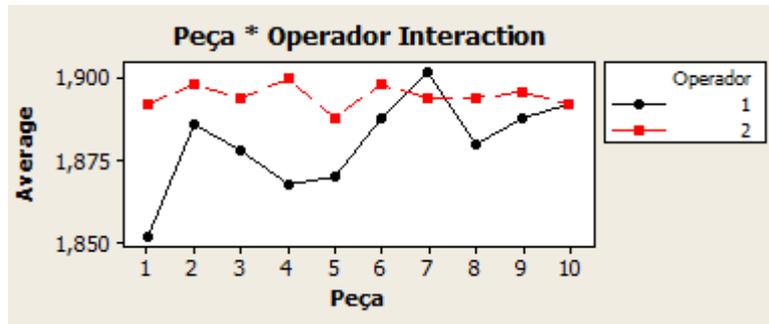


Figura 2 – Gráfico da Interação (não significativa) entre o Fator Peça e Operador. Fonte: *Minitab 16*

Além disso, foi elaborada uma rotina no *software* livre R e verificou-se que os resíduos (erros estimados) da ANOVA foram normais segundo o teste de Shapiro-Wilk (valor-p = 0,6924), homogêneos pelo teste de Bartlett (valor-p = 0,3436) e aleatórios (por definição, independentes e identicamente distribuídos) segundo o runs.test (valor-p = 0,6877).

Logo, a estimativa do parâmetro R&R é dada por:

$$\hat{\sigma}_p^2 = 0,0000309 \quad \hat{\sigma}_o^2 = 0,00009526 \quad \hat{\sigma}_{p \times o}^2 = 0 \quad \hat{\sigma}^2 = 0,0002781$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Erro de Medição}} = \sqrt{0,0002781 + (0,00009526 + 0)} = 0,01932$$

$$\hat{\sigma}_{\text{Total}} = \sqrt{0,0000309 + [0,0002781 + (0,00009526 + 0)]} = 0,0201064$$

$$R\&R (\%) = 100 \frac{0,01932}{0,02010} = 96,10\%$$

Como o índice R&R (%) apresenta valor superior a 30% conclui-se que o sistema de medição não está adequado. Na Tabela 6 encontram-se indicados as estimativas dos percentuais de contribuição ou o percentual da variabilidade total explicada por cada componente da variância.

Tabela 6 – Percentual da Variância Total explicado por cada componente

	Peça	Operador	Repetitividade	Reprodutibilidade
$\widehat{\sigma}_{\text{componente}}^2$	0,0000309	0,00009526	0,0002781	0,00009526
$\widehat{\sigma}_{\text{Total}}^2$	0,0004043	0,0004043	0,0004043	0,0004043
% Variância	7,64%	23,56%	68,79%	23,56%

Nota-se que o maior percentual da variabilidade total do sistema de medição pode ser explicado pela componente que representa a Repetitividade (68,79%). Logo, conclui-se que o maior problema do sistema de medição está associado à qualidade das medições efetuadas pelos operadores. Em outras palavras, os operadores medem a mesma grandeza de uma peça, repetidas vezes, e encontram valores diferentes. Os

possíveis fatores causadores de tal problema poderiam ser a falta de habilidade, a baixa acuidade visual e/ou ainda a falta de cuidado ao efetuar a medição.

Conclusões

O índice R&R estimado via Análise Variâncias é de fácil execução e mostrou-se útil para avaliar o sistema de medição em questão, evidenciando o seu desajuste ($R\&R > 30\%$) e indicando que a Repetitividade entre operadores é o componente com maior influência para este desajuste. Sugere-se que treinamentos sejam oferecidos aos operadores, no intuito de capacitá-los para que realizem de forma correta e eficiente tais medições, adequando o sistema de medição. Para trabalhos futuros, sugere-se que um novo estudo R&R seja desenvolvido após a realização de tais treinamentos, visando avaliar se houve melhoria no valor do índice R&R (%).

Referências

- AIAG-*Measurement Systems Analysis, Reference Manual*. Automotive Industry Action Group, Southfield, Mich, 3^a ed., 2003.
- BORROR, C. M.; MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. Confidence Intervals for Variance Component from Gauge Capability Studies, *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 13, 1997.
- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. *Controle Estatístico da Qualidade*. São Paulo: Atlas, 2004.
- JUNIOR, A.A.G; SOUSA, A.R. *Fundamentos de metrologia científica e industrial*.1^a. ed. Barueri - SP: Manole, 2008.
- MINITAB. Minitab for Windows Release 16. State College: Minitab Inc., 2010.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Gauge Capability and Designed Experiments: Part I: Basic Methods*, Quality Engineering, Vol. 6, 1993a.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Gauge Capability and Designed Experiments: Part II: Experimental Design Models and Variance Component Estimation*, Quality Engineering, Vol. 6, 1993b.
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao controle estatístico da qualidade*. 4^a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2012.
- RIBEIRO JÚNIOR, J. I. *Métodos Estatísticos Aplicados à Melhoria da Qualidade*. UFV, 2012.
- ZUO, Y. Effect of Sample Size on Variance Component Estimates in Gage R&R Studies. Minitab Technical White Paper, 2009.