

Uma Análise de Desempenho de Gráficos de Controle Multivariados

Rodrigo Luiz P. Lara^{1†}, José Ivo Ribeiro Júnior², Rafael L. R. Oliveira³

^{1,2} DET-UFV: Universidade Federal de Viçosa, Viçosa-MG.

³ IFNMG: Instituto Federal do Norte de Minas Gerais, Januária-MG.

Resumo: A melhoria e o monitoramento da qualidade são preocupações e necessidades para muitas organizações. Dentre as ferramentas que compõem o controle estatístico do processo, os gráficos de controle são simples e eficientes no monitoramento da média e da variabilidade de diversas características avaliadas. Particularmente, os gráficos de controle multivariados são valiosas ferramentas para o controle da qualidade industrial. O objetivo do presente trabalho consiste em determinar quais gráficos de controle são eficazes na detecção de mudança no vetor de médias de um processo. Para tanto, são apresentados os gráficos de controle multivariados de Hotelling, MEWMA, MCUSUM e ELR, com $ARL_{IC} = 200$. Para cada um deles, simularam-se 20.000 processos bivariados sob controle baseados em 500 subgrupos racionais com observações individuais. A partir dos limites superiores de controle selecionados para compor os gráficos, modificou-se o vetor de médias do processo de modo a verificar em qual subgrupo racional, em média, o gráfico detecta o descontrole. O gráfico de controle MEWMA apresentou melhor desempenho, enquanto que o ELR e MCUSUM também apresentaram atuações satisfatórias.

Palavras-chave: Alarme falso; planejamento; ARL_{IC} .

Abstract: The improvement and quality monitoring are concerns and needs for many organizations. Among the tools that compose the statistical process control, control charts are simple and efficient monitoring of the mean and variability of several traits evaluated. Particularly, multivariate control charts are valuable tools for the quality control of industries. The objective of this study is to determine which control charts are effective in detecting change in mean vector of a process. Therefore, the following multivariate control charts are presented: Hotelling, MEWMA, MCUSUM and ELR with $ARL_{IC} = 200$. For each of them, 20,000 bivariate processes were simulated under control based on rational subgroups of 500 individual observations. From the upper limit selected to compose the graphics control, we changed the mean vector so as to observe in which subgroup rational, on average, the graphic process detects the shift. The MEWMA control chart performed better, while the ELR and MCUSUM also showed satisfactory performances.

Keywords: False alarm; design; ARL_{IC} .

Introdução

Dada a volumosa pesquisa em várias áreas de gráficos de controle univariados, a pesquisa em gráficos de controle multivariados talvez esteja em atraso (ZHANG, LI; WANG, 2010). Isso é provável, pois em várias aplicações industriais, a qualidade dos produtos é frequentemente relacionada a várias características de qualidade correlacionadas. Vários autores tais como Moraes et al. (2014) também apontaram que os gráficos de controle multivariados são uma importante área de pesquisa para o novo século.

O primeiro gráfico de controle multivariado foi proposto por Hotelling (1947), caracterizado por ser eficaz em detectar grandes mudanças em um processo, além de possuir um critério de decisão relativamente simples que se baseia apenas na mais recente amostra produzida.

[†] Autor correspondente: rodrigo.lara@ufv.br.

Posteriormente foram propostos os gráficos da Soma Acumulada Multivariada (*Multivariate Cumulative Sum* – MCUSUM) de Crosier (1988) e da Média Móvel Exponencialmente Ponderada Multivariada (*Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* – MEWMA) de Lowry et al. (1992), cujos critérios de decisão se baseiam no histórico do processo com sensibilidade em detectar pequenas mudanças no vetor de médias. Recentemente, Zhan, Li e Wang (2010) propuseram o gráfico de controle ELR que monitora simultaneamente o vetor de médias e a matriz de covariâncias de um processo multivariado. No presente trabalho é realizado uma comparação de desempenho dos gráficos de controle multivariados T^2 de Hotelling, MEWMA, MCUSUM e ELR, por meio de um monitoramento do vetor de médias de processos simulados.

Quando há p características a serem analisadas, o monitoramento é feito sobre um vetor de médias. Daí deseja-se testar se o vetor de médias μ é estatisticamente igual ao vetor de médias μ_0 das características de qualidade, a fim de verificar se o processo está sob controle estatístico para todas elas.

As estatísticas dos gráficos de controle T^2 de Hotelling, MEWMA, MCUSUM e ELR podem ser visualizadas em Hotelling (1947), Lowry et al. (1992), Crosier (1988) e Zhang, Li e Wang (2010), respectivamente. Foram definidos $k = 1$ e $r = 0,2$ para os fatores presentes nos gráficos de controle MCUSUM e MEWMA respectivamente.

Além desta introdução, o trabalho possui mais quatro seções principais. No item seguinte são apresentados os objetivos propostos. Em seguida tem-se a metodologia empregada; na quarta seção, por meio de simulações de processos, são apresentados os resultados e discussões. Por fim, tem-se a conclusão e algumas considerações.

Objetivo

Dentre os gráficos de controle multivariados T^2 de Hotelling, MEWMA, MCUSUM e ELR, o objetivo do presente trabalho é determinar quais gráficos de controle são eficazes na detecção de mudança no vetor de médias de um processo. Mais especificamente, pretende-se verificar quantos subgrupos racionais são gastos, em média, por cada um dos gráficos de controle de modo a detectar a mudança do processo.

Metodologia

Processo Sob Controle Estatístico

Para cada um dos quatro gráficos de controle multivariados, simularam-se 20.000 processos bivariados sob controle com 500 subgrupos racionais cada e para diferentes valores de h (limite superior de controle), de modo a verificar em qual valor de h ocorre um comprimento médio da sequência (ARL_{IC}) igual a 200. Em outras palavras, deseja-se determinar para qual valor de h ocorre alarme falso, em média, no 200º subgrupo racional ($ARL_{IC} = 200$). O vetor de médias e a matriz de covariâncias do processo considerado sob controle estão especificados na Equação 1.

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Processo Fora de Controle Estatístico

A partir dos valores de h que proporcionaram $ARL_{IC} = 200$, simulou-se o descontrole no processo, conforme descrito na seção a seguir. Em função dos limites superiores de controle selecionados, modificou-se o vetor de médias do processo de modo a verificar em qual subgrupo racional, em média, cada gráfico detecta o descontrole. Realizaram-se 60.000 simulações de processos que foram monitorados pelos respectivos gráficos. Cada processo já foi inicializado fora de controle somente para o vetor de médias, como segue:

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Todas as simulações de processos sob e fora de controle foram realizadas utilizando-se o software R.

Resultados e Discussões

Processo Sob Controle Estatístico

Na Tabela 1 é apresentado alguns valores obtidos de h em função do comprimento médio da sequência para um processo sob controle. Observe que quanto maior o valor de h , mais subgrupos racionais são necessários, em média, para a sinalização de um alarme falso, ou seja, a sinalização de um descontrole quando na verdade o processo está operando sob sua devida média. As linhas em negrito da Tabela 1 são aquelas onde obteve-se ARL_{IC} próximo a 200 e, conseqüentemente, o valor de h associado, para os respectivos gráficos de controle.

Tabela 1 - Limites superiores de controle obtidos por simulação em função do comprimento médio da sequência para os gráficos de controle T^2 de Hotelling, MCUSUM, MEWMA e ELR

T^2 de Hotelling		MCUSUM ($k = 1$)		MEWMA ($r = 0,2$)		ELR	
h	ARL_{IC}	h	ARL_{IC}	h	ARL_{IC}	h	ARL_{IC}
11,2	176,45	3,15	175,59	10,9	190,59	1,860	196,46
11,3	179,33	3,20	182,11	11,0	194,17	1,861	197,51
11,4	183,11	3,25	188,71	11,1	196,70	1,862	197,55
11,5	186,46	3,30	191,48	11,2	199,74	1,863	197,71
11,6	189,71	3,35	196,96	11,3	201,03	1,864	200,35
11,7	192,61	3,40	202,45	11,4	202,43	1,865	201,61
11,8	196,98	3,45	208,07	11,5	203,72	1,866	201,25
11,9	196,92	3,50	210,11	11,6	207,33	1,867	198,64
12,0	200,07	3,55	214,08	11,7	209,08	1,868	201,92
12,1	201,65	3,60	219,56	11,8	210,83	1,869	198,64

h = limite superior de controle, k = valor de referência, r = parâmetro de suavização.

Portanto, a partir de tais escolhas de h , todos os gráficos de controle estão em condições iguais para serem comparados realizando-se uma mudança no vetor de médias do processo.

Processo Fora de Controle Estatístico

Em média, o gráfico de controle MEWMA necessitou de 8,94 subgrupos racionais para detectar o descontrole, sendo considerado o mais eficaz dentre os quatro gráficos utilizados nesse trabalho (Figura 1).

Os gráficos de controle ELR e MCUSUM apresentaram desempenhos satisfatórios. Ambos levaram, em média, uma quantidade de subgrupos racionais entre 12 e 13 para detectarem o descontrole. O gráfico T^2 de Hotelling foi o que apresentou atuação pior, uma vez que seu critério de decisão leva em consideração cada amostra separadamente, ao contrário dos demais gráficos que armazenam um histórico do processo.

Na Figura 2 é apresentado uma das 60.000 simulações de processos fora de controle estatístico monitorado pelo gráfico MEWMA.

Nota-se que para esse exemplo, o gráfico detectou a mudança de média no oitavo subgrupo racional.

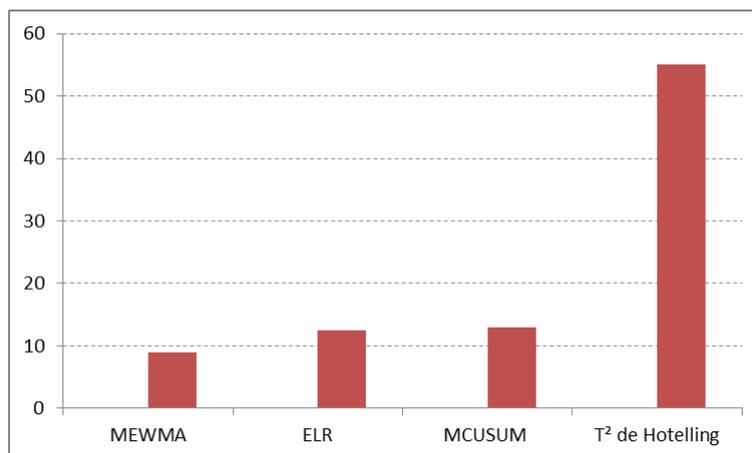


Figura 1: Quantidade média de subgrupos racionais necessários para a detecção de mudança da média em processos bivariados

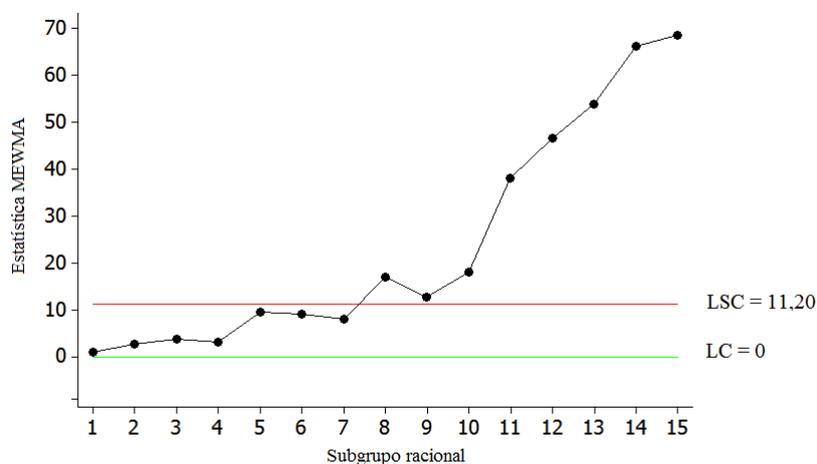


Figura 2: Processo bivariado fora de controle estatístico monitorado pelo gráfico de controle MEWMA.

Conclusões

O gráfico de controle MEWMA foi o que apresentou o melhor desempenho. É importante observar que a escolha de $r = 0,2$ contribuiu para a rápida detecção de pequenas mudanças no vetor de médias do processo.

Os gráficos de controle ELR e MCUSUM ($k = 1$) apresentaram desempenhos bons. Embora o ELR não tenha sido o melhor, deve-se lembrar que ele também é capaz de monitorar variabilidade do processo, situação que não foi abordada nesse trabalho.

O gráfico T^2 de Hotelling foi o que apresentou o pior desempenho, uma vez que seu critério de decisão leva em consideração cada amostra separadamente, ao contrário dos demais gráficos que armazenam um histórico do processo.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Programa de Pós Graduação em Estatística Aplicada e Biometria da Universidade Federal de Viçosa pelos recursos disponibilizados para a realização desse trabalho; à CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo apoio financeiro; à comissão organizadora do XIII MGEST e aos revisores da revista *Sigmae* pelas críticas e sugestões.

References

- CROSIER, R. B. Multivariate generalizations of cumulative sum quality-control schemes *Technometrics*. vol. 30, n. 3, p. 291-303, 1988.
- HOTELLING, H. Multivariate quality control. *Techniques of statistical analysis*, New York: McGraw-Hill, p. 111-184, 1947.
- LOWRY, C. A.; WOODALL, W. H.; CHAMP, C. W.; RIGDON, S. E. A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics*, vol. 34, n. 1, 1992.
- MORAES, D. A. O; OLIVEIRA, F. L. P.; QUININO, R. C.; DUCZMAL, L. H. Self-oriented control charts for efficient monitoring of mean vectors. *Computers & Industrial Engineering*, vol. 75, p. 102-105, 2014.
- ZHANG, J.; LI, Z.; WANG, Z. A multivariate control chart for simultaneously monitoring process mean and variability. *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 54, 2010.