

Inferência Bayesiana para uma extensão assimétrica do modelo de *Grubbs*

Fabio R. Silva^{1 †}, Lourdes C. C. Montenegro²

¹ *Doutorando em Probabilidade e Estatística, Universidade Federal de Belo Horizonte.*

² *Professora Adjunto, Universidade Federal de Belo Horizonte.*

Resumo: *O modelo de Grubbs é utilizado para comparar vários instrumentos de medição, e é comum supor que os termos aleatórios seguem uma distribuição normal. Neste trabalho estudamos aspectos da inferência Bayesiana para o modelo em que o valor não observado da variável latente segue uma distribuição normal assimétrica. As estimativas a posteriori dos parâmetros do modelo em estudo são calculados através do amostrador de Gibbs. Os resultados e métodos desenvolvidos neste trabalho são ilustrados através de um conjunto de dados.*

Palavras-chave: modelo de *Grubbs*; distribuição normal assimétrica; amostrador de *Gibbs*.

Abstract: *The Grubbs's model is used to compare several instruments, and it is common to assume that the random terms follow a normal distribution. We study some aspects of Bayesian inference for the Grubbs's model, where the unobserved value of the latent variable follows an asymmetric normal distribution. Estimates a posteriori of the parameters under are calculated by Gibbs sampling algorithm. The results and methods developed in this work are illustrated by one data set.*

Keywords: Grubbs's model; Skew-normal distribution; Gibbs sampling.

Introdução

Regressão linear é uma das ferramentas estatísticas mais amplamente utilizados e tem sido objeto de um extenso estudo na literatura por mais de um século. Em várias aplicações a covariável não é diretamente observado (variável latente), por esta razão, esta covariável é medida com erros. Há uma extensa quantidade de trabalhos sobre este modelos, entre as principais referências podemos citar Fuller (1987). Os modelos com erros de medição são utilizados em modelos de regressão linear e modelos de regressão não-linear, modelos de análise fatorial, modelos com estruturas latentes e modelos de equações simultâneas. Estes modelos são também amplamente utilizados para comparar instrumentos de medida (ver, Barnett (1969); Theobald C.M. e Mallison (1978); Shyr e Gleser (1986); Bolfarine e Galea-Rojas (1995)), que se diferenciam pelo custo, tempo gasto para medir e, outras características, tais como a eficiência. Uma classe particular dos modelos utilizados para comparar instrumentos de medida foi introduzido por Grubbs (1948) e Grubbs (1973). Este modelo é usualmente utilizado em estudos de comparação de métodos para avaliar a concordância relativa entre dois ou mais métodos analíticos (ou instrumentos), que medem a mesma quantidade de interesse na mesma escala. Seja x_i o valor resposta não observada (latente) correspondente a unidade i e y_{ij} o valor medido obtido com o instrumento j na unidade de i , $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, p$, com $p \geq 2$. Supondo que o primeiro instrumento é a referência que serão comparados com os restantes $p - 1$ instrumentos, o modelo de *Grubbs* normal é definida como

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{a} + \mathbb{1}_p x_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (1)$$

[†] Autor correspondente: fabiorochadasilva@gmail.com.

onde $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{a} = (0, \alpha)^T = (0, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^T$ e $\mathbf{1}_p = (1, \dots, 1)^T$ são vetores $p \times 1$; $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{ip})^T$ e $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{i1}, \dots, \epsilon_{ip})^T$ (o vetor erro), são vetores aleatórios $p \times 1$ independente com $\boldsymbol{\epsilon}_i \stackrel{iid}{\sim} N_P(0, D(\boldsymbol{\phi}))$ e $x_i \stackrel{iid}{\sim} N_1(\mu_x, \phi_x)$, em que $D(\boldsymbol{\phi})$ denota a matriz diagonal com $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)^T$. Inferência para este modelo pode ser encontrado em Grubbs (1948) e Grubbs (1973).

Embora a suposição de normalidade (ou simetria) é adequada, em muitas situações não é apropriado quando os dados apresentam comportamentos que diferem do modelo normal, como por exemplo, assimetria. O conjunto de dados estudado por Barnett (1969) apresenta esta característica e parece requerer transformação de modo a ser melhor aproximada pela distribuição normal. Portanto, usaremos uma classe geral de modelos que compreende a normal como um caso particular desta classe. A família normal assimétrica foi estudada por Azzalini (1985) em um contexto univariado. Nesta família de distribuições, um parâmetro de forma que regula a assimetria da distribuição, permite uma forma de transição contínua da não normalidade para normalidade.

Dizemos que o vetor aleatório \mathbf{y} de dimensão k tem distribuição normal assimétrica multivariada com parâmetros de locação $\boldsymbol{\mu}$, matriz escala $\boldsymbol{\Psi}$ (Positiva Definida) e parâmetros de assimetria λ , o qual será denotada por $SN(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Psi}, \lambda)$, se sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(\mathbf{y}) = 2\phi_k(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Psi})\Phi_1(\lambda^T \boldsymbol{\Psi}^{-1/2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

onde $\phi_k(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Psi})$ representa a função de densidade da distribuição normal k -variada com $\boldsymbol{\mu}$ o vetor de médias e $\boldsymbol{\Psi}$ a matriz de covariância, Φ_1 representa a função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão, e $\boldsymbol{\Psi}^{-1/2}$ satisfaz $\boldsymbol{\Psi}^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}$. Quando $\lambda = 0$, temos que $\mathbf{y} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Psi})$. A representação estocástica de uma variável aleatória normal de inclinação, o qual pode ser usado para simular realizações aleatórias a partir de \mathbf{y} , é dada pela:

$$\mathbf{y} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Psi}^{1/2}(\delta|T_0| + (\mathbb{I}_k - \delta\delta)^{1/2}T_1), \quad \text{com } \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^T \lambda}}, \quad (3)$$

onde $T_0 \sim N_1(0, 1)$ e $T_1 \sim N_k(0, \mathbb{I}_k)$ são independentes, e “ $\stackrel{d}{=}$ ” significa “distribuída como”. Para mais detalhes sobre essa abordagem, consulte Arellano-Valle e Genton (2005). Note que em (3) quando $k = 1$, obtemos a distribuição normal univariada.

Metodologia

Discutiremos os aspectos inferenciais Bayesianos para o modelo de *Grubbs*, quando a quantidade desconhecida x (resposta latente) segue uma distribuição normal assimétrica, estendendo-se os primeiros resultados apresentados em Arellano-Valle e Genton (2005). Estimativas *a posteriori* de parâmetros são calculados através do amostrador de *Gibbs*. Os resultados e métodos desenvolvidos neste trabalho são ilustradas com um exemplo numérico.

O Modelo

Neste trabalho, para uma estimativa mais realista dos parâmetros do modelo, especialmente em situações em que os dados apresenta assimetria, assumimos que $(x_i, \boldsymbol{\epsilon}_i)^T$ segue uma distribuição $(p + 1)$ -variada normal assimétrica, isto é,

$$\begin{pmatrix} x_i \\ \boldsymbol{\epsilon}_i \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} SN_{p+1} \left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ 0 \end{pmatrix}, D(\phi_x, \boldsymbol{\phi}), \begin{pmatrix} \lambda_x \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (4)$$

onde $i = 1, \dots, n$, $(\mu_x, 0)^T$ é o vector de locação, $D(\phi_x, \boldsymbol{\phi})$ representa a matriz de escala, e $(\lambda_x, 0)^T$ é o parâmetro de assimetria, com $D(\phi_x, \boldsymbol{\phi})$ denota uma matriz diagonal com elementos

ϕ_x e ϕ . Do Lema 2.2 em Gupta e Chen (2004), pode-se mostrar que ϵ_i e x_i são independentes com

$$\epsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N_p(0, D(\phi)) \text{ e } x_i \stackrel{iid}{\sim} SN_1(\mu_x, \phi_x, \lambda_x), \quad (5)$$

onde $i = 1, \dots, n$. É claro que ϕ_j está relacionada com a variação da medição feita pelo instrumento de j , $j = 1, \dots, p$, e ϕ_x para o parâmetro de escala da resposta latente, que tem variância $\phi_x \{1 - 2\lambda^2 / (\pi(1 + \lambda^2))\}$. Este modelo, por exemplo, representa o conjunto de dados estudados por Barnett (1969), o qual mostra que a distribuição da capacidade vital do pulmão humano não é simetricamente distribuídas na população e uma vez que ϵ_i está relacionada com erro de medição, deve ser normalmente distribuído (com média zero). Além disso, estamos supondo que a variável latente (x) segue uma distribuição normal assimétrica.

A partir da representação estocástica marginal de um vector aleatório normal assimétrico dado em (3), com $t = |T_0|$, o modelo definido em (4) pode ser escrita hierarquicamente como

$$\mathbf{y}_i | x_i \stackrel{ind}{\sim} N_p(\mathbf{a} + \mathbf{1}_p x_i, D(\phi)), \quad (6)$$

$$x_i | T_i = t_i \stackrel{ind}{\sim} N_1(\mu_x + \phi_x^{1/2} \times \delta_x t_i, \phi_x(1 - \delta_x^2)), \quad (7)$$

$$T_i \stackrel{iid}{\sim} HN_1(0, 1), \quad (8)$$

$i = 1, \dots, n$, todos independentes, onde $HN_1(0, 1)$ denota a distribuição half-normal univariada padrão e $\delta_x = \lambda_x / (1 + \lambda_x^2)^{1/2}$.

Inferência Bayesiana para o Modelo de *Grubbs* normal assimétrico(MGNA)

Nesta seção, implementamos a metodologia Bayesiana para o MGNA utilizando técnicas de MCMC (Markov Chain Monte Carlo), mais precisamente conhecido como amostrador de *Gibbs*.

Para a implementação do algoritmo de *Gibbs* é necessário que seja realizado um estudo sobre as distribuições *a priori* que serão utilizadas.

Em Bayes e Branco (2007) foi defendida o uso da distribuição *a priori* para λ definida por:

$$\pi(\lambda) \propto \left(1 + \frac{\lambda^2}{k\sigma_t^2}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad (9)$$

onde σ_t^2 e k são os parâmetros de escala e os graus de liberdade devido ao uso da distribuição *t* de *Student*, respectivamente.

Também no trabalho de Bayes e Branco (2007) a *priori* 9 também foi rescrita na forma hierárquica, resultando em

$$\begin{aligned} \lambda &\sim N\left(0, \frac{\sigma_t^2}{w}\right) \\ w &\sim \text{Gama}\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Este resultado segue se acreditarmos que δ segue uma distribuição uniforme ($U[-1; 1]$) e através de transformação, poderemos observar, diretamente, que λ terá uma distribuição *t* de *Student*, especificada por, $\lambda \sim t(0; \frac{1}{2}, 2)$. Mais que isto, podemos fazer uso de uma *priori* de *Jeffreys* para λ , que foi concebida em Liseo e Loperfido (2006) para o caso do modelo de localização-escala normal assimétrico. Neste caso, a *priori* de *Jeffreys*, $\pi^J(\lambda)$, é dada por:

$$\pi^J(\lambda) \propto \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} 2z^2 \phi(z) \frac{\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)} dz}$$

Neto e Branco (2003) desenvolveram após longas manipulações algébricas uma aproximação para a quantidade acima que aparece designada por $\pi^J(\lambda)$, sendo esta quantidade dada por

$$\frac{1/\pi\phi(z)}{\sqrt{\Phi(z)[1-\Phi(z)]}} \approx \frac{2}{\pi} \phi\left(\frac{2}{\pi}z\right).$$

Pode ser mostrado que esta aproximação leva a uma distribuição *a priori* especificada por $\pi^J(\lambda) \sim t\left(0; \frac{\pi^2}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

Na parametrização delta, o parâmetro ς funcionará como o indicador de assimetria. Então, utilizaremos as mesmas ideias de especificações *a priori* para o parâmetro λ , e, conseqüentemente, para a especificação *a priori* relacionado ao parâmetro ς .

Para implementar a metodologia Bayesiana para o MGNA usando a representação (6)-(8), com $\lambda = \varsigma/\sigma_*$ e $\phi_x = \varsigma^2 + \sigma_*^2$, segue-se a função de verossimilhança completa associada com (Y, X, T) :

$$L(\theta|Y, X, T) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|D(\phi)|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_i - \mathbf{a} - \mathbf{1}_p)'D(\phi)^{-1}(\mathbf{y}_i - \mathbf{a} - \mathbf{1}_p)\right\} \\ \times \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_*^2)}} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu_x - \varsigma t_i)^2}{2\sigma_*^2}\right\} \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{-\frac{t_i^2}{2}\right\}$$

Agora, para completar a especificação do modelo MGNA num contexto Bayesiano, presume-se que a distribuição a priori conjunta para $\theta^* = (\mathbf{a}, \phi, \mu_x, \varsigma, \sigma_*^2)$, assumindo distribuições *a priori* independentes entre os parâmetros do modelo tem densidade dada por:

$$\pi(\theta^*) \propto \pi(\mathbf{a}) \times \pi(\phi) \times \pi(\mu_x) \times \pi(\varsigma) \times \pi(\sigma_*^2) \tag{11}$$

onde, $\alpha_i \sim N(\mu_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i}^2)$ $i = 2, \dots, p$, $1/\phi_i \sim \text{Gama}(A_{\phi_i}, B_{\phi_i})$ $i = 1, \dots, p$, $\mu_x \sim N(\mu_{xx}, \sigma_{xx}^2)$ $1/\sigma_*^2 \sim \text{Gama}(A, B)$ e $\varsigma \sim t(0; \sigma_t^2; g)$, onde *a priori* para ς pode ser obtida através da mistura $b|w \sim N\left(0, \frac{\sigma_t^2}{w}\right)$ e $w \sim \text{Gama}\left(\frac{g}{2}; \frac{g}{2}\right)$.

Combinando a função de verossimilhança (11) e as distribuições a priori adotadas, a distribuição *a posteriori* conjunta de θ^* . Pode-se notar que a esta distribuição *a posteriori* conjunta é intratável analiticamente porque a integração da densidade a posteriori não é fácil de ser feita. Uma alternativa, é considerar o algoritmo amostrador de *Gibbs*.

O amostrador de *Gibbs* funciona com a retirada de amostras de forma iterativa a partir das distribuições *a posteriori* condicionais derivadas dos parâmetros. Para o modelo MGNA temos o seguinte resultado:

Proposição 1 *Assumindo distribuições a priori independentes entre os parâmetros do modelo de Grubbs, ou seja, fazendo, então, suposições de que $\alpha_i \sim N(\mu_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i}^2)$ $i = 2, \dots, p$, $1/\phi_i \sim \text{Gama}(A_{\phi_i}, B_{\phi_i})$ $i = 1, \dots, p$, $\mu_x \sim N(\mu_{xx}, \sigma_{xx}^2)$ $1/\sigma_*^2 \sim \text{Gama}(A, B)$ e $\varsigma \sim t(0; \sigma_t^2; g)$, onde a priori para ς pode ser obtida através da mistura $\varsigma|w \sim N\left(0, \frac{\sigma_t^2}{w}\right)$ e $w \sim \text{Gama}\left(\frac{g}{2}; \frac{g}{2}\right)$, teremos a distribuição a posteriori dada por*

$$\pi(\theta^* = (\mathbf{a}, \phi, \mu_x, \varsigma, \sigma_*^2)|y_i) \propto \pi(\theta^*) \times L(\theta^*; z)$$

que conduz as seguintes distribuições a posteriori condicionais próprias:

$$a) \pi(\alpha_j|\sigma_*^2, \varsigma, \mu_x, w, \phi) \sim N\left(\frac{n\sigma_{\alpha_j}^2 \sum_{j=1}^n (y_{ij} - x_i) + \phi_j \mu_{\alpha_j}}{\phi_j + n\sigma_{\alpha_j}^2}; \frac{\phi_j \sigma_{\alpha_j}^2}{\phi_j + n\sigma_{\alpha_j}^2}\right), \quad j = 2, \dots, p$$

$$b) \pi(1/\sigma_*^2|a, \varsigma, \mu_x, w, \phi) \sim \text{Gama}\left(\left(A + \frac{p}{2}\right); B + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x - \varsigma t_i)^2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
c) \quad \pi(\mu_x | a, \varsigma, \phi, w, \sigma_*^2) &\sim N \left(\frac{\sigma_{xx}^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \varsigma t_i) + \sigma_*^2 \mu_{xx}}{\sigma_*^2 + p\sigma_{xx}^2}; \frac{\sigma_*^2 \sigma_{xx}^2}{\sigma_*^2 + p\sigma_{xx}^2} \right) \\
d) \quad \pi(1/\phi_1 | a, \varsigma, \mu_x, w, \sigma_*^2) &\sim Gama \left(\left(A_{\phi_1} + \frac{n}{2} \right); B_{\phi_1} + \frac{\sum_{j=1}^n (y_{1j} - x_i)^2}{2} \right) \\
e) \quad \pi(1/\phi_j | a, \varsigma, \mu_x, w, \sigma_*^2) &\sim Gama \left(\left(A_{\phi_j} + \frac{n}{2} \right); B_{\phi_j} + \frac{\sum_{j=1}^n (y_{ij} - \alpha_j - x_i)^2}{2} \right), \quad j = 2, \dots, p \\
f) \quad \pi(\varsigma | a, \phi, \mu_x, w, \sigma_*^2) &\sim N \left(\frac{\frac{\sigma_t^2}{w} \sum_{i=1}^p [(x_i - \mu_x) t_i]}{\sigma_*^2 + \frac{\sigma_t^2}{w} \sum_{i=1}^p t_i^2}; \frac{\frac{\sigma_t^2}{w} \sigma_*^2}{\sigma_*^2 + \frac{\sigma_t^2}{w} \sum_{i=1}^p t_i^2} \right) \\
g) \quad \pi(w | a, \phi, \mu_x, \varsigma, \sigma_*^2) &\sim Gama \left(\frac{g+1}{2}; \frac{4\sigma_t^2 + \varsigma^2 g}{2\varsigma^2} \right) \\
h) \quad \pi(t_i | a, \phi, \mu_x, \varsigma, \sigma_*^2, w) &\sim Half-Normal \left(\frac{x_i - \mu_x}{\varsigma^2 + \sigma_*^2}; \frac{\sigma_*^2}{\varsigma^2 + \sigma_*^2} \right)
\end{aligned}$$

Demonstração: Depois de exaustiva manipulação algébrica, trabalhando diretamente com a função de verossimilhança completa. Obtemos a distribuição condicional de um particular parâmetro, θ_i^* , condicionado em relação aos outros parâmetros e deixando θ_i^* livre. Então, temos as condições necessárias para garantir a convergência do amostrador de *Gibbs*.

Então, temos as condições necessárias para garantir a convergência do amostrador de *Gibbs* e este pode ser implementado da seguinte forma

1. . Atribua valores iniciais para o vetor $\theta^{*(0)} = (a^{(0)}, \phi^{(0)}, \mu_x^{*(0)}, \varsigma^{(0)}, 1/\sigma_*^{2(0)})$
2. Gere $w^{(j)}, t_i^{(j)}$, utilizando os valores iniciais fixados;
3. Atualize $\theta^{*(j)}$ através de suas respectivas distribuições;
4. Repita os passos 2 e 3 para $j = 1, \dots, N$; e
5. Descarte os B primeiros valores ($B \leq N$). .

Os $N - B$ valores obtidos iterativamente serão utilizados para a estimação dos parâmetros de interesse.

Aplicação

Nesta seção, um conjunto de dados reais é utilizado para desenvolver a metodologia utilizada. Barnett (1969) estudaram dados sobre medições da capacidade vital do pulmão humano em um grupo comum de 72 pacientes, utilizando dois instrumentos (padrão e novo), explorados por operadores qualificados e não qualificados. Como visto em Bolfarine e Galea-Rojas (1995), os quatro instrumentos foram comparados da seguinte forma

- Instrumento 1: instrumento padrão e operador qualificado;
- Instrumento 2: instrumento padrão e operador não qualificado;
- Instrumento 3: Novo instrumento e operador qualificado;

- Instrumento 4: Novo instrumento e operador não qualificado. Consideramos as medições dividido por 100, a fim de melhorar a estabilidade numérica.

Utilizando o amostrador de *Gibbs* para calcular as estimativas dos parâmetros do modelo. Foi utilizado o software *OpenBUGS* para a implementação do modelo em estudo, sendo que o *OpenBUGS* é utilizado para simular distribuições *a posteriori* e na atualidade é muito utilizado por pesquisadores que implementam algoritmos MCMC.

Desta forma foi ajustado um modelo através pelo *OpenBUGS* e que as distribuições *a priori* consideradas no Teorema 1, são especificadas por $\alpha_i \sim N(\mu_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i}^2)$ $i = 2, \dots, p$, $1/\phi_i \sim \text{Gama}(A_{\phi_i}, B_{\phi_i})$ $i = 1, \dots, p$, $\mu_x \sim N(\mu_{xx}, \sigma_{xx}^2)$ $1/\sigma_*^2 \sim \text{Gama}(A, B)$ e $\varsigma \sim t(0; \sigma_t^2; g)$, com os hiperparâmetros, todos conhecidos (a exceção de g , que assumimos uma distribuição uniforme). A escolha destas distribuições serão baseadas nas especificações usuais da teoria de regressão linear. A seguir serão utilizados os seguintes valores para os hiperparâmetros: $\mu_{\alpha_i} = \bar{y}_i - \mu_x x$, $\sigma_{\alpha_i}^2 = \text{vary}_i$, $A_{\phi_i} = B_{\phi_i} = 2$, $\mu_{xx} = 0.001$, $\sigma_t^2 = \sigma_{xx}^2 = 10000$, $A = B = 2$.

Para esta implementação foram geradas 500000 iterações dentro do amostrador de *Gibbs* sendo descartadas as 5000 primeiras no processo de aquecimento das cadeias (*burn-in*). Os resultados desta implementação são apresentados juntamente com os resultados de Montenegro, Lachos e Bolfarine (2010) na Tabela 1.

Tabela 1: Resultados da estimação do modelo de *Grubbs* normal assimétrico via Algoritmo EM em uma abordagem clássica e os resultados da estimação do modelo de it *Grubbs* normal assimétrico via MCMC para o conjunto de dados de Barnett (1969).

Parâmetro	Algoritmo EM		Bayesiano	
	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão
α_2	-0.7042	0.2961	-0.5951	0.2745
α_3	-0.9750	0.3649	-0.8655	0.3046
α_4	-1.4389	0.3693	-1.3291	0.3589
λ_x	5.6763	3.8284	4.4991	2.1886
μ_x	12.1559	1.3918	13.4197	1.0151
ϕ_1	5.0611	1.2888	5.3352	1.0711
ϕ_2	1.2516	0.6640	1.3607	0.5242
ϕ_3	4.5264	0.9997	4.7577	0.8984
ϕ_4	4.7577	1.0646	5.0227	0.8154
ϕ_x	168.91	39.9448	101.58	21.2468

De acordo com a Tabela 1 podemos observar que o valor do desvio padrão da maioria das estimativas dos parâmetros *a posteriori* no modelo de *Grubbs* Assimétrico são menores em relação as estimativas do modelo obtidas via algoritmo EM. Se compararmos o trabalho de Montenegro, Lachos e Bolfarine (2010), as estimativas dos parâmetros de variabilidade obtiveram uma melhoria em sua precisão. Vale ressaltar que o valor zero não pertence ao intervalo de credibilidade de λ , o que evidencia que os dados possuem uma assimetria e, pelo intervalo de credibilidade, esta assimetria é positiva.

O histograma com a densidade *a posteriori* aproximada dos parâmetros são apresentados na Figura 1.

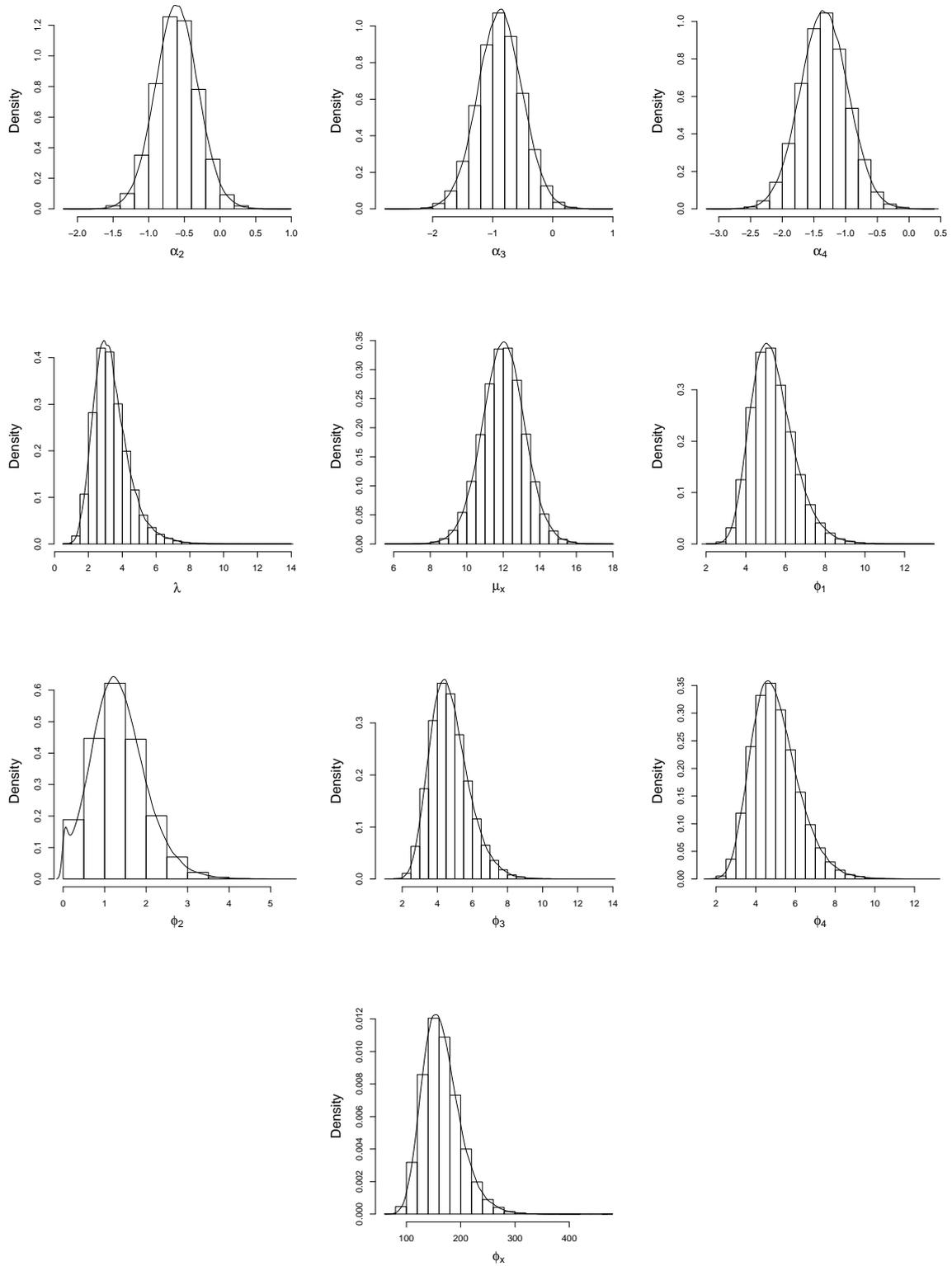


Figura 1: O Modelo *Grubbs* Normal Assimétrico Bayesiano: Densidades *a posteriori* aproximadas para α_2 , α_3 , α_4 , λ_x , μ_x , ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , e ϕ_x .

Conclusão

Neste trabalho, propomos uma estratégia Bayesiana para estimação uma extensão do modelo de erro de medição *Grubbs* usando a distribuição normal assimétrica. A estimativa dos parâmetros é feita via um algoritmo MCMC, no caso o amostrador de *Gibbs*, implementado com expressões das condicionais completas dos parâmetros de interesse. Ao se comparar o modelo *Grubbs* usando distribuição Normal o modelo de *Grubbs* usando a distribuição normal assimétrica forneceu estimativas mais estáveis dos parâmetros de interesse.

Referências

- ARELLANO-VALLE, R. B.; GENTON, M. G. On fundamental skew distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, Elsevier, v. 96, n. 1, p. 93-116, 2005.
- AZZALINI, A. A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian journal of statistics*, JSTOR, p. 171-178, 1985.
- BARNETT, V. D. Simultaneous pairwise linear structural relationships. *Biometrics*, v. 25, p. 129-142, 1969.
- BAYES, C. L.; BRANCO, M. Bayesian inference for the skewness parameter of the scalar skew-normal distribution. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, v. 21, n. 2, p.141-163, 2007.
- BOLFARINE, H.; GALEA-ROJAS, M. Maximum likelihood estimation of simultaneous pairwise linear structural relationships. *Biom J*, v. 37, p. 673-689, 1995.
- FULLER, W. *Measurement error models*. [S.l.]: Wiley, New York, 1987.
- GRUBBS, F. On estimating precision of measuring instruments and product variability. *Journal American Statistical Society*, v. 43, p. 243-264, 1948.
- GRUBBS, F. Errors of measurement, precision, accuracy and the statistical comparison of measuring instruments. *Technometrics*, v. 15, p. 53-66, 1973.
- LISEO, B.; LOPERFIDO, N. A note on reference priors for the scalar skew-normal distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Elsevier, v. 136, n. 2, p. 373-389, 2006.
- MONTENEGRO, L. C.; LACHOS, V. H.; BOLFARINE, H. Inference for a skew extension of the grubbs model. *Statistical Papers*, Springer, v. 51, n. 3, p. 701-715, 2010.
- NETO, E. C.; BRANCO, M. D. *Bayesian reference analysis for binomial calibration problem*. [S.l.]: IME-USP, 2003.
- SHYR, I.; GLESER, L. Inference about comparative precision in linear structural relationships. *Journal Statistical Planing Inference*, v. 14, p. 339-358, 1986.
- THEOBALD C.M.; MALLISON, J. Comparative calibration, linear structural relationship and congeneric measurements. *Biometrics*, v. 34, p. 35-45, 1978.